Do nekonečna a ještě dál

Axiom výběru očividně platí, princip dobrého uspořádání očividně neplatí, a Zornovo lemma – těžko říct. – Jerry Bona

Díl třetí – Síla volby

aneb Nač ten humbuk okolo axiomu výběru

V minulém díle jsme představili sadu deseti axiomů teorie množin, které se v současnosti běžně používají. Jeden z nich, axiom výběru, mezi nimi ale z počátku chyběl. Skutečnost, že se matematikům nedaří dokázat něco tak zřejmého jako „je možné provést nekonečně mnoho nahodilých výběrů najednou“, způsobila pozdvižení. Obzvlášť poté, co shledali, že na jednu stranu lze z axiomu výběru odvodit různé pochybně vzhlížející důsledky, ale na druhou stranu jej již mimoděk používají ve svých důkazech. Obava, krátce poté, co se zbavili Russelova paradoxu, byla pochopitelná. Opravdu si můžeme jen tak dovolit přidat nový axiom? Nemůže se s ním teorie zas rozbít? Nakonec problém rozsekli podobně jako hypotézu kontinua[1] (použitím obdobných pokročilých nástrojů). Axiom výběru není možné pomocí ostatních axiomů dokázat ani vyvrátit.

Rozdíl mezi axiomem výběru a hypotézou kontinua spočívá v tom, jak k této nezávislosti na ostatních axiomech matematici přistoupili. Zatímco u hypotézy kontinua se smířili s tím, že se holt nikdy nezjistí, jak to s ní „doopravdy“ je, axiom výběru uznali za natolik intuitivní a zřejmý, že jej zařadili mezi ostatní axiomy. Tento přístup není povinností – kdokoli si může zvolit svou sadu axiomů, kterou bude uznávat. Jde jen o všeobecně rozšířenou praxi, které se držíme i zde.

V tomto díle seriálu se axiomu výběru podíváme na zoubek. Dozvíš se, k čemu potřeba není, jak vypadá jeho takřka přehlédnutelné použití, jak s ním umravnit porovnávání mohutností, i jaké paradoxy[2] z něj jdou odvodit.

Co axiom výběru je a co není

Axiom výběru říká

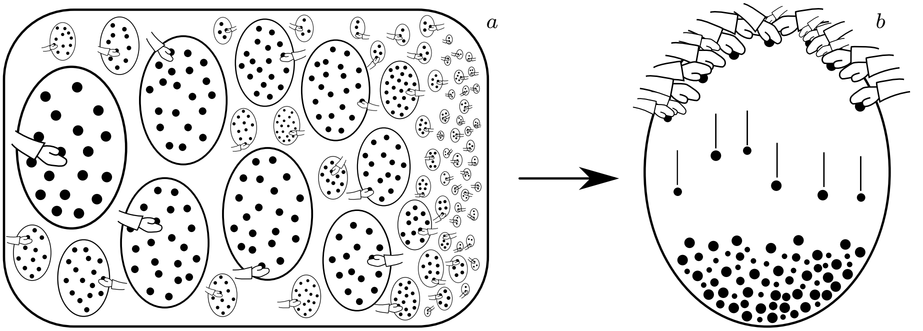
$$(\forall x \in a)(\forall y \in a)(x \neq y \Leftrightarrow x \cap y = \emptyset) \Rightarrow (\exists b)(\forall x \in a)(\exists y)(x \cap b = \{y\}).$$

Slovy: Kdykoli máme množinu a, jejíž prvky jsou navzájem disjunktní (tj. neprotínající se) neprázdné množiny, umíme vybrat z každého prvku x množiny a jednoho reprezentanta $y \in x$ a sestavit množinu reprezentantů b.

Laický, avšak výstižný popis axiomu výběru zní: **Lze provést nekonečně mnoho nahodilých výběrů najednou.** Je dobré si uvědomit, proč jsou v tomto popisu pojmy „nahodilý“ a „nekonečně mnoho“. Důvodem jsou následující dvě tvrzení, z nichž první říká „Nenahodilé výběry lze provádět i bez axiomu výběru.“ a druhé „Konečně mnoho výběrů lze taktéž provést bez axiomu výběru.“.

[1] Připomínáme, že hypotéza kontinua je výrok $|\omega_1| = |\mathbb{R}|$, který nelze dokázat ani vyvrátit. Ví se pouze, že $|\omega_1| \leq |\mathbb{R}|$.

[2] Zde myslíme překvapivá tvrzení, nikoli spor jako v případě Russelova paradoxu.



Tvrzení. *Pokud máme předpis (formuli), jak z jednotlivých množin $x \in a$ najít reprezentanta $y \in x$, plyne existence množiny reprezentantů z axiomu nahrazení.*

Axiom výběru je tedy potřeba jenom v případě, kdy takový předpis nemáme. Poznamenejme, že předpis máme například v situaci, kdy všechny množiny x obsahují přirozená (či obecněji ordinální) čísla. V takovém případě může předpis znít „vezmi nejmenší číslo z dané množiny".

Tvrzení. *Pokud je množina a konečná, lze najít množinu reprezentantů bez axiomu výběru. Axiom výběru tedy je třeba až v okamžiku, kdy je a nekonečná množina.*

Důkaz. Dokážeme to (obyčejnou, nikoli transfinitní) indukcí podle velikosti a. V okrajovém případě, kdy je a prázdná množina, je správnou odpovědí prázdná množina reprezentantů. Označme dále n počet prvků množiny a a předpokládejme, že lze najít množinu reprezentantů v každé $(n-1)$-prvkové množině. Dokážeme, že ji lze najít i v množině a. Uvažme jeden prvek x množiny a (existuje, protože a je neprázdná) a dále prvek $y \in x$ (existuje, protože x je neprázdná množina). Dále z indukčního předpokladu najdeme množinu b reprezentantů z $a \setminus \{x\}$. Kýžená množina reprezentantů pro a pak je například $b \cup \{y\}$. $\square$

Tento důkaz nelze transfinitně zobecnit, protože se v něm opíráme o indukční předpoklad na předchozím prvku, který u limitních ordinálů neexistuje. Pro následující tvrzení z minulého dílu již axiom výběru potřeba je.

Tvrzení. *Kdykoli máme spočetnou množinu X, jejíž prvky jsou spočetné množiny, tak i množina $\bigcup X$ je spočetná.*

Důkaz. Množina X je spočetná, takže existuje prostá funkce $f\colon X \to \omega$. Každý prvek $x \in X$ je spočetná množina, takže existuje prostá funkce $g_x\colon x \to \omega$. Abychom ukázali, že $Y = \bigcup X$ je spočetná množina, musíme ukázat, že existuje prostá funkce $g\colon Y \to \omega$. Pro $y \in Y$ vždy najdeme $x \in X$, které obsahuje prvek y. Pak definujeme

$$g(y) = 2^{f(x)} \cdot 3^{g_x(y)}.$$

Prostota funkce g vyplývá z jednoznačnosti prvočíselného rozkladu: Z hodnoty $g(y)$ jednoznačně určíme exponent u dvojky, a protože je f prostá funkce, můžeme určit i samotné x. Z exponentu u trojky (a na základě prostoty funkce g_x) nakonec určíme samotné y. $\square$

Kde byl potřeba axiom výběru? Jeden náznak vybírání v důkaze je, když si pro prvek y vybereme nějaké $x \in X$, které jej obsahuje. V tomto okamžiku ale axiom výběru nezbytný není – můžeme totiž napsat předpis, který x určí jednoznačně: Zvolíme x takové, pro které je $f(x)$ nejmenší možné. Možnost přiřadit každému $y \in Y$ příslušné $x \in X$ tedy plyne z axiomu nahrazení, jak jsme již uváděli.

Axiom výběru byl však klíčový v jiném momentě – když jsme volili funkce g_x. Možností, jak zobrazit x do ω, je nekonečně (a typicky nespočetně) mnoho. My jsme si však vybrali jen jednu, a to pro každý z prvků množiny X, kterých mohlo být nekonečně mnoho. Formální použití axiomu výběru by vypadalo třeba takto:

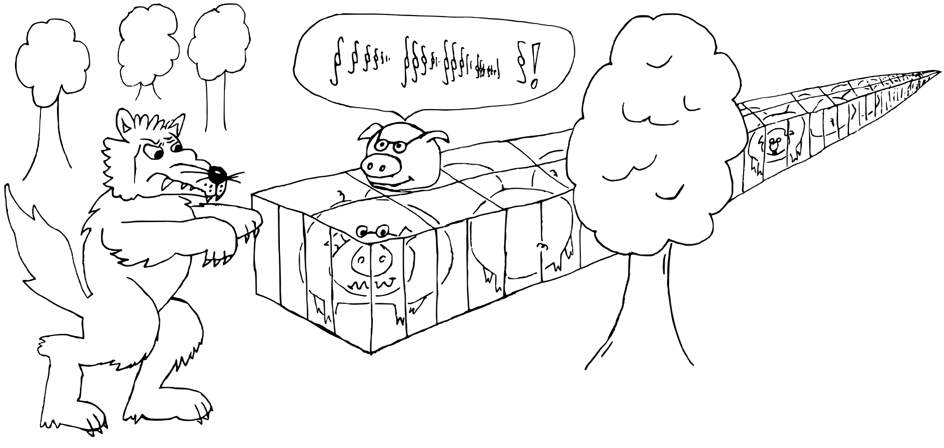
Nechť $G_x \subset \mathcal{P}(x \times \omega)$ je množina všech prostých zobrazení $x \to \omega$ pro $x \in X$. Jednotlivé množiny G_x jsou jednak neprázdné, protože všechny $x \in X$ jsou spočetné, a jednak disjunktní, protože z funkce lze poznat její definiční obor. Pak na $a = \{G_x : x \in X\}$ aplikujeme axiom výběru, čímž dostaneme množinu reprezentantů b. Nakonec definujeme g_x jako onen jediný prvek průniku $G_x \cap b$.

