(Od)mocniny

2. jarní série — Termín odeslání: 7. března 2016

Úloha 1. (3 body)
Najděte největší přirozené číslo, pro které platí, že ať se podíváme na jakékoli dvě jeho po sobě jdoucí cifry, dostaneme druhou mocninu nějakého přirozeného čísla.

Úloha 2. (3 body)
Pro která prvočísla p platí, že výraz $2^p + p^2$ je také prvočíslo?

Úloha 3. (3 body)
Jsou dána kladná reálná čísla a, b, c splňující nerovnosti $a^b > b^a$ a $b^c > c^b$. Ukažte, že $a^c > c^a$.

Úloha 4. (5 bodů)
Dokažte, že

$$\sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \cdots + \sqrt[2016]{2016}}} < 2.$$

Úloha 5. (5 bodů)
Pepa má na kartičkách napsaná všechna přirozená čísla od jedné do 10^{2016}. Z dlouhé chvíle se rozhodl umocnit je na všechna na 2016 a následně sečíst. Určete posledních 1008 cifer čísla, které mu vyjde.

Úloha 6. (5 bodů)
Dokažte, že $(\sqrt{2} - 1)^{2016}$ se dá zapsat jako rozdíl druhých odmocnin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel.

Úloha 7. (5 bodů)
Přirozené číslo n nazveme *tříctuctové*, jestliže pro každé prvočíslo p, které dělí n, platí, že p^{36} dělí n a p^{37} už ne. Rado a Matěj mají každý konečnou množinu svých oblíbených tříctuctových čísel. Zjistili, že oba mají ve svých množinách stejný počet čísel. Navíc se součin všech čísel v Radově množině rovná součinu všech čísel v Matějově množině, zatímco součty čísel v jednotlivých množinách jsou různé. Ukažte, že se součet čísel z Matějovy množiny liší od součtu čísel z Radovy množiny alespoň o milión.

Úloha 8. (5 bodů)
Najděte všechna přirozená a taková, že pro každé přirozené n větší než 4 platí

$$2^n - n^2 \mid a^n - n^a.$$