

Do nekonečna a ještě dál.....

Nikdo nás nebude moci vyhnat z ráje, který pro nás vytvořil Cantor. (David Hilbert)

Díl první – Svět nekonečen

Pojmem nekonečna se zabývali filosofové a matematici již od dob, kdy rozdíl mezi filosofií a matematikou byl pramalý. My si zde předvedeme až výsledky matematiků 19. a 20. století počínaje Georgem Cantorem. Ti na své cestě vyzkoušeli řadu slepých uliček a nejednoho z nich to stálo duševní zdraví. Výsledkem však je krásná teorie, nyní všeobecně uznávaná za základ takřka veškeré vysokoškolské matematiky.

Název celého seriálu *Do nekonečna a ještě dál* je mimo jiné odkazem na sérii animovaných filmů Příběh hraček. Jedná se o slavnou hlášku hračky Buzze Raketáka – superastronauta, který létá z planety na planetu a zachraňuje svět. Dítě, které si z Buzzem hraje, je nadšené z toho, že s ním létá „do nekonečna a ještě dál“, a to ani nemá ponětí, o čem vlastně mluví. Cílem seriálu, který taktéž bude místy pojat pohádkově či hravě, je tuto otázku objasnit a přitom neubrat nekonečnu nic z jeho kouzla.

V odborných publikacích nese téma tohoto seriálu suché označení *Teorie množin*. Důvod, proč tomu tak je, bude patrný zejména z druhého dílu *Pevné základy*. Nicméně ani vysokoškoláci neztrácejí hravost a ohromení z nekonečna, což reflektuje fakt, že běžným slangovým označením pro teorii množin je zkratka TeMno. :-)

První nástrahy nekonečna

Než se pustíme do nekonečna, dohodneme se na jednom základním značení: Množinu přirozených čísel značíme ω a **nulu budeme považovat za přirozené číslo**.¹ Toto značení je v teorii množin obvyklé a důvody jeho používání budou více patrné z druhého dílu seriálu. Mimo jiné se nám bude hodit, aby šlo říci „Konečné množiny jsou právě ty množiny, jejichž velikost vyjadřuje nějaké přirozené číslo.“ a nevyřadit tím z konečných množin prázdnou množinu. Nicméně pozor, tato úmluva platí pouze zde a v úlohách patřících k tomuto seriálu, v jiných středoškolských úlohách se nula za přirozené číslo běžně nepovažuje.

Zatímco nula je přirozeným číslem, nekonečno žádným číslem není. Nekonečno ve skutečnosti ani není nějaký matematický objekt, je to jen vlastnost. Přímka je nekonečná, posloupnost může být nekonečná, množina může být nekonečná. Jedná se o opak konečnosti, kde konečnost přesně znamená, že se velikost dané množiny nebo posloupnosti dá vyjádřit přirozeným číslem. Nekonečná množina pak je taková, jejíž velikost se žádným přirozeným číslem vyjádřit nedá, je na to „příliš velká“. Existují i další důvody, proč se nekonečno nepovažuje za přirozené číslo – chová se totiž úplně jinak.

¹Řecké písmenko ω je malá omega, zatímco velká omega vypadá takto: Ω .

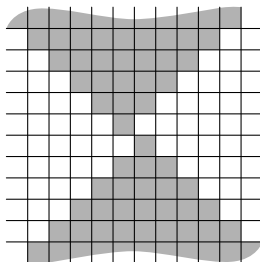
Příklad. Kdykoli si vezmeme konečnou množinu reálných čísel, najdeme v ní největší i nejmenší prvek. U nekonečné množiny se to stát může, ale nemusí. Například uzavřený interval $\langle 0, 1 \rangle$ má nejmenší prvek 0 a největší prvek 1, zatímco otevřený interval $(0, 1)$ nemá ani nejmenší, ani největší prvek.

Další příklad ukazuje, že když něco může být libovolně velké, ještě to neznamená, že to může být nekonečné.

Příklad. Existuje libovolně dlouhá klesající posloupnost přirozených čísel. Pokud si usmyslíme, že chceme posloupnost délky n , sestojíme ji coby $n, (n-1), \dots, 2, 1$. Naopak nekonečná klesající posloupnost $a_0, a_1, a_2, \dots$ přirozených čísel existovat nemůže.

Dále tu máme malý paradox.

Příklad. Nekonečnou čtverečkovou síť lze celou obarvit dvěma barvami, šedou a bílou, tak, aby každý řádek obsahoval jen konečně mnoho šedých políček a každý sloupec jen konečně bílých políček. Lze to udělat třeba takto:



Znázornění obarvené mřížky podle zadání

Na druhou stranu, kdyby byly řádky omezeny konkrétním přirozeným číslem, například „v řádku může být nanejvýš 2015 šedých políček“, už by takové obarvení nešlo najít. Proč? Představme si obarvenou mřížku a z ní vyjmeme 2016 sloupečků. Pak by v každém řádku muselo být alespoň jedno bílé políčko. To je dohromady nekonečně mnoho bílých políček v konečně mnoha sloupečcích, takže by v některém sloupečku muselo být nekonečně mnoho bílých políček.

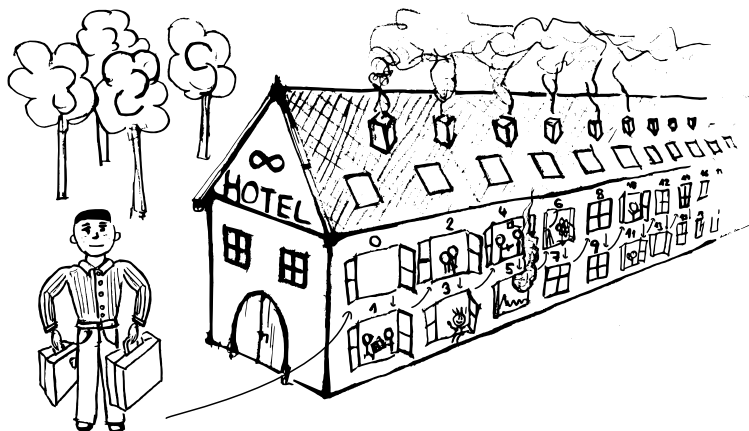
A jako poslední příklad, jak se nekonečno chová odlišně od konečna, uvedeme tradiční (leč převyprávěnou) pohádku, která v úvodu do nekonečna nesmí chybět. Dokonce můžeš najít její anglickou video verzi na stránkách www.hotel-infinity.com.