Opět by ale axiom výběru potřeba nebyl, kdybychom měli daný předpis pro funkce g_x. Popravdě se moc často nestává, že bychom měli spočetnou množinu spočetných množin a neměli při nich i seznam prostých funkcí do ω. Například v důkaze spočetnosti množiny $\mathbb{Q}$ se bez axiomu výběru obejdeme. Někdy se ale může stát, že o prvcích množiny víme, že jsou spočetné, ale nemáme předepsáno, jak – například ve druhém díle, když jsme dokazovali, že sjednocení spočetné množiny prvků ω_1 stále leží v ω_1.

Předešlé použití axiomu výběru působí neškodně a ukazuje, jak ho mohli matematici snadno přehlédnout. Je to také tím, že jsme axiom výběru použili jen na spočetnou množinu a, kde je ještě konstrukce příslušné množiny reprezentantů docela představitelná. Co je tedy na tom axiomu tak kontroverzního? Následující dva příklady již demonstrují moc axiomu výběru v plné síle.

Dobrodružství nekonečně mnoha prasátek

Před nekonečně mnoha lety, za nekonečně mnoha horami a řekami, potulovala se družinka nekonečně (ale spočetně) mnoha prasátek. Šla poklidně lesem a neměla ponětí, že na ně má spadeno zlý vlk. Na tuhle chvíli čekal už nekonečně dlouho – už dávno měl nachystanou past. Ještě kousek… A klap! Všechna prasátka byla v kleci.



„Tak, a teď vás všechna sním," liboval si vlk. Už měl rozpočítáno, jak sežere každý den nekonečně mnoho prasátek, a dokonce mu to vyjde na nekonečně mnoho dní. Ale prasátka nehodlala prodat svou kůži lacino. Jak jich bylo hodně, našlo se mezi nimi prasátko-právník, které dobře vědělo, proč je jezení prasátek nejen nesprávné, ale dokonce ilegální: „Podle paragrafu 58072 královy vyhlášky $\omega \cdot \omega + 5$ sbírky je konzumace sebeuvědomělých bytostí ztotožněna se skutkovou podstatou trestného činu vraždy, jak je uvedena v trestním zákoníku …" „Jaké sebeuvědomění?! Jste obyčejná prasata – zvířata!" čílil se vlk a už přehodnocoval své plány. Radši je všechna sežere už zítra, takovéhle diskuze nemá zapotřebí.

„Podle paragrafu ω téže vyhlášky je sebeuvědomělá bytost taková, která prokáže svou schopnost splnit úkol intelektuální podstaty…" sypalo ze sebe prasátko-právník. „Jó takhle," pomyslel si vlk

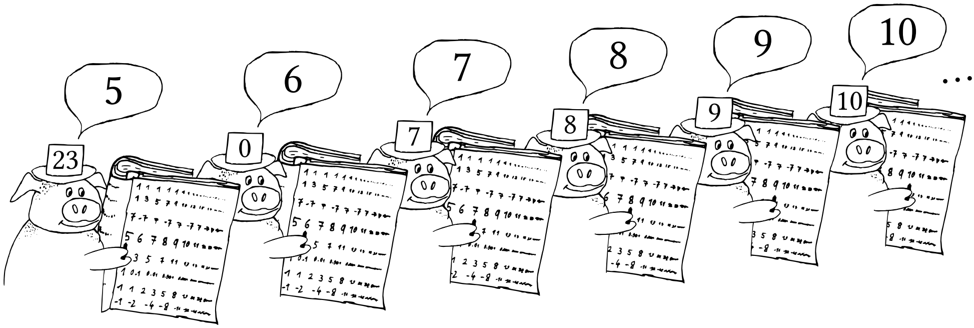
– na vymýšlení nesplnitelných úkolů byli pohádkoví záporáci vždy odborníky (nebo si to o sobě aspoň mysleli). Takto vypadal úkol pro prasátka: Další den se mají seřadit na přirozená čísla. Poté vlk na jejich hlavy posadí klobouky a každý klobouk bude mít barvu nějakého odstínu šedi (reálné číslo). Prasátka neuvidí barvu svého klobouku, jen barvy klobouků prasátek před sebou (stojících na vyšších přirozených číslech). Pak každé prasátko pošeptá vlkovi tip na barvu svého klobouku. Pokud se splete jen konečně mnoho prasátek, vlk je všechna pustí na svobodu. Jakmile se jich však zmýlí nekonečně mnoho, vlk všechna prasátka sežere. „Po právní stránce je vše v pořádku,“ vypísklo prasátko-právník a schoulilo se do kouta klece.

Každé jednotlivé prasátko v duchu uvažovalo: „Pokud vlk nasadí každému z nás klobouk náhodné barvy, nebude žádná cesta, jak by mi informace o barvách klobouků přede mnou mohla prozradit něco o tom, co mám já. Takže šance, že se strefím do náhodného reálného čísla bez sebemenší nápovědy, je nulová. Stejně tak mají nulovou šanci ostatní prasátka, tedy je mizivá pravděpodobnost, že se vůbec někdo strefí. A že bychom se měla strefit všechna s výjimkou konečně mnoha z nás? Tady už pomůže jedině zázrak…“

Někdo tomu říká zázrak, jiný axiom výběru. A protože bylo prasátek dohromady docela hodně, našlo se mezi nimi jedno, které na to přišlo. Za pomoci axiomu výběru se totiž v jakkoli náhodném rozestavění klobouků dá najít „pravidelnost“, přesněji řečeno reprezentant.

Vlkovo rozdání klobouků interpretujeme jako funkci $f\colon \omega \to \mathbb{R}$, kde hodnota $f(n)$ určuje barvu klobouku prasátka stojícího na čísle n. Uvažme množinu M všech možných takových funkcí f. Dále řekneme, že dvě funkce $f, g \in M$ si jsou podobné (značíme $f \sim g$), pokud se liší jen na konečně mnoha pozicích. Nakonec pro $f \in M$ nazveme *ocasem funkce* f množinu $[f] = \{g \in M : g \sim f\}$.

Všimneme si, že kdykoli $g \in [f]$, tak je $[g] = [f]$. Z toho plyne, že jednotlivé ocasy funkcí jsou vždy buď stejné, nebo disjunktní. Na množinu $a = \{[f] : f \in M\}$ tak můžeme použít axiom výběru a získat množinu reprezentantů R. Množina R bude tvořit základ strategie prasátek – jednu takovou množinu reprezentantů R si prasátka vyberou a každé si ji napíše do notýsku.



Když vlk posadí klobouky podle funkce f, nebude sice žádné prasátko znát f, ale každému prasátku do znalosti f chybí jen konečně mnoho hodnot, takže každé prasátko bude znát její ocas $[f]$. V notýsku pak najde jediného reprezentanta $g \in [f] \cap R$, a stojí-li na přirozeném čísle n, pošeptá vlkovi $g(n)$. Takto se zmýlí jen konečně mnoho prasátek, protože $g \sim f$. Všimněme si, že kdyby bylo prasátek jen konečně mnoho, skutečně by se s největší pravděpodobností spletla všechna. Když jich ale je nekonečně mnoho, už se jich většina strefí. Barvu, kterou mají říct, určují pomocí klobouků, které vidí před sebou – i když je jasné, že „barvy jednotlivých klobouků spolu nijak nesouvisejí“. To je první ze slibovaných paradoxů.

Neměřitelná množina

Další příklad použití axiomu výběru již není pohádkový, ale takový, na který matematici skutečně narazili. Přáli si zobecnit pojem obsahu a objemu a tento zobecněný obsah nazvali *míra*. Pro jednoduchost si to ukážeme na reálných číslech. Míra by měla být zobrazení, které podmnožině reálných čísel přiřadí číslo z $\mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ udávající, „jak je tato množina dohromady dlouhá“. Matematici si usmysleli, že by po míře chtěli následující vlastnosti:

(i) Míra (neprázdného) otevřeného intervalu (a, b) je jeho délka $b - a$.
(ii) Pokud $A \subset B \subset \mathbb{R}$, tak je míra A menší nebo rovna míře B (prvek ∞ zde pokládáme za vyšší než všechna reálná čísla).
(iii) Pokud posuneme množinu $A \subset \mathbb{R}$ po reálné ose, neměla by se změnit její míra. Formálně řečeno je pro každé (pevné) reálné číslo r míra množiny $\{a + r : a \in A\}$ stejná jako míra množiny A.
(iv) Jsou-li $A, B \subset \mathbb{R}$ disjunktní množiny, dostaneme míru $A \cup B$ jako součet měr A a B.
(v) Sjednocení spočetně mnoha množin nulové míry je stále množina nulové míry.

Jsou tyto požadavky přirozené, či přehnané? Přinejmenším s axiomem výběru lze ukázat, že není možné je všechny splnit a definovat míru všem podmnožinám $\mathbb{R}$.

Pro reálné číslo x definujeme jeho *iracionální část* coby množinu $S_x = \{x+q : q \in \mathbb{Q}\}$. Všimněme si, že $x \in S_x$ a jakmile $y \in S_x$, tak $S_y = S_x$. Z toho plyne, že jednotlivé množiny S_x jsou vždy buď stejné, nebo disjunktní. Na množinu $\mathcal{S} = \{S_x : x \in \mathbb{R}\}$ tak můžeme použít axiom výběru. Ještě předtím ale každou z nich pronikneme s intervalem $(0, 1)$ – axiom výběru nám tak dá množinu reprezentantů $R \subset (0, 1)$. Množina R má tu vlastnost, že pokud ji posuneme o racionální číslo, získáme množinu disjunktní s původní. Na druhou stranu, pokud ji posuneme o všechna možná racionální čísla, pokryjeme celou reálnou osu. (Prvek x posunutý o všechna racionální čísla totiž pokryje celou množinu S_x.)

Jakou by ale množina R měla mít míru? Je podmnožinou intervalu $(0, 1)$, míra tedy bude rovna nejvýše jedné. Kdyby měla nulovou míru, pak by i každé její posunutí o racionální číslo mělo nulovou míru. Všech možných posunutí o racionální číslo je spočetně mnoho, takže i jejich sjednocení by mělo mít nulovou míru. To je ale spor – celá reálná osa nulovou míru jistě nemá (musí mít míru ∞).

