Bylo nebylo

1. PODZIMNÍ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 5. ŘÍJNA 2015

ÚLOHA 1. (3 BODY)

PraSátko Pepa hledalo další čtyři členy týmu na Náboj. Vydalo se do domečku, kde žilo pět PraSátek. S těmi bohužel bydlel v chaloupce i zlý vlk převlečený za další PraSátko, a toho Pepa do týmu nechtěl. Pepa si může vybrat dvojici obyvatel domečku a jednoho z nich se zeptat, zdali je ten druhý vlk. Toto může udělat dvakrát, přičemž druhou dvojici si může vybrat nezávisle na tom, jak zvolil tu první. PraSátka vždy mluví pravdu a vlk vždy lže. Jak se má Pepa zeptat, aby si mohl bez obav vybrat čtyři PraSátka do svého týmu a určitě v něm neměl vlka?

ÚLOHA 2. (3 BODY)

Zlý Honza chtěl zničit celý PraSečí svět. Zašel proto za černokněžníkem, aby se s ním spolčil. Ten mu dal nekonečnou rovinu a pravil: „Nejprve obarvi tuto rovninu modrou a červenou barvou tak, aby na každé kružnici o poloměru jedna ležely právě dva modré body. Podaří-li se ti to, pomůžu ti zničit svět.“ Rozhodněte, zda Honza černokněžníkův úkol mohl splnit.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Bylo nebylo, v daleké zemi žilo 2015 zapomnětlivých králů. Každý z nich obýval jeden hrad a těchto 2015 hradů tvořilo pravidelný 2015úhelník. Mezi každými dvěma hrady vedla cesta, a to buď dlážděná, nebo sypaná pískem. Jednou se všichni králové sjeli na Faerské ostrovy, aby společně pozorovali zatmění Slunce. Potom se chtěl každý vrátit do svého hradu. Během sjezdu ale zapomněli, ve kterém hradě kdo bydlí, a hrady si tedy rozdělili náhodně. Dokažte, že existují dva králové, mezi jejichž současnými hrady vede cesta stejného typu jako před výměnou.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

V každém patře nekonečně vysoké začarované věže se nachází magický portál, na kterém je napsáno přirozené číslo. Tato přirozená čísla tvoří nerostoucí posloupnost[1] a zároveň každé číslo udává, do kolikátého patra příslušný portál vede. Mezi patry věže lze cestovat pouze pomocí portálů a každý portál je pouze jednosměrný. V jednom z pater si malá myška usmyslela, že se vydá na výzvědy, a začala putovat skrze portály. Ukažte, že za nějakou dobu zůstane uvězněná ve dvojici pater, případně dokonce jen v jediném.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Zlý černokněžník proměnil PraSátko v krásnou dívku. Navíc začaroval jeho oblíbené hodiny tak, že se čísla na ciferníku přeházela. Hodiny nyní odbíjejí každou celou hodinu, jenže napřeskáčku – přesně podle čísel na ciferníku. PraSátko bude vysvobozeno, pokud hodiny během tří po sobě jdoucích odbíjení vydají alespoň 21 úderů. Dokažte, že ať černokněžník začaroval hodiny jakkoliv, prokletí PraSátka bude za patnáct hodin určitě zlomeno.

---

[1] To znamená, že vybereme-li si kterékoliv patro a označíme-li číslo na portálu v tomto patře a, pak ve všech patrech nad tím vybraným jsou na portálech čísla menší či rovná a.

Úloha 6. (5 bodů)

V lese je 99 chaloupek. V každé chaloupce žije jedna až 99 ježibab. Přitom neexistuje žádná skupina chaloupek taková, aby celkový počet ježibab v nich žijících byl dělitelný stem. Dokažte, že v každé chaloupce žije stejný počet ježibab.

Úloha 7. (5 bodů)

V každé z n slují žije drak. Chodí je krmit 2^{n-1} trpaslíků, přičemž žádní dva z nich nekrmí přesně ty samé draky a pro každou trojici trpaslíků existuje drak, kterého chodí krmit všichni tři. Ukažte, že pokud jsou draci alespoň tři, existuje drak, kterého krmí všichni trpaslíci.

Úloha 8. (5 bodů)

Je není jeden strom[2], na kterém Štěpán s Mirkem hrají hru. Štěpán začíná. Hráč na tahu vždy obarví dosud neobarvený vrchol jednou ze čtyř barev tak, aby dva vrcholy spojené hranou neměly stejnou barvu. Štěpán vyhraje, obarví-li se všechny vrcholy. V opačném případě vyhraje Mirek. Dokažte, že Štěpán má vyhrávající strategii[3].

[2]Definici stromu spolu se všemi ostatními potřebnými definicemi lze najít na tomto odkazu *mks.mff.cuni.cz/archive/34/uvod1s.pdf* .

[3]Vyhrávající strategie je strategie, která vede k vítězství, ať už protihráč hraje jakkoliv.