Pohádka o Hilbertově hotelu

Byl nebyl jeden turista. Ten cestoval přes devatero hor a devatero řek, až přišel do jednoho městečka. Doufal, že by si po náročné cestě mohl odpočinout v některém z tamních ubytovacích zařízení. Přišel k jednopokojovému apartmánu. „Mohl bych se tu ubytovat?“ zeptal se. „Kdepak,“ odvětil majitel, „teď tu někoho máme.“ Turista tedy šel dál, až přišel k hotelu s tisícem pokojů. „Panečku, to je velký hotel,“ pomyslí si, „tady pro mne určitě budou mít místo.“ Záhy však byl recepcí zklamán: „Bohužel, všechny pokoje jsou obsazené.“ „A nešlo by třeba ty hosty nějak přeuspořádat? Víte, cestoval jsem přes ...“ „Ani omylem,“ odvětila recepční, „jak chcete nacpat 1001 hostů do 1000 pokojů? Copak neznáte Dirichletův princip?“

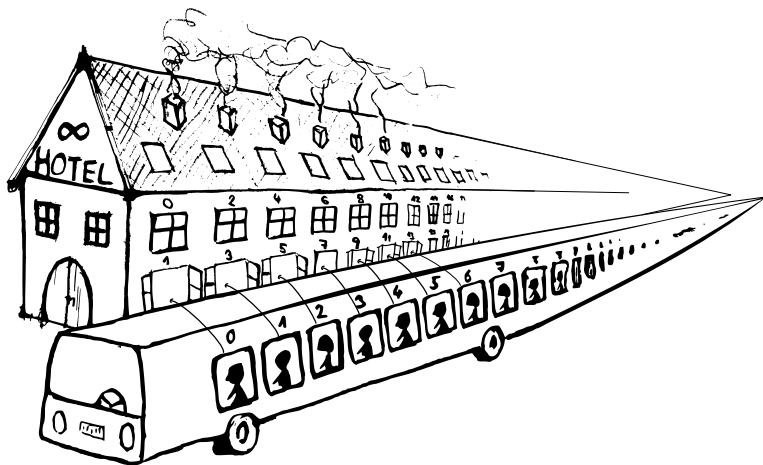


A tak šel náš cestovatel dál, až přišel k dalšímu hotelu, k Hilbertovu hotelu. Hilbertův hotel není obyčejný hotel. Je to kouzelný hotel, má totiž nekonečně mnoho pokojů. V tomto hotelu jsou pokoje číslovány přirozenými čísly, a pod každým číslem se skrývá některý pokoj. „Tady nemáte všechny pokoje obsazené, že ne?“ ujišťoval se turista při pohledu na to neskutečné množství pokojů. „Máme,“ odpověděl majitel hotelu David Hilbert, „to víte, je hlavní turistická sezona.“ „Ach jo, tak já zase půjdu,“ řekl zklamaně turista. „Ale, ale, kam byste chodil?“ Hilbert na to, „určitě tu pro vás místo najdeme.“ Vzal do ruky mikrofon a hotelovým rozhlasem zaznělo: „Pozor, pozor! Žádáme všechny hosty, aby se přesunuli do pokoje s číslem o jedna vyšším, než ve kterém právě bydlí.“ Pak se Hilbert obrátil k našemu turistovi: „No vidíte, teď se můžete nastěhovat do prázdného pokoje číslo nula a hotel bude zase plný.“ Turista vešel do svého pokoje. Spokojeně; ještě netušil, kolikrát se bude muset stěhovat.

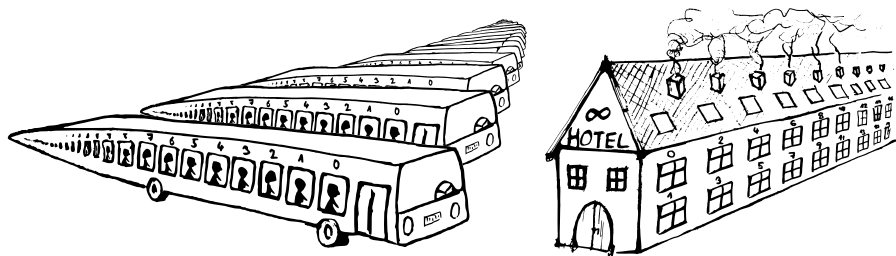


Pak k hotelu přijel autobus se sto lidmi, kteří se zde chtěli ubytovat. To pro hoteliéra Hilberta nebyl žádný problém: „Pokud číslo vašeho pokoje je k , tak se přestěhujte do čísla $k + 100$.“ A hned