Míra R tak musí být kladné číslo r. V intervalu $(0, 1)$ existuje nekonečně mnoho racionálních čísel – nám jich bude stačit konečně mnoho, víc než $\frac{2}{r}$. Posunutí množiny R o tato racionální čísla jsou navzájem disjunktními podmnožinami intervalu $(0, 2)$. Jejich sjednocení tak je také podmnožinou intervalu $(0, 2)$, ale míra tohoto sjednocení je větší než $r \cdot \frac{2}{r} = 2$. Opět jsme dostali spor, proto nemůžeme množině R přiřadit žádnou míru.

Poznámka. Když jsme popsali problém, tak i nastíníme, jak z něho ven. Matematici po míře stále požadují všechny zmíněné vlastnosti, ale již nepožadují, aby byla míra definovaná na všech podmnožinách $\mathbb{R}$. Musí být ale definovaná pro všechny „měřitelné množiny“, což jsou skoro jakékoli konstruktivně popsané množiny. Například je měřitelná i množina těch reálných čísel, která v desítkovém zápisu neobsahují číslici 2 na žádné prvočíselné pozici za desetinnou čárkou. Přesná definice měřitelných množin však přesahuje rámec tohoto seriálu.

Poznámka. Ve třírozměrném prostoru (formálně $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) lze jít ještě dál a rozdělit kouli na jen konečně mnoho (čtyři základní a několik pomocných pro doladění detailů) disjunktních množin, tyto množiny otočit a posunout a poskládat z nich dvě nové koule, obě stejně velké jako ta původní. Tento jev se nazývá Banach–Tarského paradoxem a demonstruje nemožnost zavedení objemu všech třírozměrných množin ještě silněji, než jsme předvedli zde pro míru na $\mathbb{R}$.

Tato použití axiomu výběru byla víceméně přímočará. Další zajímavosti se budou dít, když si budeme vybírat „postupně“. Napřed ale musíme umět takové postupné vybírání formálně uchopit.

Postupné vybírání

Postupné vybírání není nic nového, ostatně bylo použito již v prvním díle. Coby příklad ukážeme dvě jednoduchá tvrzení, která nejprve dokážeme ne zcela formálně, a následně se zamyslíme, jak by bylo možné tyto důkazy formalizovat. V další kapitole pak tato tvrzení rozšíříme do překvapivější podoby.

Tvrzení. (kritérium pro dobré uspořádání) *Nechť lineárně uspořádaná množina A je neprázdná a nelze v ní najít nekonečnou klesající posloupnost jejích prvků $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots$. Pak má množina A nejmenší prvek.*

Důkaz. Pro spor předpokládáme, že A nemá nejmenší prvek, a najdeme v A nekonečnou klesající posloupnost. Zvolme první prvek x_0. Ten nemůže být nejmenší, najdeme tedy menší prvek $x_1 < x_0$. Ani x_1 nemůže být nejmenší, takže najdeme $x_2 < x_1$. Takto můžeme pokračovat stále, takže nakonec získáme nekonečnou klesající posloupnost $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots$. □

Tvrzení. (minimalita ω mezi nekonečnými mohutnostmi) *Uvažme množinu X. Pak buď existuje bijekce mezi X a některým přirozeným číslem, nebo existuje nekonečná posloupnost různých prvků $x_0, x_1, \ldots$*

Důkaz. Budeme postupně volit x_n coby různé prvky množiny X. Nejprve zvolíme $x_0 \in X$, pak $x_1 \in X \setminus \{x_0\}$, $x_2 \in X \setminus \{x_0, x_1\}$, a tak dále. Pokud se v průběhu X vyprázdní, neboli nemůžeme zvolit $x_n \in X \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, tak jsme právě popsali bijekci $n \to X$ a X je n-prvková konečná množina. V opačném případě se povede sestrojit celou nekonečnou posloupnost různých prvků $x_0, x_1, x_2, \ldots$ □

V obou případech jsme postupně sestrojili posloupnost prvků $x_0, x_1, \ldots$ Posloupnost coby objekt teorie množin by měla být množina (nebo přinejhorším třída). V tomto případě nazveme *posloupností* (prvků z Y délky X) zobrazení $X \to Y$, jehož definičním oborem je ordinál (nebo $\mathbb{O}n$,[3] v předešlých příkladech byla definičním oborem ω). Hodnoty posloupnosti značíme indexem x_n na rozdíl od běžného zobrazení, kde se značí závorkami $x(n)$.

Již v minulém díle jsme se setkali s posloupností ω_α délky $\mathbb{O}n$. Technicky jde téměř o třetí synonymum ke slovům zobrazení a funkce, rozdíl spočívá hlavně v intuitivním vnímání – zatímco funkci si člověk představí jako proces, jak z x vzniká $f(x)$, posloupnost si představí jako za sebou jdoucí prvky $x_0, x_1, x_2, \ldots$

Postupné definování jsme se už naučili provádět rekurzí. Jenže v předešlých dvou důkazech nemáme exaktní pravidlo pro výběr následujícího členu, a (transfinitní) rekurze stojí na tom, že známe následující prvek přesně. Jinak totiž není funkce daná rekurzivním předpisem jednoznačná. Tato jednoznačnost je navíc potřeba i pro důkaz existence – v limitním kroku. Opět není problém ukázat, že existuje odpovídající posloupnost délky n pro libovolné přirozené číslo n. Pokud si však začátky těchto posloupností neodpovídají, nedokážeme je skloubit do jedné nekonečné posloupnosti. V některých případech to ani nejde – například v přirozených číslech najdeme libovolně dlouhou konečnou klesající posloupnost, avšak nikoli nekonečnou.

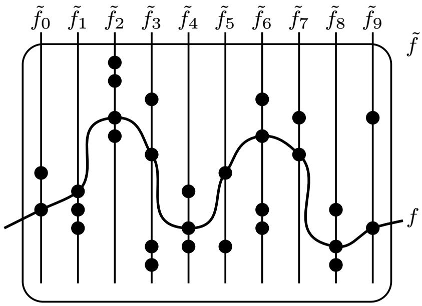
Řešením bude sestrojit ještě před spuštěním rekurze pomocnou funkci, se kterou již bude rekurzivní předpis jednoznačný.

Definice. Nechť X, Y jsou množiny. *Víceznačná funkce z X do Y* je množina $\tilde{f} \subset X \times Y$ taková, že $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\big((x, y) \in \tilde{f}\big)$. Od obyčejné funkce se tedy liší tím, že jednomu x může odpovídat více y.

Tvrzení. *Nechť $\tilde{f}$ je víceznačná funkce z X do Y. Pak existuje funkce $f\colon X \to Y$ taková, že $f \subset \tilde{f}$. Tento proces nazýváme vybráním funkce f z víceznačné funkce $\tilde{f}$.*

Důkaz. Pro $x \in X$ označme $\tilde{f}_x = \tilde{f} \cap (\{x\} \times Y)$ a dále $a = \{\tilde{f}_x : x \in X\}$. Protože je $\tilde{f}$ víceznačná funkce, je každá $\tilde{f}_x$ neprázdná, a proto můžeme na množinu a použít axiom výběru. Výsledkem bude funkce $f\colon X \to Y$ splňující $f \subset \tilde{f}$. □

[3] Připomínáme, že symbolem $\mathbb{O}n$ myslíme (vlastní) třídu všech ordinálů.



Cvičení 1. Nechť existuje (ne nutně prosté) zobrazení $f\colon A \to B$ takové, že každé $b \in B$ lze dostat jako nějaké $f(a)$ (říkáme, že f je *surjektivní* nebo též *na* B). Dokaž, že existuje prosté zobrazení $g\colon B \to A$.

Poznámka. Analogicky by bylo možné zavést i třídovou víceznačnou funkci, avšak v takovém okamžiku již axiom výběru nepostačuje k tomu, aby se z třídové víceznačné funkce vybrala třídová funkce. Pro takový výběr by byl potřeba tzv. *axiom silného výběru*, kterým se v tomto textu nebudeme zabývat.

Nyní můžeme důkazy obou tvrzení formalizovat.

Důkaz. (kritérium pro dobré uspořádání) Předpokládáme, že žádný prvek A není nejmenší. To znamená, že máme víceznačnou funkci $\tilde f$ z A do A, která každému $a \in A$ přiřadí menší prvky. Formálně

$$\tilde f = \{(x, y) : x \in A, y \in A, y < x\}.$$

Z víceznačné funkce $\tilde f$ vybereme funkci f, která každému prvku přiřadí nějaký menší prvek. Nakonec si zvolme jeden prvek $s \in A$ pro začátek a rekurzivně definujeme nekonečnou klesající posloupnost předpisem $x_0 = s$, $x_{n+1} = f(x_n)$. $\square$

Důkaz. (minimalita ω mezi nekonečnými mohutnostmi) Nechť STOP je prvek různý od všech prvků množiny X. Dále uvažme víceznačnou funkci $\tilde f$ z $\mathcal{P}(X)$ do $X \cup \{\mathrm{STOP}\}$, která každé neprázdné množině přiřadí její prvky a prázdné množině přiřadí STOP. Formálně

$$\tilde f = \{(x, y) : x \in \mathcal{P}(X), y \in x\} \cup \{(\emptyset, \mathrm{STOP})\}.$$

Vybereme z ní funkci f, ta každé neprázdné podmnožině množiny X přiřadí jeden její prvek a prázdné množině přiřadí STOP. Pak definujeme rekurzivně posloupnost $x_n = f(X \setminus \{x_i : i < n\})$. Speciálně vyjde $x_0 = f(X)$. Z vlastností funkce f budou x_n nejprve různé prvky množiny X a následně už jen samá STOP.

Mohou nastat dvě možnosti. Pokud je nějaké $x_n = \mathrm{STOP}$, zvolme nejmenší takové n. Zúžení x na n je pak bijekce $n \to X$, takže je X konečná množina. V opačném případě jsme sestrojili nekonečnou posloupnost různých prvků. $\square$

Kombo axiomu výběru a transfinitní rekurze

Zatímco z formálního hlediska je mezi rekurzí a transfinitní rekurzí minimální rozdíl, jinak je tomu z pohledu lidské intuice. Možná sis u minulé kapitoly říkal(a), proč se už zase pipláme s dokazováním něčeho zřejmého, a kvůli formalismům to děláme malinko nešikovně a složitě. V této kapitole provedeme takřka stejné úvahy, jen namísto rekurze na přirozených číslech použijeme rekurzi na všech ordinálech.

