Poměry

2. PODZIMNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 9. LISTOPADU 2015

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Jana, Dana a Hana organizují spolu s pěti hochy Korespondenční seminář z poměrů. Vyšlo najevo, že Jana i Dana měly v minulosti poměr se třemi organizátory a Hana dokonce se čtyřmi. Musí už nutně existovat organizátor, který měl poměr se všemi třemi organizátorkami?

ÚLOHA 2. (3 BODY)

Tenista počítá svoji úspěšnost tak, že vydělí počet vyhraných zápasů počtem všech odehraných zápasů. Před začátkem turnaje byla jeho úspěšnost přesně 1/2. Během turnaje odehrál čtyři zápasy, ze kterých tři vyhrál a jeden prohrál. Po turnaji jeho úspěšnost přesáhla 0,503. Jaký nejvyšší počet zápasů mohl před turnajem vyhrát?

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Buď $ABCD$ rovnoběžník. V jakém poměru rozdělují přímky procházející vrcholem A a středy stran BC resp. CD úhlopříčku BD?

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Jsou dány tři kružnicové oblouky se společnými koncovými body A a B. Z bodu B vedeme dvě polopřímky tak, že obě leží ve stejné polorovině vzhledem k přímce AB. První polopřímka oblouky protne postupně v bodech M_1, M_2, M_3, druhá pak postupně v bodech N_1, N_2, N_3. Dokažte, že

$$\frac{|M_1M_2|}{|M_2M_3|} = \frac{|N_1N_2|}{|N_2N_3|}.$$

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Tečny ke kružnici k se středem S se jí dotýkají v bodech K, L a protínají se v bodě M. Bod N leží na k tak, že KN je její průměr. Označme P průsečík přímek LN a KM a Q průsečík PS a MN. Vypočtěte $|MQ| / |QN|$.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

Pětiprvkovou množinu nenulových reálných čísel nazveme *vykutálenou*, pokud platí, že pro libovolná tři různá čísla x, y, z ležící v této množině je $xy + yz + zx$ racionální číslo. Ukažte, že poměr libovolných dvou čísel z jedné vykutálené množiny je racionální.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)

V trojúhelníku ABC má úhel při vrcholu A velikost $60°$. Uvnitř trojúhelníka se nachází bod K, pro který $|\sphericalangle AKB| = |\sphericalangle BKC| = |\sphericalangle CKA| = 120°$. Označíme-li střed strany BC jako M, dokažte rovnost

$$\frac{|KA| + |KB| + |KC|}{|AM|} = 2.$$

Úloha 8. (5 bodů)

Pro přirozené číslo n označme jeho ciferný součet symbolem $S(n)$. Najděte největší možnou hodnotu poměru $S(n) / S(16n)$.