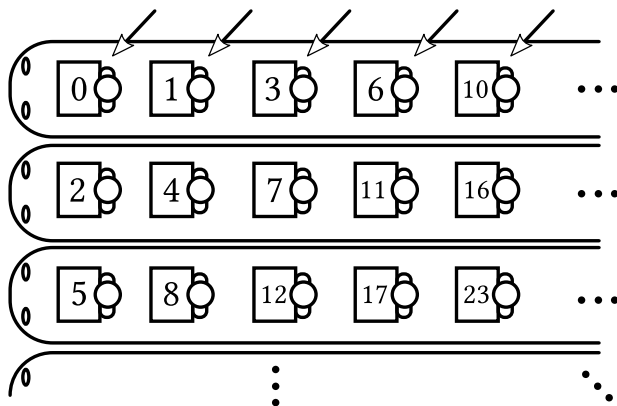
se zas uvolnilo 100 míst. Když pak ale přijel k hotelu autobus, který měl stejnou kapacitu jako Hilbertův hotel, tedy zaplněná sedadla se všemi přirozenými čísly, byl to již trochu oříšek. Není možné říct „posuňte se o nekonečno míst dál“ – neexistuje přirozené číslo, které by bylo o nekonečno větší než nula nebo jednička. Proto bylo třeba provést trochu rafinovanější operaci: „Ten, kdo bydlí v pokoji s číslem k , se přestěhuje do pokoje s číslem $2k$. Ten, kdo sedí v autobuse na sedadle s číslem k , se nastěhuje do pokoje s číslem $2k + 1$.“



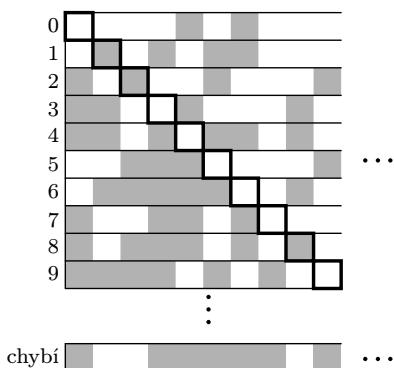
To byl šrumeček, panečku; kufry létaly, zámky cvakaly, ale nakonec se povedlo do hotelu umístit celý nekonečný autobus. A jen co autobus odjel, ani hosté se ještě pořádně neusadili, řítí se k hotelu nekonečně mnoho takových autobusů – opět číslovaných přirozenými čísly.



Ještě jsme nezmnili, že David Hilbert byl (ještě než jsme jej usadili do jeho vlastní pohádky) matematik. A matematici rádi převádí problém na předchozí případ. Pokud by se podařilo rozdat lidem v autobusech lístčky s různými přirozenými čísly, jednalo by se o stejnou situaci jako v případě, kdy přijel jen jeden nekonečný autobus s očíslovanými sedadly. Zbývá otázka, jak to provést. Pokud by Hilbert začal postupně rozdávat čísla $0, 1, 2, \dots$ lidem v autobuse 0, na cestující v ostatních autobusech by se nedostalo. Stejně tak, kdyby začal s tím, že by v každém autobuse rozdal jeden lístček cestujícímu na sedadle 0, na cestující na ostatních sedadlech by se nedostalo. Nakonec však David Hilbert přišel na to, jak lístčky rozdat: Uspořádá si cestující primárně podle součtu čísel autobusu a sedadla a sekundárně podle čísla autobusu. Jinými slovy rozdá lístčky po zpětných úhlopříčkách, jak je naznačeno na následujícím obrázku.



Pak přijel k hotelu další nekonečný autobus. Ten však neměl sedadla číselovaná přirozenými čísly, nýbrž nekonečnými posloupnostmi bílých a šedých čtverečků. To znamená, že každé sedadlo bylo označeno nějakou nekonečnou posloupností čtverečků, přičemž každé dvě posloupnosti se lišily a naopak i každá možná posloupnost připadla nějakému sedadlu. „Když jsem už ubytoval nekonečno autobusů, jeden autobus navíc nemůže být problém,“ pomyslel si Hilbert a opět se jal vymýšlet nějaký chytrý způsob, jak taková sedadla očíslovat přirozenými čísly. Přemýšlel tuze dlouho. Ubytovaní hosté už šli spát, byli rádi, že to stěhování utichlo, a Hilbert stále na nic nepřišel. A byl by nad tím dumal dodnes, kdyby nezjistil, že teď už opravdu prohrál. Hosté z tohoto autobusu se do Hilbertova hotelu nevejdou. Proč? Protože ať rozdá lístečky s přirozenými čísly cestujícím jakkoli, vždy se najde cestující, na kterého se nedostalo. Jednoho takového odhalíme například takto:² Nakreslíme pod sebe posloupnosti bílých a šedých čtverečků v tom pořadí, v jakém jim byly přiřazeny kartičky s přirozenými čísly. Následně se podíváme na úhlopříčku a vytvoříme z ní novou posloupnost čtverečků, kterou následně invertujeme – nahradíme bílou barvu za šedou a obráceně. Tím dostaneme novou posloupnost, která se liší od všech v tabulce (od posloupnosti s číslem n přinejmenším na pozici n), což znamená, že příslušný cestující nedostal lísteček.



Znázornění Cantorovy diagonální metody

²Tento postup se běžně nazývá Cantorovou diagonální metodou.

Porovnávání nekonečn

Z pohádky plynou dvě poučení. První poučení je, že nekonečno je hodně nafukovací, a druhé je, že přesto není nafukovací nade všechny meze. Nyní se pokusíme pohádku více zasadit do matematického rámce. Konečné množiny mezi sebou porovnávat umíme: Spočítáme, kolik prvků má první množina, kolik prvků má druhá množina a za větší prohlásíme tu množinu, jejíž počet prvků je vyšší přirozené číslo. Naším cílem je toto porovnávání množin zobecnit, aby jej bylo možné použít i pro nekonečné množiny. Klíčovým nástrojem pro porovnávání množin je zobrazení neboli funkce.

Definice. *Zobrazení* (nebo též *funkce*) f je předpis, který na vstupu dostane matematický objekt x a na základě něj vytvoří výstupní objekt $f(x)$ (také nazývaný *obraz* bodu x). Tento předpis může ale také dané x nezpracovat (říkáme, že $f(x)$ nemá smysl).