Tím najednou místo banálních tvrzeníček získáme silné nástroje teorie množin – Zornovo[4] lemma a princip dobrého uspořádání. Jestli Ti budou jejich důkazy připadat aspoň zpola tak intuitivní jako v předchozí kapitole, seriál splnil své poslání ;-).

[4] Čti [cornovo]; taktéž je známé pod pojmem *princip maximality*.

Tvrzení. (Zornovo lemma) *Mějme množinu X. O množině $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ řekneme, že se jedná o řetězec, pokud pro každé dvě množiny $A, B \in \mathcal{R}$ platí $A \subset B$ nebo $B \subset A$.*

Nechť $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ je neprázdná množina splňující následující podmínku: Pro každý řetězec $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ platí $\bigcup \mathcal{R} \in \mathcal{S}$. Pak existuje maximální množina $M \in \mathcal{S}$. (Maximální množinou rozumíme takovou, že pro žádnou jinou množinu $A \in \mathcal{S}$ neplatí $M \subset A$.)

Navíc můžeme volit $M \supset Y$ pro předem zvolenou $Y \in \mathcal{S}$.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že taková maximální množina neexistuje. To znamená, že kdykoli uvážíme množinu $M \in \mathcal{S}$, najdeme její vlastní[5] nadmnožinu $A \in \mathcal{S}$. Z víceznačné funkce vybereme funkci $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, která každé množině z $\mathcal{S}$ přiřadí nějakou vlastní nadmnožinu z $\mathcal{S}$. Dále víme, že $\mathcal{S}$ je neprázdná, vezměme si tedy prvek $Y \in \mathcal{S}$ a definujme posloupnost S_α délky $\mathbb{O}n$ rekurzivním předpisem:

(i) $S_0 = Y$,
(ii) $S_{\alpha+1} = f(S_\alpha)$,
(iii) $S_\alpha = \bigcup\{S_\beta : \beta \in \alpha\}$ pro α limitní.

Slovy řečeno vystartujeme na Y a na izolovaných ordinálech skáčeme na nadmnožiny pomocí funkce f. Na limitním ordinálu si všimneme, že jsme dosud prošli řetězec prvků z $\mathcal{S}$, můžeme tedy použít jeho sjednocení. Takto jsme definovali rostoucí posloupnost S_α různých prvků z $\mathcal{S}$. Představíme si inverzní zobrazení k posloupnosti S_α – takové, které prvek S_α pošle na ordinál α. Pomocí něj a axiomu nahrazení z množiny $\mathcal{S}$ sestrojíme množinu všech ordinálních čísel, což je spor, protože $\mathbb{O}n$ tvoří vlastní třídu. □

Poznámka. Důkaz je v pořádku, ale protože jsme se v seriálu příliš nevěnovali transfinitní rekurzi na všech ordinálech, předvedeme ještě, jak by bylo možné využití třídy všech ordinálů obejít. Zvolme množinu γ všech typů dobře uspořádaných řetězců v $\mathcal{S}$ (uspořádání stále chápeme tak, že větší prvek znamená nadmnožinu). To je množina ordinálních čísel, která s každým ordinálním číslem obsahuje i všechna menší, tedy je to ordinál. Nyní namísto rekurze na $\mathbb{O}n$ spustíme rekurzi jen na ordinálu γ. Posloupnost S_α nám dá rostoucí bijekci mezi γ a řetězcem v $\mathcal{S}$. Z toho plyne, že typ tohoto řetězce je γ, z čehož plyne spor $\gamma \in \gamma$.

Příklad. Nechť A, B jsou disjunktní množiny. Pak existuje prostá funkce $A \to B$ nebo $B \to A$.

Důkaz. Označme $\mathcal{S}$ množinu všech takových množin S, které obsahují navzájem disjunktní dvojice tvaru $\{a, b\}$, kde $a \in A$, $b \in B$. Ukážeme, že $\mathcal{S}$ splňuje podmínku Zornova lemmatu. Je třeba ověřit, že když uvážíme řetězec $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ a sjednotíme jej $R = \bigcup \mathcal{R}$, budou stále všechny dvojice z R navzájem disjunktní. Pro spor předpokládejme, že v R leží dvě dvojice $d_0 = \{a_0, b_0\}$, $d_1 = \{a_1, b_1\}$, které se protínají. Protože je R sjednocením řetězce $\mathcal{R}$, musí v $\mathcal{R}$ ležet množiny R_0, R_1 takové, že $d_0 \in R_0$, $d_1 \in R_1$. Protože je $\mathcal{R}$ řetězec, nastane $R_0 \subset R_1$ nebo $R_1 \subset R_0$. Větší z těchto množin tak musí obsahovat obě dvojice d_0, d_1, což je spor s tím, že tato větší množina leží v $\mathcal{S}$. Tím je podmínka Zornova lemmatu ověřena.

Proto z Zornova lemmatu najdeme maximální množinu $M \in \mathcal{S}$. Pak musí $\bigcup M$ pokrýt celou A nebo celou B. V opačném případě bychom totiž mohli vzít $a \in A \setminus \bigcup M$, $b \in B \setminus \bigcup M$ a zvětšit M přidáním dvojice $\{a, b\}$. Pokud pokryje celou A, definujeme prostou funkci $f : A \to B$ tak, že každému $a \in A$ přiřadíme to $b \in B$, které je s ním ve dvojici. Pokud nastane druhá možnost, definujeme analogicky $f : B \to A$.

V kapitole o kardinálních číslech dostaneme předešlý výsledek znovu a v silnější podobě. Na následujících cvičeních si můžeš podobné použití Zornova lemmatu samostatně vyzkoušet.

Cvičení 2. Dokaž, že existuje systém množin $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\omega)$ splňující následující dvě podmínky:

(i) Pro každou nekonečnou množinu $X \subset \omega$ existuje $S \in \mathcal{S}$ taková, že $X \cap S$ je nekonečný.
(ii) Průnik každých dvou různých množin z $\mathcal{S}$ je konečný.

[5] Vlastní nadmnožinou myslíme jen to, že má být různá od původní M.

Cvičení 3. Dokaž axiom výběru zpětně z Zornova lemmatu.

Poznámka. Na základě předešlého cvičení se někdy označuje Zornovo lemma (stejně jako následující princip dobrého uspořádání) za ekvivalent axiomu výběru. Zornovo lemma je sice netriviální věta, ale je shodou okolností natolik obecná, že z ní vyplývá nějaký axiom.

Tvrzení. (Princip dobrého uspořádání) *Pro každou množinu X lze najít uspořádání $U \subset X \times X$ takové, aby (X, U) tvořila DUMu.*

Poznámka. V důkaze použijeme stejný argument se třídou všech ordinálních čísel jako v důkaze Zornova lemmatu. Stejně jako předtím lze tento argument obejít – místo $\mathbb{O}n$ by stačila množina typů všech DUM (Y, U'), kde $Y \subset X$ a U' tvoří na Y dobré uspořádání.

Důkaz. Stačí ukázat, že existuje posloupnost x_α (nějaké délky), která obsahuje každý prvek množiny X právě jednou. Uspořádání pak vyčteme z ordinálů skrze bijektivní posloupnost x_α, tedy stanovíme $x_\alpha < x_\beta$ pro $\alpha < \beta$. Zbývá najít takovou posloupnost.

To provedeme tak, že se pokusíme definovat posloupnost délky $\mathbb{O}n$ předpisem: „Vezmi libovolný dosud nepoužitý prvek $x_\alpha \in X$." Formálně to provedeme úplně stejně jako v důkaze minimality ω. Pomocí axiomu výběru sestrojíme funkci $f\colon \mathcal{P}(X) \to X \cup \{\mathrm{STOP}\}$, která pro všechny neprázdné množiny $Y \subset X$ splňuje $f(Y) \in Y$ a $f(\emptyset) = \mathrm{STOP}$, přičemž STOP je prvek neležící v X. Následně rekurzivně definujeme posloupnost $x_\alpha = f(X \setminus \{x_\beta : \beta \in \alpha\})$. Jen se nezastavíme na ω, ale pokračujeme přes všechny ordinály. Pokud jsme někdy dostali $f(\alpha) = \mathrm{STOP}$, stačí zvolit nejmenší takové α a dostáváme po zúžení na α kýženou bijektivní posloupnost.

Zbývá ukázat, proč se nemohlo stát, že bychom každému ordinálnímu číslu přiřadili nějaký prvek X. V takovém případě bychom totiž měli posloupnost délky $\mathbb{O}n$, jejíž prvky jsou různé a všechny leží v jedné množině. To je stejně jako v důkaze Zornova lemmatu ve sporu s tím, že $\mathbb{O}n$ tvoří vlastní třídu. □

Cvičení 4. Dokaž axiom výběru zpětně z principu dobrého uspořádání.

Poznámka. Tímto cvičením máme trojici ekvivalentních podmínek kompletní. Je tedy jedno, jestli si k původním axiomům (0) až (8) přidáme axiom výběru, Zornovo lemma, či princip dobrého uspořádání, výsledek bude stejný. Za axiom ale běžně považujeme axiom výběru ze dvou důvodů. Zaprvé k jeho vysvětlení stačí ty nejzákladnější pojmy a mohli jsme jej formulovat už mezi axiomy, kdy jsme ještě ani neměli formálně definovanou funkci, natožpak řetězec či dobré uspořádání.

Druhým důvodem je, že axiom výběru vypadá jako něco, co by podle intuice vážně mělo platit. Zato princip dobrého uspořádání působí spíše opačným dojmem – už na těch nejednodušších nespočetných množinách, například $\mathbb{R}$ nebo $\mathcal{P}(\omega)$, je dobré uspořádání nepředstavitelné. Drobné vodítko sice dávají nespočetné ordinály $\omega_1, \omega_2, \dots$, je ale zrada, že se ani nedá dokázat (a dokonce se dá dokázat, že se nedá dokázat), jestli má $\mathbb{R}$ mohutnost stejnou jako ω_1, nebo ω_2, nebo dokonce mnohem větší než všechna takhle sestrojitelná ordinální čísla.

A co se týče Zornova lemmatu, jak naznačuje úvodní motto, jedná se o příliš abstraktní nástroj na to, aby se dalo na základě intuice říci, zda by mělo, nebo nemělo platit. V jednoduchých případech působí celkem uvěřitelně, ve složitějších (jako v následujícím cvičení či v příští kapitole) už to zdaleka tak jasné není.

Cvičení 5. Dokaž princip dobrého uspořádání pomocí Zornova lemmatu místo transfinitní rekurze s axiomem výběru.

Ve zbytku seriálu si předvedeme, k čemu všemu se uvedené dva nástroje dají použít.

Netriviální řešení Cauchyho rovnice

Jako příklad použití Zornova lemmatu si předvedeme skutečné řešení následující slavné funkcionální rovnice.

Úloha. (Cauchyho rovnice) Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každou dvojici čísel $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$

Zřejmě tuto rovnici splňují funkce $f(x) = 0$, $f(x) = x$ a obecně $f(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Ale jsou všechny funkce splňující zadanou rovnici takového tvaru?

Dosazováním různých hodnot za x a y můžeš dospět k tomuto výsledku:

Cvičení 6. Ukaž, že každá funkce f, která vyhovuje Cauchyho rovnici, splňuje pro každou dvojici čísel $q \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$ rovnost $f(qx) = qf(x)$.

Pro reálná čísla q už taková rovnost platit nemusí. Při sebechytřejším dosazování za x, y do Cauchyho rovnice se například nepovede odvodit žádný vztah mezi hodnotami $f(1)$ a $f(\sqrt{2})$. Tyto hodnoty jsou totiž na sobě skutečně nezávislé – když zvolíme libovolně hodnoty $f(1)$ a $f(\sqrt{2})$, stále půjde najít příslušné řešení Cauchyho rovnice.

Není ale snadné takové řešení sestrojit. Abychom to dokázali, musíme umět tuto nezávislost formálně uchopit. K tomu použijeme aparát lineární algebry. Lineární algebra pracuje s vektory x_i, s jejich násobky $\alpha_i x_i$ a s jejich konečnými součty, které jsou obecně ve tvaru

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Koeficienty α_i se berou z množiny skalárů, což bude v našem příkladě množina $\mathbb{Q}$. Vektory budou v našem příkladě (poněkud neobvykle) prvky množiny $\mathbb{R}$. Výše uvedený vzorec se (zhruba) nazývá lineární kombinace vektorů. Přesněji chápeme *lineární kombinaci* jako přiřazení koeficientů α_i konečně mnoha reálným číslům (vektorům). Přitom si můžeme představovat, že všem ostatním reálným číslům přidělíme nulový koeficient. *Vyhodnocení* lineární kombinace pak spočteme pomocí vzorce uvedeného výše. Nyní zavedeme přesné definice.

Definice. Mějme množinu $X \subset \mathbb{R}$.

(i) *Lineární kombinace* prvků množiny $X \subset \mathbb{R}$ je zobrazení $k\colon X \to \mathbb{Q}$, které je nenulové jen v konečně mnoha bodech.
(ii) Dvě lineární kombinace k_0, k_1 můžeme sčítat nebo odčítat. Součtem / rozdílem $k = k_0 \pm k_1$, rozumíme lineární kombinaci danou předpisem $k(x) = k_0(x) \pm k_1(x)$. Povšimneme si, že stačí vykonat tuto práci jen v konečně mnoha bodech, ostatní hodnoty zůstávají nulové.
(iii) *Vyhodnocení* lineární kombinace k značíme $k(X)$ a spočteme jej coby součet všech konečně mnoha $k(x) \cdot x$, kde $x \in X$ a $k(x) \neq 0$.
(iv) O lineární kombinaci k řekneme, že je *triviální*, pokud je $k(x) = 0$ pro všechna $x \in X$. Všechny ostatní lineární kombinace nazýváme *netriviální*. Triviální lineární kombinace se vždy vyhodnotí na nulu.
(v) O množině $X \subset \mathbb{R}$ řekneme, že je *lineárně závislá*, pokud se některé dvě různé lineární kombinace jejích prvků vyhodnotí stejně. V opačném případě říkáme, že je X *lineárně nezávislá*.

Příklad. Jednoprvková množina je lineárně závislá právě tehdy, když je její prvek nulový. Dvouprvková množina je lineárně závislá právě tehdy, když je podíl jejích prvků racionální číslo.

Příklad. Množina $X = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{8} - 1\}$ je lineárně závislá, protože lineární kombinace k_0 daná předpisem $k_0(\sqrt{8} - 1) = 1$ (a na zbytku nula) se vyhodnotí stejně jako lineární kombinace daná předpisem $k_1(1) = -1$, $k_1(\sqrt{2}) = 2$ (a jinak nula):

$$k_0(X) = 1 \cdot (\sqrt{8} - 1) = 2\sqrt{2} - 1 = -1 \cdot (1) + 2 \cdot (\sqrt{2}) = k_1(X).$$

Na druhou stranu například nekonečné množiny $\{\sqrt{n} : n \text{ je bezčtvercové}^6 \text{ číslo}\}$ nebo $\{e^n : n \in \omega\}$ lineárně nezávislé jsou.

[6] Bezčtvercová jsou ta přirozená čísla, která nejsou dělitelná žádnou druhou mocninou celého čísla vyšší než 1.

Důkazy, že uvedené dvě množiny jsou lineárně nezávislé, by vyžadovaly nemalé množství další teorie. Pro následující jednodušší verzi stačí vědět, že $\sqrt{n}$ je za předpokladu, že n není druhou mocninou přirozeného čísla, iracionální číslo.

Cvičení 7. Dokaž, že množiny $\{1, \sqrt{2}\}$ a $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ jsou lineárně nezávislé.

Učiníme ještě jedno pozorování: Pokud existují dvě různé lineární kombinace k_0, k_1 se stejným vyhodnocením, jejich odečtením sestrojíme jinou než triviální lineární kombinaci $k = k_0 - k_1$, která se vyhodnotí na nulu. Lineární závislost tedy lze popsat výrokem: „I některá netriviální lineární kombinace se vyhodnotí na nulu."

Příklad. Aplikujeme-li toto pozorování na předchozí příklad lineárně závislé množiny, dostáváme netriviální lineární kombinaci k s předpisem $k(1) = 1, k(\sqrt{2}) = -2, k(\sqrt{8} - 1) = 1$. Ta se vyhodnotí na nulu:

$$1 \cdot 1 - 2 \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot (\sqrt{8} - 1) = 0.$$

Nechť $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ je množina všech lineárně nezávislých množin. Ukážeme, že $\mathcal{S}$ splňuje podmínku Zornova lemmatu: Uvažme řetězec $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ lineárně nezávislých množin. Předpokládejme pro spor, že $\bigcup \mathcal{R}$ je lineárně závislá množina, existuje tedy netriviální lineární kombinace $k\colon \bigcup \mathcal{R} \to \mathbb{Q}$, která se vyhodnotí na nulu. Funkce k smí být nenulová jen v konečně mnoha bodech, označme je $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Tyto prvky leží v množině $\bigcup \mathcal{R}$, proto najdeme množiny $R_0, R_1, \ldots, R_{n-1} \in \mathcal{R}$ tak, aby $x_i \in R_i$. Vezmeme největší z množin R_i, a ta již musí obsahovat všechny $x_0, \ldots, x_{n-1}$. To ale znamená, že ani tato $R_i \in \mathcal{R}$ nebyla lineárně nezávislá. Dostáváme spor, takže podmínka Zornova lemmatu platí.

Nyní použijeme Zornovo lemma a najdeme maximální lineárně nezávislou množinu M. Prozkoumejme její vlastnosti. Ukážeme, že každé reálné číslo lze získat vyhodnocením právě jedné lineární kombinace prvků M. Protože je M lineárně nezávislá, nebude existovat více kombinací, které se vyhodnotí stejně. Zbývá ukázat, že pro každé číslo $t \in \mathbb{R}$ najdeme odpovídající lineární kombinaci. Kdyby t již leželo v M, stačí lineární kombinace, která t přiřadí jedničku a zbytku nuly. Dále předpokládáme $t \notin M$. Protože je M maximální, nemůže být $M \cup \{t\}$ lineárně nezávislá, existuje tedy netriviální lineární kombinace k, která se vyhodnotí na nulu. Musí ale $k(t) \neq 0$, jinak by ani M nebyla lineárně nezávislá. Pak i lineární kombinace $k_1(x) = -k(x)/k(t)$ se vyhodnotí na nulu a $k_1(t) = -1$. Tedy lineární kombinace[7] $k_1 \restriction M$ prvků množiny M se vyhodnotí na t.

Množině M s vlastností „každé reálné číslo lze reprezentovat právě jedním způsobem jako vyhodnocení lineární kombinace prvků množiny M" budeme říkat *báze.* Zatím jsme pomocí Zornova lemmatu ukázali, že lze najít nějakou bázi.

Cvičení 8.

(i) Ukaž, že žádná báze neobsahuje nulu.
(ii) Ukaž, že každá báze může obsahovat nejvýše jedno racionální číslo.
(iii) Ukaž, že existuje báze, která neobsahuje žádné racionální číslo.

Cvičení 9.

(i) Ukaž, že báze musí mít alespoň dva prvky.
(ii) Ukaž, že báze musí být nespočetná.

Konečně se dostáváme k řešení Cauchyho rovnice.