- (i) *Definiční obor* funkce f je množina objektů x , pro které má $f(x)$ smysl. Obecně značením $f: A \rightarrow B$ říkáme, že definičním oborem funkce f je množina A a každé $f(a)$ leží v množině B . Slovy lze také říci, že se jedná o funkci z A do B , případně, že je tato funkce definovaná na množině A .

Symbol $\mathbb{R}$ značí množinu všech reálných čísel. Příkladem funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ může být funkce daná předpisem $f(x) = x^2$.

- (ii) Funkce je *prostá*, pokud dvěma různým prvkům nikdy nepřihadí stejný prvek. Například v pohádce vždy Hilbert hledal zobrazení z množiny hostů do množiny pokojů, a to navíc prosté, tedy takové, aby žádní dva hosté neskončili ve stejném pokoji.
- (iii) *Bijekce* $f: A \rightarrow B$ je prostá funkce, pro kterou je každý prvek množiny B reprezentovaný nějakým $f(a)$. Jde tedy o popárování prvků množiny A s prvky množiny B .
- (iv) Uvažme funkci f definovanou na množině A a podmnožinu A' této množiny. Pak *zúžení* funkce f na množinu A' značíme $f \upharpoonright A'$. Jedná se o funkci, která má za definiční obor A' a chová se na něm stejně jako f . Tedy $(f \upharpoonright A')(x) = f(x)$ pro $x \in A'$. Například funkce definovaná v bodě (i) není prostá, ale její zúžení na množinu kladných čísel už je prosté.
- (v) Mějme funkci $f: A \rightarrow B$ a na obou množinách A i B mějme zavedené uspořádání (tedy definované, co znamená $x < y$). Říkáme, že f je *rostoucí*, pokud zachovává toto uspořádání, tedy pro libovolné $a_0 < a_1$ z A platí $f(a_0) < f(a_1)$.

Nyní již můžeme říci, jak se množiny porovnávají. Mějme množiny A a B . Říkáme, že:

- (i) Množiny A a B mají *stejnou mohutnost* (značíme $|A| = |B|$), pokud existuje nějaká bijekce $f: A \rightarrow B$.
- (ii) Mohutnost A je *menší nebo rovna mohutnosti* B (značíme $|A| \leq |B|$), pokud existuje prosté zobrazení $f: A \rightarrow B$.
- (iii) Mohutnost množiny A je *ostrě menší* než mohutnost množiny B (značíme $|A| < |B|$), pokud $|A| \leq |B|$, ale neplatí $|B| \leq |A|$.

A nakonec okolo množin definujeme ještě několik dalších pojmů.

- (i) Pokud množina A splňuje $|A| \leq |\omega|$, říkáme, že je *spočetná*, v opačném případě říkáme, že je *nespočetná*. Spočetná množina je tedy taková, která se vejde do Hilbertova hotelu.
- (ii) Pro dvě množiny A, B definujeme jejich *kartézský součin* $A \times B$ jako množinu všech uspořádaných dvojic³ (a, b) , kde a je prvek množiny A a b je prvek množiny B . Jsou-li obě množiny A, B konečné, je počet prvků množiny $A \times B$ roven součinu mohutností množin A a B coby přirozených čísel.
- (iii) Pro množinu A definujeme její *potenci* (značíme $P(A)$) jako množinu všech jejích podmnožin včetně prázdné množiny a A samotné. Potence je tedy konkrétní příklad takového

³Kulatými závorkami zde budeme běžně značit uspořádané dvojice. Kdyby se mělo jednat o interval, bude to explicitně řečeno.

zobrazení, že $\mathcal{P}(X)$ má smysl na všech množinách. Je-li množina A konečná, n -prvková, je počet prvků množiny $\mathcal{P}(A)$ roven 2^n .

V pohádce jsme popsali bijekci mezi množinou cestujících v nekonečně mnoha autobusech a ω . Každý takový cestující je určený dvěma čísly: číslem autobusu a číslem sedadla. Jedná se tedy vlastně o bijekci z $\omega \times \omega$ do ω , takže platí $|\omega \times \omega| = |\omega|$. Z toho plyne, že sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.

Příklad. Množina S všech sudých přirozených čísel má stejnou mohutnost jako ω , není tedy „dvakrát menší“, jak by se mohlo na první pohled zdát. Příslušná bijekce $f: \omega \rightarrow S$ může být například daná předpisem $f(x) = 2x$. Obecně má každá nekonečná podmnožina X množiny ω stejnou mohutnost jako ω , tedy dá se říci, že ω je nejmenší nekonečná množina. Příslušná bijekce $\omega \rightarrow X$ může vypadat takto: Číslu 0 přiřaď nejmenší prvek X , číslu 1 přiřaď druhý nejmenší prvek X atd.

Příklad. Množina $\mathbb{Q}$ je spočetná.⁴

Důkaz. Nejprve ukážeme, že množina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel je spočetná. Existuje totiž bijekce $f: \mathbb{Z} \rightarrow \omega$, například definovaná předpisem $f(n) = 2n$ pro přirozená čísla n a $f(m) = -2m - 1$ pro záporná čísla m . Snadno se ověří, že takové zobrazení je skutečně bijekce.

Díky tomu je spočetná i množina všech zlomků tvaru $\frac{n}{1}$, kde n je celé číslo. Stejně tak množina všech zlomků tvaru $\frac{n}{2}$, stejně tak množina všech zlomků tvaru $\frac{n}{3}$ atd. Množina $\mathbb{Q}$ je pak sjednocením těchto spočetně mnoha spočetných množin, a proto je spočetná. $\square$

Příklad. *Polynom s racionálními koeficienty* je funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daná předpisem tvaru

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kde n je přirozené číslo a $a_0, \dots, a_n$ jsou racionální čísla (říkáme jim *koeficienty*). Polynomů s racionálními koeficienty je spočetně mnoho (neboli množina těchto polynomů je spočetná).