Tvrzení. *Mějme bázi M a funkci $f_0\colon M \to \mathbb{R}$. Pak f_0 lze právě jedním způsobem rozšířit na funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, aby f splňovala Cauchyho rovnici.*

Důkaz. Pro lineární kombinaci k prvků M označme jako $k \cdot f_0$ součet všech $k(x) f_0(x)$, kde $x \in M$ a $k(x) \neq 0$. To si lze představovat jako „vyhodnocení k až poté, co X upravíme funkcí f_0". Dále

[7] Značením $k_1 \restriction M$ rozumíme zúžení funkce k_1 na množinu M. V tomto případě tedy jen zahodíme hodnotu -1 v bodě t.

pro $x \in \mathbb{R}$ označme k_x tu jedinou lineární kombinaci, která splňuje $k_x(M) = x$. Ukážeme, že jednoznačné rozšíření funkce f je

$$f(x) = k_x \cdot f_0. \tag{$\star$}$$

Rovnost ($\star$) musí platit pro $x \in M$ – pak je totiž k_x definována předpisem $k_x(x) = 1$ a na zbytku nula, tedy $k_x \cdot f_0 = f_0(x)$. Protože každá funkce splňující Cauchyho rovnici musí splňovat $f(qx) = qf(x)$ pro $q \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}$, musí rovnost ($\star$) platit i pro $x = mq$, kde $m \in M, q \in \mathbb{Q}$. Nakonec díky vztahu $f(x+y) = f(x) + f(y)$ musí být rovnice ($\star$) splněna pro vyhodnocení všech lineárních kombinací prvků M, tedy pro všechna reálná čísla.

Zbývá ověřit, že funkce daná předpisem ($\star$) splňuje Cauchyho rovnici. K tomu si uvědomíme, že lineární kombinace se dají roznásobovat a vytýkat. Uvážíme-li $x, y \in \mathbb{R}$, platí $k_x(M) = x$ a $k_y(M) = y$, a tak i $(k_x + k_y)(M) = x + y$. Z toho plyne $k_{x+y} = (k_x + k_y)$. Obdobně také platí $(k_x + k_y) \cdot f_0 = k_x \cdot f_0 + k_y \cdot f_0$. Dohromady dostáváme

$$f(x+y) = k_{x+y} \cdot f_0 = (k_x + k_y) \cdot f_0 = k_x \cdot f_0 + k_y \cdot f_0 = f(x) + f(y). \qquad \square$$

Právě dokázané tvrzení odpovídá na otázku, jak vypadají všechna řešení Cauchyho rovnice. Mějme pevně zvolenou bázi M. Pak každé řešení Cauchyho rovnice je jednoznačně určeno svými hodnotami na M, přičemž tyto hodnoty lze volit libovolně. S tímto pohledem již není těžké sestrojit jiné řešení než $f(x) = cx$, stačí, aby hodnoty v prvcích báze nesplňovaly tento předpis.

Předvedeme ještě trochu konkrétnější příklad takového řešení Cauchyho rovnice. Při použití Zornova lemmatu jsme mohli začít s libovolnou lineárně nezávislou množinou, tedy například $\{1, \sqrt{2}\}$. Získáme tedy bázi obsahující tato dvě čísla. Pak definujeme $f_0(1) = 1$ a $f_0(x) = 0$ pro $x \in M \setminus \{1\}$. Když takovou f_0 rozšíříme na řešení f, bude platit $f(1) = 1$ a $f(\sqrt{2}) = 0$, tedy určitě toto řešení není tvaru $f(x) = cx$. Můžeme se ještě zeptat, jakou hodnotu má $f(\sqrt{3})$. Sice víme, že všechny ostatní prvky báze mají nulovou hodnotu, ale nevíme (dosud jsme si to nezvolili, protože nám to bylo jedno), jestli $\sqrt{3}$ leží v bázi. Pokud ano, tak $f(\sqrt{3}) = 0$. Pokud ale místo $\sqrt{3}$ leží v bázi například číslo $\sqrt{3} - 1$, máme hodnotu $f(\sqrt{3}) = f(1) + f(\sqrt{3} - 1) = 1 + 0 = 1$.

Vidíme, že při konstrukci netriviálního řešení Cauchyho rovnice máme ohromnou volnost, co si lze zvolit. Rozhodně se nedá říct, že by bylo těžké najít netriviální řešení, protože by byla příliš vzácná. Spíše naopak – je jich příliš mnoho a volnost je příliš velká na to, aby se do nich dalo systematicky proniknout. A to jsou přesně ty chvíle, kdy pomáhá axiom výběru.

Cvičení 10.

(i) Najdi alespoň tři řešení Cauchyho rovnice splňující navíc $f(f(x)) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
(ii) Najdi nějaké řešení Cauchyho rovnice splňující navíc $f(f(1)) = -1$.
(iii) Ukaž, že bázi lze popárovat, tedy rozložit na množinu disjunktních dvojic.
(iv) Najdi nějaké řešení Cauchyho rovnice splňující navíc $f(f(x)) = -x$ pro všechna reálná x.
(v) Najdi nějaké řešení Cauchyho rovnice, které je prosté, ale není bijekce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Kardinální čísla – mohutnosti množin

Při definici ordinálního čísla jsme z obecné DUMy sestrojili množinu stejného typu, která nezávisela na nosné množině původní DUMy. Podobně bychom chtěli popsat nějaké množiny, které budou reprezentovat mohutnosti obecných množin. Jenže jaké si vymyslet „obecné prvky“ množiny?

Snadno se obecné prvky popsat nedají, a proto se na mohutnosti jde malinko oklikou – přes ordinální čísla. Díky principu dobrého uspořádání dokážeme na jakékoli množině X najít dobré uspořádání U. To znamená, že X má stejnou mohutnost jako $\mathrm{typ}(X, U)$. Jenže různá ordinální čísla mohou mít stejnou mohutnost – například $|\omega| = |\omega \cdot \omega + 5|$. Vybereme proto jen některá ordinální čísla.

Definice. *Kardinální číslo* (stručně kardinál) je nejmenší ordinální číslo své mohutnosti. Jde tedy o takové ordinální číslo α, že pro žádné $\beta < \alpha$ neplatí $|\beta| = |\alpha|$.

Kardinální číslo vypadá jako nový pojem, ale ve skutečnosti jsi „všechna“ kardinální čísla už potkal(a) v minulém díle. Za prvé jde o přirozená čísla, která udávají mohutnosti konečných množin, a za druhé jde o ordinály ω_α pro $\alpha \in \mathbb{O}n$, což jsou všechny nekonečné kardinály. Dokážeme si jejich základní vlastnosti.

Tvrzení. *Nechť α je kardinál a $\beta < \alpha$ je ordinál. Pak $|\beta| < |\alpha|$.*

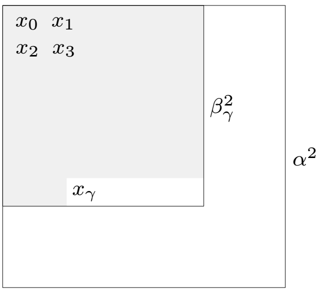
Důkaz. Na základě definice porovnávání mohutností potřebujeme ověřit dvě podmínky. Jednak, že $|\beta| \leq |\alpha|$, a za druhé, že neexistuje prosté zobrazení $\alpha \to \beta$. První část snadno plyne z toho, že $\beta \subset \alpha$. Ve druhé pro spor předpokládejme prostou funkci $f\colon \alpha \to \beta$. Množina $X = \{f(x) : x \in \alpha\}$ je pak podmnožinou ordinálu β, takže $\operatorname{typ}(X, \in) \leq \beta < \alpha$. Jenže $|\operatorname{typ}(X, \in)| = |X| = |\alpha|$, což je ve sporu s tím, že α je nejmenší ordinální číslo své mohutnosti. □

Tvrzení. *Pro každé nekonečné ordinální číslo α platí $|\alpha| = |\alpha \times \alpha|$.*

Důkaz. Množinu $X \times X$ budeme stručně značit X^2. Tvrzení dokážeme indukcí přes nekonečné ordinální číslo α. Pokud není α kardinální číslo, tak existuje menší ordinál $\beta < \alpha$ stejné mohutnosti, pro který platí $|\beta| = |\beta^2|$. Proto i $|\alpha| = |\alpha^2|$.

Když α je kardinálem, ukážeme napřed $|\beta^2| < |\alpha|$ pro všechna $\beta < \alpha$. Pro konečná β je tomu tak proto, že i β^2 je konečná množina. Je-li β nekonečné ordinální číslo, plyne z indukčního předpokladu $|\beta^2| = |\beta|$ a z předchozího tvrzení $|\beta| < |\alpha|$, celkem $|\beta^2| < |\alpha|$. Ještě si uvědomíme, že kvůli tomu musí být α limitní ordinál – pro $\beta < \alpha$ a větší než jedna totiž $|\beta^2| \geq |\beta + 1|$, a tak $\beta + 1 < \alpha$.

Nyní pro kardinál α dokážeme $|\alpha^2| = |\alpha|$. Postupně budeme vybírat z množiny α^2 vzájemně různé prvky a sestavíme z nich posloupnost délky α. Budeme ji značit x_γ a vybírání bude založeno na následujícím předpisu. Uvažme $\gamma \in \alpha$. Protože $|\gamma| < |\alpha| \leq |\alpha^2|$, nejsou dosud v posloupnosti všechny prvky α^2. Protože je navíc α limitní, najdeme $\beta_\gamma < \alpha$ takové, že v posloupnosti dosud chybí některý prvek množiny β_γ^2, přičemž volíme β_γ nejmenší možné. Prvek x_γ pak volíme z množiny β_γ^2.



Takto popsaná posloupnost musí projít všechny prvky α^2. Kdyby ne, neprošla by ani všechny prvky součinu β^2 pro nějaké $\beta < \alpha$. Tím bychom dostali prosté zobrazení $\alpha \to \beta \times \beta$, které nemůže existovat. Posloupnost x_γ tak tvoří bijekci $\alpha \to \alpha^2$. □

Poznámka. V důkaze jsme nepopsali přesně, v jakém pořadí prvky α^2 bereme, takže se může zdát, že jsme potřebovali použít axiom výběru. V tomto případě však není nutný, protože na α^2 máme dobré uspořádání, které může s vybíráním dalšího prvku pomoci.

Definice. Nechť X je množina. Pak díky principu dobrého uspořádání existuje alespoň jedno ordinální číslo stejné mohutnosti jako X. Protože je třída ordinálních čísel dobře uspořádaná, najdeme mezi nimi to nejmenší – jediné kardinální číslo této mohutnosti. Toto kardinální číslo nazýváme *mohutností* X a značíme $|X|$. Kardinální číslo $|\mathcal{P}(\omega)|$ budeme nazývat *kontinuum* a značit $\mathfrak{c}$. Tento kardinál je významný i proto, že udává mohutnost množiny $\mathbb{R}$.

Poznámka. Definice výrazů $|X| < |Y|$ a $|X| \leq |Y|$ nyní vypadá na první pohled nejednoznačně – jednak se může jednat o dosud používané porovnávání mohutností zavedené v prvním díle, současně může jít o porovnání odpovídajících kardinálů coby ordinálních čísel. První tvrzení v této kapitole ale přímo říká, že v případě, když X, Y jsou kardinály, je porovnávání přes ordinály i přes mohutnosti totožné. Následně lze tuto skutečnost rozšířit na obecné množiny, protože množiny X a $|X|$ mají stejnou mohutnost (ve smyslu původní definice).

Když jsme převedli porovnávání mohutností na porovnávání ordinálů, snadno již pro libovolné množiny X, Y dostáváme:

(i) Pokud $|X| \leq |Y|$ a $|Y| \leq |X|$, tak $|X| = |Y|$.
(ii) Platí $|X| \leq |Y|$ nebo $|Y| \leq |X|$.
(iii) Jsou-li X, Y nekonečné množiny, platí $|X \times X| = |X|$. Obecněji $|X \times Y| = \max(|X|, |Y|)$.

Díky tomu skoro všechny „normální" geometrické objekty – křivka, obdélník, sféra, apod. – obsahují kontinuum bodů. Každý z nich je totiž podmnožinou $\mathbb{R}^2$ resp. $\mathbb{R}^3$, takže má mohutnost nejvýše kontinuum. Současně do takového objektu lze zobrazit prostou funkcí interval, takže má mohutnost alespoň kontinuum.

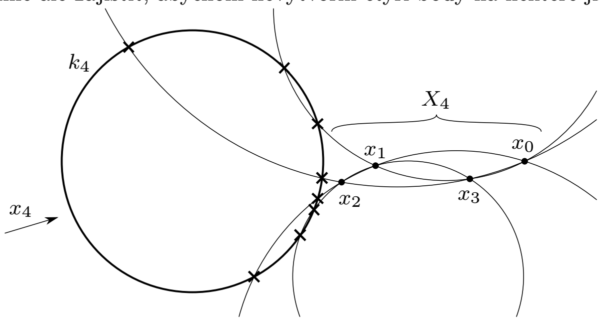
Pomocí kardinálů můžeme provést transfinitní rekurzi silnějším způsobem než rekurzí na všech ordinálních číslech. Pokud projdeme prvky množiny X transfinitní rekurzí na kardinálu $|X|$, máme v průběhu rekurze navíc jistotu, že dosud prošlých kroků je v každém okamžiku ostře méně než $|X|$.

Příklad. Existuje množina bodů v rovině[8], kterou každá kružnice protne právě ve třech bodech.

Důkaz. Každá kružnice je určená svým středem (prvek množiny $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) a poloměrem (prvek $\mathbb{R}^+$). Počet všech kružnic tedy je $|\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Očíslujeme si všechny kružnice prvky kontinua – to znamená, že sestrojíme posloupnost k_α délky $\mathfrak{c}$, která obsahuje všechny kružnice. Navíc to provedeme tak, aby každá kružnice byla v této posloupnosti právě třikrát (to lze, protože $|3 \times \mathfrak{c}| = \mathfrak{c}$).

Kýženou množinu sestrojíme postupně transfinitní rekurzí coby posloupnost bodů x_α. Tato posloupnost bude délky $\mathfrak{c}$ a body volíme tak, aby vždy $x_\alpha \in k_\alpha$. Rekurzivní předpis probíhá následovně.

Chceme popsat x_α. Označme množinu dosud vybraných bodů $X_\alpha = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ a její průnik s kružnicí jako $P_\alpha = X_\alpha \cap k_\alpha$. Pokud již $|P_\alpha| = 3$, je kružnice k_α uspokojená; nechceme přidat nový bod, a volíme tedy $k_\alpha \in P_\alpha$. V opačném případě máme $|P_\alpha| < 3$, takže najdeme nový bod $x_\alpha \in k_\alpha \setminus P_\alpha$. Musíme ale zajistit, abychom nevytvořili čtyři body na některé jiné kružnici.



Jak je to možné zajistit? Jediné, čemu je třeba se vyhnout, je položení bodu x_α na kružnici, která již prochází třemi body z X_α. Množina X_α má mohutnost maximálně $|\alpha| < \mathfrak{c}$. I množina všech trojic bodů z X_α má tedy mohutnost menší než kontinuum. Každé takové trojici lze opsat nanejvýš jednu kružnici, takže všech kružnic, které prochází třemi body z X_α, je méně než kontinuum. Každá taková kružnice protne k_α nanejvýš ve dvou bodech, takže zakázaných bodů je méně než kontinuum. Kružnice k_α (i po odebrání konečného P_α) obsahuje kontinuum bodů, takže zbývá bod, který můžeme zvolit.

[8]Rovinu formálně považujeme za množinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, kde bod je určený svými souřadnicemi.

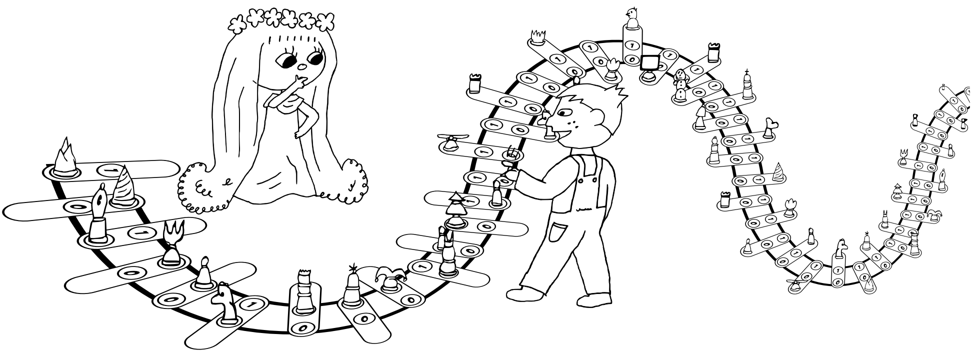
Takto zajistíme, že na každé kružnici budou ve finální množině $X = \{x_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ nejvýše tři body. Současně na každé budou alespoň tři body, protože jsme v průběhu rekurze každou kružnici potkali třikrát a vždy, když na ní ještě nebyly tři body, jsme na ni bod přidali. Množina X tak každou kružnici protíná právě ve třech bodech. □

Skutečnost, že jsme v transfinitní rekurzi probíhali kardinál a ne něco většího, byla klíčová. Při volbě kružnic a bodů se totiž opíráme o axiom výběru, a tak nemáme příliš kontrolu nad tím, které body bereme. Kdybychom nepoužili kardinál, mohlo by se během rekurze náhodou stát, že jsou v některém okamžiku vybrány přesně všechny body z jedné přímky a ještě jeden mimo ni. Pak sice na každé kružnici leží nejvýše tři body, ale nelze přidat žádný další bod tak, aby tato vlastnost zůstala splněna. Přitom přímka s bodem zjevně není řešením úlohy. Tím, že jsme použili kardinál $\mathfrak{c}$, jsme takové situaci zabránili – v průběhu se nikdy nemohlo stát, že bychom měli vybrány všechny body některé přímky, protože je v každém okamžiku vybráno méně než kontinuum bodů.

Pro lepší pochopení, co se v předchozím důkaze dělo, si můžeš představit pouze spočetnou verzi tohoto tvrzení – „existuje množina racionálních bodů $S \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, která má tříprvkový průnik s každou kružnicí s racionálním středem a poloměrem“ – a projít důkaz znovu. V takové verzi bychom použili namísto $\mathfrak{c}$ jen ω. „Méně než kontinuum“ by pak znamenalo jednoduše „konečně mnoho“ a přiřazování bodů x_n by probíhalo obyčejnou (netransfinitní) rekurzí. Na druhou stranu je pak v důkaze navíc potřeba znalost faktu, že každá kružnice s racionálním středem i poloměrem obsahuje nekonečně mnoho racionálních bodů.

Hra bez neprohrávající strategie

V této kapitole předvedeme další kuriózní objekt sestrojitelný pomocí transfinitní rekurze na kardinálu: Hru dvou hráčů, kteří se střídají v tazích, oba mají úplnou informaci, a přitom ani jeden z nich nemá neprohrávající strategii. Možná ses setkal(a) s tvrzením, že „v každé konečné hře dvou hráčů s úplnou informací má alespoň jeden z nich neprohrávající strategii“. Pro nekonečné hry to již platit nemusí. Sestrojit takovou hru není snadné, ale s dosavadní teorií již toho příliš nechybí.



Ve hře budou hrát dva hráči – Amálka (A) a Budulínek (B). Oba postupně plní posloupnost $a_0, a_1, \ldots \in \{0, 1\}$ délky ω. Amálka rozhodne hodnotu a_0, Budulínek rozhodne hodnotu a_1, Amálka hodnotu a_2 atd. Po sestrojení této posloupnosti se na základě pravidel (která popíšeme později) určí, kdo vyhrál.

Závěrečným stavem hry tedy rozumíme posloupnost nul a jedniček délky ω. Nechť Z je množina všech závěrečných stavů hry. Pravidly pak rozumíme zobrazení $p\colon Z \to \{A, B\}$. Pravidla se podívají na závěrečný stav hry $z \in Z$ a odpovědí, zda vyhrála Amálka ($p(z) = A$), či Budulínek ($p(z) = B$).

Protože tato hra nikdy nedopadne remízou, znamená neprohrávající strategie totéž co vítězná strategie. Budeme proto raději mluvit o vítězné strategii. Abychom mohli najít pravidla, pro něž nemá ani jeden z hráčů vítěznou strategii, musíme ještě přesně popsat, co to vůbec je strategie.