Důkaz. Polynom může mít libovolný konečný počet koeficientů. Pro dané n budeme symbolem $\mathbb{Q}^n[x]$ značit množinu všech (racionálních) polynomů pouze s koeficienty $a_0, \dots, a_n$. Polynomy z množiny $\mathbb{Q}^0[x]$ mají jen koeficient a_0 , a proto $|\mathbb{Q}^0[x]| = |\mathbb{Q}| = |\omega|$. Polynomy z množiny $\mathbb{Q}^1[x]$ mají dva koeficienty, tedy $|\mathbb{Q}^1[x]| = |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = |\omega \times \omega| = |\omega|$. Dále polynomy z množiny $\mathbb{Q}^2[x]$ mají o jeden racionální koeficient více než prvky $\mathbb{Q}^1[x]$, proto $|\mathbb{Q}^2[x]| = |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^1[x]| = |\omega \times \omega| = |\omega|$. Podobně $|\mathbb{Q}^3[x]| = |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^2[x]| = |\omega \times \omega| = |\omega|$ a tak dále, obecně vždy odvodíme $|\mathbb{Q}^n[x]| = |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^{n-1}[x]| = |\omega \times \omega| = |\omega|$. Takto dostaneme, že všechny množiny $\mathbb{Q}^n[x]$ jsou spočetné. Navíc jich je spočetně mnoho, takže je spočetné i jejich sjednocení čili množina všech polynomů s racionálními koeficienty. $\square$

A teď nás čeká první nespočetné cvičení.

Cvícení 1. Označme symbolem $\check{C}$ množinu všech nekonečných posloupností bílých a šedých čtverečků jako v pohádce. Rozmysli si, že $|\check{C}| = |\mathcal{P}(\omega)|$.

Obecně můžeme říci, že potence je nástroj na výrobu větších nekonečen, čímž myslíme, že pro každou množinu A platí $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. Důkaz se opírá o závěr pohádky, ale je obecnější a dívá se na záležitost trochu jinými pojmy, takže si jej raději předvedeme:

Pro důkaz tvrzení $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ potřebujeme ukázat, že existuje prostá funkce $A \rightarrow \mathcal{P}(A)$, ale neexistuje prostá funkce $\mathcal{P}(A) \rightarrow A$. Funkci $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ jednoduše sestrojíme tak, aby každému prvku přiřadila jednoprvkovou množinu obsahující právě tento prvek, tedy $f(a) = \{a\}$.

Druhou část dokážeme sporem – předpokládejme, že existuje prostá funkce $g: \mathcal{P}(A) \rightarrow A$. Sestrojíme podmnožinu S množiny A podle následujícího pravidla: Pro každou podmnožinu B množiny A

⁴Symbolem $\mathbb{Q}$ značíme množinu všech racionálních čísel neboli čísel vyjádřitelných jako podíl dvou celých čísel.

se podíváme, zda je $g(B)$ prvkem B . Pokud není, umístíme $g(B)$ do S , v opačném případě jej tam nedáme. Jinými slovy je S množina obrazů těch podmnožin, které neobsahují svůj obraz. Protože S je také množina, určitě má i sama obraz $g(S)$. Ale zdaleka je $g(S)$ prvkem S ? Kdyby bylo prvkem S , tak bychom jej do S ale nemohli dát (ani za jinou podmnožinu, protože g je prostá), a naopak kdyby nebylo, tak bychom jej do S museli dát – dostáváme spor, a proto funkce g nemůže existovat.

Kolem porovnávání nekonečen nám zatím zůstává řada otazníků.

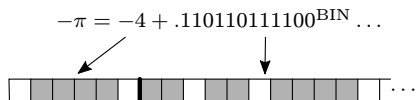
- (i) Musí vždy nastat alespoň jedna z možností $|A| \leq |B|$ nebo $|B| \leq |A|$?
- (ii) Pokud $|A| \leq |B|$ a současně $|B| \leq |A|$, musí už nutně $|A| = |B|$?
- (iii) Pokud platí $|A| \leq |B|$ a současně $|B| \leq |C|$, musí už nutně $|A| \leq |C|$? A pokud je navíc některá z původních nerovností ostrá, musí už nutně $|A| < |C|$?
- (iv) Když už je ω nejmenší nekonečná množina, je $\mathcal{P}(\omega)$ nejmenší nespočetná množina?

A abychom se měli na co těšit, nastíníme stručně odpovědi.

- (i) Ano, ale není to lehké dokázat, bude to ukázáno ve třetím díle.
- (ii) Ano, toto bychom mohli dokázat elementárně, ale počkáme si na třetí díl, kde to ukážeme spolu s (i). Můžeš to zkusit už teď dokázat coby těžší cvičení, případně si vyhledat Schröder–Bernstein theorem na anglické Wikipedii.
- (iii) Oboje platí, rozmysli si to jako cvičení. :-)
- (iv) Tato otázka byla dlouho nevyřešená a říká se jí *hypotéza kontinua*. Nakonec se ukázalo, že hypotézu kontinua není možné dokázat ani vyvrátit; pochopit, proč tomu tak je, ale vyžaduje znalosti nad rámec tohoto seriálu. Přesto si ve druhém díle sestrojíme nejmenší nespočetnou množinu, jen nebude jasné, zda má stejnou mohutnost jako $\mathcal{P}(\omega)$.

Příklad. Označme opět symbolem $\tilde{C}$ množinu všech nekonečných posloupností bílých a šedých čtverečků jako v pohádce. Popíšeme prostě zobrazení $f: \mathbb{R} \rightarrow \tilde{C}$, takže ukážeme, že $|\mathbb{R}| \leq |\tilde{C}| = |\mathcal{P}(\omega)|$. Zobrazení dostane reálné číslo x . Pak najdeme nejvyšší celé číslo, které nepřevyšuje x (dolní celá část), značíme jej $\lfloor x \rfloor$. Je-li číslo $\lfloor x \rfloor$ kladné, zakreslíme takový počet šedých čtverečků, jak velké toto číslo je, a následně jeden bílý čtvereček. Je-li nekladné (nula nebo záporné), zakreslíme jeden bílý čtvereček, pak $-\lfloor x \rfloor$ šedých čtverečků a nakonec opět jeden bílý čtvereček.

Zbývá zakódovat necelou část reálného čísla x , tedy $x - \lfloor x \rfloor$. To je nezáporné reálné číslo menší než jedna. Ve dvojkové soustavě⁵ tak bude tvaru $0.\langle \text{posloupnost nul a jedniček} \rangle$. Nulu zapíšeme jako bílý čtvereček, jedničku jako šedý čtvereček a doplníme takto zbylé čtverečky. Snadno ověříme, že toto kódování popisuje prosté zobrazení.



Cvičení 2.

- (i) Rozmysli si, že se v předchozím příkladu nedostane přesně na ty prvky $\tilde{C}$, které obsahují jen konečně mnoho bílých čtverečků. (Vzpomeň si, že $0, \bar{9} = 1$.)
- (ii) Ukaž, že množina prvků $\tilde{C}$, na které se nic nezobrazilo, je spočetná.
- (iii) Na základě předchozího bodu uprav zobrazení $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\omega)$, aby se jednalo o bijekci.

Cvičení 3. Dokaž, že množina všech nekonečných posloupností přirozených čísel má stejnou mohutnost jako $\tilde{C}$. Pozor na ty prvky $\tilde{C}$, které obsahují pouze konečně mnoho čtverečků od jedné barvy.

⁵Pokud ses ještě nesetkal(a) s jinou číselnou soustavou než s desítkovou, můžeš se podívat například na www.matematika.cz/prevod.

Potence nám dává nástroj na výrobu větších a větších nekonečen, pojďme si s ní ještě trochu pohrát a pokusit se sestrojít co možná největší nekonečnou množinu. Platí

$$|\omega| < |\mathcal{P}(\omega)| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)))| < \dots$$

Dále můžeme sestrojít sjednocení A_0 všech těchto množin. Množina A_0 tedy obsahuje každý prvek, jenž se vyskytuje v některé množině tvaru

$$\underbrace{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\dots \mathcal{P}(\omega) \dots))}_n \quad \text{pro přirozené číslo } n.$$

Tato A_0 je ostře větší než každá z předchozích množin. Proč? Uvažme jednu z předchozích množin X . Množina $\mathcal{P}(X)$ je stejně jako X podmnožinou A_0 , takže $|X| < |\mathcal{P}(X)| \leq |A_0|$, z čehož už plyne $|X| < |A_0|$.

Můžeme pokračovat. Máme

$$|A_0| < |\mathcal{P}(A_0)| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(A_0))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A_0)))| < \dots$$

A opět můžeme sestrojít sjednocení všech těchto množin, které nazveme A_1 . Analogicky sestrojíme

$$|A_0| < |A_1| < |A_2| < |A_3| < \dots$$

Na závěr sestrojíme sjednocení B všech těchto A_n . Samozřejmě bychom dále mohli pokračovat $|B| < |\mathcal{P}(B)| < \dots$, ale je na čase se podívat trochu hlouběji, co se tu vlastně děje.

Pravá podstata rekurze a indukce

Rekurzivní definice a důkazy indukcí jsi už pravděpodobně potkal(a). Jestli ne, můžeš se podívat třeba na stránku www.matematika.cz/matematicka-indukce.

Rekurzivní definice je například následující definice Fibonacciho čísel:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad (\text{pro přirozené číslo } n).$$

Prvním dvěma rovnostem říkáme *počáteční podmínka* a poslední je *rekurzivní předpis*. Indukce je technika, kterou lze využít například v důkazu následujícího tvrzení.

Příklad. Každé přirozené n lze rozložit na součet několika Fibonacciho čísel, jejichž indexy (v posloupnosti F) se vždy liší alespoň o 2.

Důkaz. Nulu napíšeme jako součet jednoho Fibonacciho čísla. Nyní půjdeme po přirozených číslech a dokážeme platnost tvrzení pro $1, 2, 3, 4, \dots$. Jsme v obecném n -tém kroku, kdy vlastnost dokazujeme pro číslo n . Přitom ale víme, že pro všechna nižší čísla $0, 1, \dots, n-1$ už jsme tuto vlastnost dokázali. Zvolme Fibonacciho číslo F_i tak, aby $F_i \leq n$ a index i byl největší možný. Protože $n \geq 1$, bude $i \geq 2$. Navíc $F_{i+1} > n$, neboli

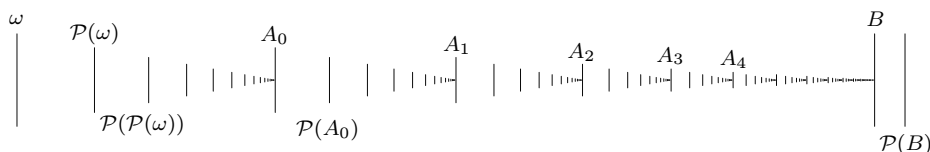
$$n - F_i < F_{i+1} - F_i = F_{i-1}.$$

V druhé rovnosti jsme použili rekurzivní předpis pro F_{i+1} . Nyní využijeme toho, že dokazujeme úlohu postupně, takže číslo $n - F_i$ již umíme rozložit podle zadání. Navíc tento rozklad neobsahuje číslo F_{i-1} (protože samotné rozkládané číslo je ostře menší), takže k tomuto rozkladu můžeme přidat číslo F_i a získat rozklad čísla n podle zadání.