Definice. *Částečným stavem hry pro Amálku* nazveme posloupnost nul a jedniček sudé (konečné) délky. *Strategií pro Amálku* rozumíme zobrazení $C_A \to \{0,1\}$, kde C_A je množina všech částečných stavů hry pro Amálku. Na základě stavu hry tedy strategie vždy řekne, zda má Amálka napsat nulu, nebo jedničku. *Vítězná* strategie pro Amálku je taková, že hraje-li Amálka přesně podle této strategie, vyhraje, ať hraje Budulínek jakkoli. Analogicky definujeme množinu C_B částečných stavů hry pro Budulínka jako množinu posloupností nul a jedniček liché délky, a vítěznou strategii pro Budulínka.

Tvrzení. *Existují pravidla, se kterými ani jeden z hráčů nemá vítěznou strategii.*

Důkaz. Všech částečných stavů hry je nekonečně, ale jen spočetně mnoho. Strategie tak jsou zobrazení ze spočetné množiny do dvouprvkové množiny. Proto když označíme S množinu všech strategií (pro oba hráče), máme $|S| = \mathfrak{c}$. Očíslujeme tedy množinu $S = \{s_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$. Rekurzivně definujeme posloupnost délky kontinua $p_\alpha = (z_\alpha, h_\alpha)$, kde z_α je závěrečný stav hry a $h_\alpha \in \{A, B\}$. Přitom všechna z_α budou navzájem různá a hráč h_α dokáže dosáhnout závěrečného stavu z_α za předpokladu, že druhý hráč hraje podle strategie s_α. Z toho plyne, že zvolíme-li pravidla $P \supset \{p_\alpha\}$, nebude strategie s_α vítězná.

Nutně tak je h_α ten hráč, kterému nepatří strategie s_α. V hledání z_α předpokládejme, že s_α patří Amálce, a tedy $h_\alpha = B$. Opačný případ se ošetří analogicky.

Když Amálka hraje podle strategie s_α, může stále Budulínek libovolně rozhodnout, jaká čísla dá na liché pozice. Hra tedy může v závislosti na hře Budulínka dopadnout kontinuum mnoha způsoby. Dosud jsme ale přiřadili vítěze jen k $|\alpha| < \mathfrak{c}$ závěrečným stavům z_β, kde $\beta < \alpha$. Mezi závěrečnými stavy, kterých může Budulínek dosáhnout, když Amálka hraje podle s_α, tak stále bude nějaký nový. Ten použijeme coby z_α.

Tímto postupem zajistíme, že na základě zobrazení $\{p_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ nebude žádná strategie vítězná. Může se ale stát, že některým závěrečným stavům dosud není přiřazený žádný hráč. Pro zkompletování pravidel můžeme takové stavy přisoudit třeba Amálce, a máme požadovanou hru. $\square$

Čokoládová výzva

Čokoládovou výzvu z předchozího dílu dosud nikdo nevyřešil. Nezveřejníme tak prozatím její řešení – stále platí: kdo první pošle správné řešení na mail `mirek zavináč olsak tečka net`, dostane velkou čokoládu, případně druhý polovinu, třetí čtvrtinu atd. O nezávislou posloupnost malých čokolád stále mohou soutěžit organizátoři.

A krom minulé čokoládové výzvy přichází poslední, třetí čokoládová výzva. Její pravidla jsou stejná jako v případě té minulé – první, kdo pošle řešení následující úlohy na mail `mirek zavináč olsak tečka net`, dostane velkou čokoládu, druhý půlku, třetí čtvrtku atd.

Poslední čokoládová úloha zobecňuje dobrodružství nekonečně mnoha prasátek na obecnou DUMu. Věříme, že bude schůdnější než ta předchozí ;-).

Úloha. Množina (blíže neurčené velikosti) prasátek nastoupí na všechny prvky předem určené DUMy. Každé ví, na kterém prvku stojí, a vidí jen prasátka na vyšších prvcích. Dále každé dostane na hlavu černý nebo bílý klobouk, a jen na základě klobouků, které vidí před sebou, si tipne barvu svého klobouku. Ukaž, že ať je tato DUM jakákoli, existuje strategie, se kterou se při jakémkoli rozložení klobouků splete jen konečně mnoho prasátek.

Rozloučení

Nekonečno je fascinující, ale ve skutečném světě jej příliš nepotkáš. Z tohoto důvodu končí i náš nekonečný seriál. Doufáme, že se Ti mezi nekonečny líbilo a že se k nim budeš myšlenkami rád(a) vracet. Na druhou stranu doporučujeme se z nich nezbláznit. Přeci jen je pro teorií množin nedotčené lidi nespočetný ordinál mnohem větší nesmysl než růžový vodník a nemá cenu je přesvědčovat, že nespočetné ordinály opravdu existují… Měj se nekonečně!

Mirek Olšák

Seznam symbolů a pojmů

Na této stránce jsou stručně uvedeny všechny důležité pojmy třetího dílu seriálu. U každého pojmu z tohoto dílu je uvedeno, na které stránce byl definován.

str 6. *Posloupnost* $x_0, x_1, \ldots$ délky α
str 6. *Víceznačná funkce*, *vybrání* funkce z víceznačné funkce
str 8. *Řetězec* množin $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ – každé dva prvky $A, B \in \mathcal{R}$ musí splňovat $A \subset B$ nebo $B \subset A$
str 8. Zornovo lemma – když v $\mathcal{S}$ leží sjednocení každého řetězce, tak v $\mathcal{S}$ je maximální prvek
str 9. Princip dobrého uspořádání – každou množinu lze dobře uspořádat
str 10. *Lineární kombinace* prvků množiny $X \subset \mathbb{R}$
str 10. *Vyhodnocení* $k(X)$ lineární kombinace k prvků množiny X – součet všech $k(x) \cdot x$
str 10. *Triviální* lineární kombinace – všude nulová
str 10. *Lineárně nezávislá množina* – různé lineární kombinace dávají různá vyhodnocení
str 11. *Báze* – maximální lineárně nezávislá množina
str 12. *Kardinální číslo* – nejmenší ordinální číslo své mohutnosti
str 13. $|X|$ neboli *mohutnost* X – kardinální číslo, které má stejnou mohutnost jako X
str 13. $\mathfrak{c}$ neboli *kontinuum* – mohutnost množiny reálných čísel

Důležité pojmy z předchozích dílů: zobrazení (funkce), spočetno, nespočetno, porovnávání mohutností $|A| \leq |B|$, $|A| = |B|$, množina, třída, potence $\mathcal{P}(A)$, kartézský součin $A \times B$, ordinální číslo, množina přirozených čísel ω, třída ordinálních čísel $\mathbb{O}n$, transfinitní rekurze.

Návody

1. $\tilde{g} = \{(b, a) : f(a) = b\}$.

2. Pomocí Zornova lemmatu najdi maximální systém množin splňující bod (ii). Z maximality vyplyne bod (i).

3. Za $\mathcal{S}$ vol množinu takových podmnožin $\bigcup a$, které protínají každý prvek a jen v jednom bodě.

4. Uvaž dobré uspořádání na $\bigcup a$ a z něj odvoď předpis pro výběr reprezentantů.

5. Za $\mathcal{S}$ zvol množinu všech prostých zobrazení $\alpha \to X$, kde α je ordinální číslo. Jedná se o množinu (a ne o vlastní třídu), protože α je vždy typem nějaké podmnožiny množiny X s přidaným uspořádáním.

6. Postupně ukaž $f(0) = 0$, $f(-x) = -f(x)$, $f(nx) = nf(x)$ pro každé x reálné a n celé. Nakonec zjednoduš hodnotu $d \cdot f(qx)$, kde $q = \frac{n}{d}$ a n, d jsou nenulová celá čísla.

7. $\{1, \sqrt{2}\}$: Nechť $p = q\sqrt{2}$ a $q \neq 0$, pak $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$: Když $p + q\sqrt{2} = r\sqrt{3}$, tak umocněním dostaneš $2pq\sqrt{2} = 3r^2 - p^2 - 2q^2$. Protože je $\sqrt{2}$ iracionální, musí být $pq = 0$. Zbytek se rozebere podobně jako v předchozím případě.

8. (i) Kdyby M obsahovala nulu, vyhodnotila by se na nulu netriviální lineární kombinace daná předpisem $k(0) = 1$, $k(x) = 0$ pro $x \neq 0$. M by tak nebyla lineárně nezávislá. (ii) Kdyby M obsahovala racionální čísla p, q, měla by nulové vyhodnocení netriviální lineární kmbinace daná předpisem $k(p) = q$, $k(q) = -p$, $k(x) = 0$ pro $x \neq p, q$. (iii) Stačí například doplnit na bázi lineárně nezávislou množinu $\{1 + \sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. Obecně můžeš libovolnou bázi s racionálním číslem q upravit na bázi bez racionálního čísla – vezmi ještě jeden její iracionální prvek x a nahraď q za $q + x$.

9. (i) Kdyby obsahovala jen jeden prvek $x \neq 0$, nebylo by možné vyjádřit $x\sqrt{2}$ jako racionální násobek x. (ii) Kdyby byla báze M spočetná, tak by i počet lineárních kombinací byl spočetný – ze stejného důvodu jako počet polynomů s racionálními koeficienty v kapitole Porovnávání nekonečen prvního dílu seriálu.

10. (i) Klasická řešení jsou $f(x) = x$, $f(x) = -x$. Dále se na takové řešení doplní například tyto dvě funkce definované na bázi: $f_0(x) = x$ s výjimkou $f_0(1) = -1$ nebo $f_1(x) = x$ s výjimkami $f_1(1) = \sqrt{2}$ a $f_1(\sqrt{2}) = 1$. (ii) $f_0(1) = \sqrt{2}$, $f_0(\sqrt{2}) = -1$. (iii) Z Zornova lemmatu existuje maximální množina P disjunktních párů z M. To znamená, že buď $\bigcup P = M$, nebo v $\bigcup P$ chybí jeden prvek. Úpravou spočetně mnoha dvojic se začlení i tento poslední zbývající prvek. Alternativně lze využít princip dobrého uspořádání a popsat párování na DUMě. (iv) Z párů v (iii) vytvoř uspořádané dvojice a definuj na nich f_0 jako v bodě (ii). (v) Stačí najít pro bázi M libovolné zobrazení $M \to M$, které je prosté, ale není na.