Důkaz úlohy pro číslo 0 se nazývá *první krok indukce*. Důkaz pro obecné číslo n , kde předpokládáme, že pro všechna čísla menší než n tvrzení platí, se nazývá *indukční krok*. Využívaný předpoklad, že tvrzení platí pro všechna čísla menší než n , se nazývá *indukční předpoklad*.

Poznámka. V běžných středoškolských úlohách často není třeba v indukčním kroku využít toho, že je úloha dokázána pro všechna čísla menší než n . Stačí pouze vědět, že tvrzení platí pro $n - 1$. Taková indukce se nazývá *slabá indukce* a v úvodních povídáních o indukci bývá vydávána za tu pravou indukci. My naopak budeme za tu pravou indukci považovat indukci, která může využívat platnost pro kterékoli předchozí hodnoty; ta se jinak nazývá *silná indukce*. Další rozdíl silné a slabé indukce spočívá v tom, že v silné indukci může být první krok považován za součást indukčního kroku, indukční předpoklad je totiž pro $n = 0$ automaticky splněn.⁶ V příkladu jsme vyřešili první krok zvlášť jen proto, že pro $n = 0$ bychom nenašli nenulové $F_i \leq n$ a $n - F_n$ by tak nebylo ostře menší než n .

Intuitivně je tedy indukce „postupné dokazování“ a rekurze je „postupné definování“. Na konci předchozí kapitoly jsme rekurzivně definovali velkou množinu B . Jenže tato rekurze se nezastavila na přirozených číslech, ve skutečnosti šlo o rekurzi po zhruba takovýchto krocích:



Motivační obrázek

Podobným způsobem lze rozšířit i rekurzi a takto rozšířená indukce resp. rekurze se běžně nazývá *transfinitní indukce* resp. *transfinitní rekurze*. Na druhou stranu ne na každé množině můžeme dokazovat indukci. Představme si například nezáporná reálná čísla a zkusme dokázat, že každé nezáporné číslo je přirozené. První krok: Nula je přirozené číslo. Indukční krok: Uvažme kladné reálné číslo x . Číslo $x/2$ je menší než x , takže jsme o něm již dokázali, že je přirozené. Proto je přirozený i jeho dvojnásobek, tedy x . Dokázali jsme, že každé reálné číslo je přirozené, no ne? :-) No, dobrá, je to podvod. Na reálných číslech indukce nefunguje.

Naším cílem bude pochopit, jak se poznají **množiny, na kterých indukce a rekurze funguje**. K tomu je třeba ještě trochu jiný pohled na tyto pojmy.

Začneme s indukcí, která je (možná překvapivě) jednodušší. Proč tedy indukce funguje? **Indukce je jen speciální případ důkazu sporem.** Princip je následující: Pro spor předpokládáme, že dokazované tvrzení neplatí pro některé přirozené číslo, a zvolíme n nejmenší takové, pro které tvrzení neplatí. Pak tvrzení platí pro všechna $k < n$, a je tak splněn indukční předpoklad. Jenže potom z indukčního kroku plyne, že tvrzení platí i pro n , což je spor a důkaz je hotov.

Ukážeme to stručně na příkladu s rozkladem na Fibonacciho čísla. Předpokládejme, že existuje přirozené číslo, které nelze rozložit na Fibonacciho čísla. Zvolme nejmenší takové n . Nulu zapsat jako součet lze, takže $n > 0$. Dále najdeme $F_i \leq n$ s největším možným i . Potom je $n - F_i$ menší než n , takže $n - F_i$ lze rozložit na součet Fibonacciho čísel dle zadání. Jenže pak přidáním F_i k tomuto rozkladu dostáváme rozklad čísla n . Dostali jsme spor s tím, že n nelze rozložit.

V celé úvaze jsme využili jedinou (klíčovou) vlastnost přirozených čísel: Mohli jsme nalézt nejmenší n , pro které tvrzení neplatilo. To nás vede k následující definici.

Definice. Mějme množinu D , na které máme definováno, kdy pro dvojici prvků a, b z množiny D platí $a < b$ (ekvivalentně $b > a$). Řekneme, že D je *dobře uspořádaná*⁷, pokud platí následující

⁶Žádné přirozené číslo menší než $n = 0$ neexistuje a výroky, kde kvantifikace probíhá prázdnou množinou (například „Všichni opravdoví vodníci jsou růžoví.“) jsou v matematické logice považovány za pravdivé.

⁷Jakkoli se pojem „dobře uspořádaný“ může zdát podobně provizorním jako pojmy „zajímavý“ či „pěkný“, které se občas objeví v zadání či v řešení některé z úloh, pojem „dobře uspořádaný“ (anglicky *well ordered*) je skutečně oficiální termín používaný v teorii množin.

tři podmínky:

- (i) Jakmile $a < b$ a $b < c$, tak nutně $a < c$. (tranzitivita)
- (ii) Pro libovolné dva prvky a, b platí právě jedna z následujících tří možností: $a < b$, $a = b$, $a > b$. (linearita)
- (iii) V každé neprázdné podmnožině X množiny D existuje nejmenší prvek, tedy a takové, že pro všechny ostatní prvky b z množiny X je $a < b$. (dobré uspořádání)

Pokud D splňuje pouze první dvě podmínky, říkáme, že je *lineárně uspořádaná*. Pojem dobře uspořádané množiny budeme zkracovat jako *DUM*.

V klasické indukci se často případ dělí na první krok a indukční krok, protože má prvek 0 poněkud odlišné vlastnosti od ostatních. V obecné DUMě máme dokonce tři typy prvků.

Definice. Mějme DUMu a její prvek x . Prvek x nazýváme

- (i) *nulový*, pokud je to nejmenší prvek této DUMy;
- (ii) *izolovaný*, pokud existuje jeho bezprostřední předchůdce, tedy největší prvek menší než x ;
- (iii) *limitní*, pokud nenastane ani jedna z předchozích situací.

Příklad.

- (i) Množina reálných čísel je lineárně uspořádaná, ale není DUM, protože nemá nejmenší prvek.
- (ii) Množina nezáporných reálných čísel je lineárně uspořádaná a má nejmenší prvek, ale není DUM, protože množina kladných reálných čísel nemá nejmenší prvek.
- (iii) Každá konečná lineárně uspořádaná množina je dobře uspořádaná.
- (iv) Množina přirozených čísel je dobře uspořádaná.
- (v) DUMu D vyobrazenou na motivačním obrázku můžeme sestavit následovně. Za množinu D zvolíme $\omega \times \omega$. Prvky $(0, 0)$ a $(0, 1)$ označíme jako *velké*, ostatní označíme jako *malé*. Uspořádání definujeme tak, že velké prvky jsou vždy větší než malé. Pokud jsou oba prvky malé nebo oba velké, porovnáme je lexikograficky⁸, tedy $(a, b) < (c, d)$, pokud $a < c$ nebo platí současně $a = c$ a $b < d$.

Cvičení 4. Rozděl prvky DUMy z předchozího příkladu (v) na nulový, limitní a izolované.

Cvičení 5. Ukaž, že následující podmnožiny reálných čísel (s obvyklým uspořádáním) **nej**sou dobře uspořádané.

- (i) Množina celých čísel,
- (ii) množina nezáporných racionálních čísel,
- (iii) uzavřený interval $\langle 10, 20 \rangle$,
- (iv) Cantorova množina, tedy množina těch čísel z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, která ve svém zápisu v trojkové soustavě obsahují jen nuly a dvojky (případně jednu jedničku na konci, protože ta je nahraditelná nulou následovanou samými dvojkami).

Cvičení. Rozmysli si, že když k DUMě přidáme prvek ∞ větší než všechny ostatní prvky, bude se stále jednat o DUMu.⁹

Cvičení 6. Rozmysli si, že lineárně uspořádaná množina je DUMou právě tehdy, když v ní není možné najít nekonečnou ostře klesající posloupnost.

⁸Porovnávat lexikograficky znamená „jako ve slovníku“.

⁹Značka ∞ v seriálu nic konkrétního neznámá. Jde jen o pojmenování toho prvku a naznačuje, že je tento prvek nad ostatními.

Dobře uspořádanou množinu jsme definovali právě tak, aby na ní šlo provádět indukci. Dále ukážeme, že na DUMách funguje i rekurze. K tomu je třeba pochopit, co je to vlastně rekurze a co je to samotný rekurzivní předpis. Stejně jako silná indukce nemusí rekurze využívat jen předchozí dvě hodnoty, ale může vzít v úvahu všechny předešlé.

Definice. Uvažme DUMu D a její prvek x . Pak symbolem $D \leftarrow x$ značíme množinu všech prvků D ostře menších než x . *Rekurzivní předpis* na množině D je zobrazení, které pro každý prvek x množiny D a každou funkci definovanou na množině $D \leftarrow x$ přiřadí další hodnotu (pro bod x).

O funkci f říkáme, že *splňuje* rekurzivní předpis p , pokud pro všechny prvky x množiny D splňuje

$$f(x) = p(f \upharpoonright (D \leftarrow x)).$$

Slovy řečeno, uvažme zúžení funkce f jen na množinu $D \leftarrow x$. Pokud tuto zúženou funkci zobrazíme rekurzivním předpisem, musíme dostat $f(x)$.

Příklad. (Fibonacciho čísla) Definujeme rekurzivní předpis na ω následovně: Uvažme přirozené číslo x a funkci $f: (\omega \leftarrow x) \rightarrow \omega$. Pokud je $x \leq 1$, ignoruje rekurzivní předpis funkci f a vrátí samotné x (počáteční podmínka). V opačném případě rekurzivní předpis vrátí hodnotu $f(x-2) + f(x-1)$.

Opět obecná definice rekurzivního předpisu a funkce dané rekurzivním předpisem nedává příliš jasnou odpověď na otázky: Musí funkce splňující rekurzivní předpis vždy existovat? A je vůbec dána jednoznačně? Odpověď na obě tyto otázky je kladná, ale je třeba to dokázat:

Nejprve dokážeme jednoznačnost – (transfinitní) indukci. V indukčním kroku stačí ukázat, že jakmile se dvě funkce dané rekurzivním předpisem shodují na množině $D \leftarrow x$, tak se shodují i v bodě x . To je ovšem jasné, protože v takovém okamžiku je hodnota v bodě x rekurzivním předpisem jednoznačně určena.

Zbývá ukázat, že taková funkce opravdu existuje. Sestrojíme DUMu D' tak, že k DUMě D přidáme jeden další bod ∞ větší než všechny původní. Stačí ukázat, že existuje funkce definovaná na $D' \leftarrow \infty$ splňující rekurzivní předpis. Opět indukci dokážeme, že pro každé x z množiny D' existuje funkce definovaná na $D' \leftarrow x$ splňující rekurzivní předpis. Mohou nastat tři možnosti:

- (i) Prvek x je nulový. V takovém případě je vyhovující f na $D' \leftarrow x$ prázdná funkce definovaná na prázdné množině.
- (ii) Prvek x je izolovaný a má bezprostředního předchůdce y . V takovém případě z indukčního předpokladu existuje funkce definovaná na $D' \leftarrow y$ splňující rekurzivní předpis. Pomocí rekurzivního předpisu tuto funkci můžeme dodefinovat v bodě y a získáváme funkci definovanou na množině $D' \leftarrow x$ splňující rekurzivní předpis.
- (iii) Prvek x je limitní. V takovém případě existují funkce definované na $D' \leftarrow y$ pro všechna $y < x$. Navíc pro každý prvek $z < x$ najdeme y ležící ostře mezi z a x . Funkce definovaná na $D' \leftarrow y$ tak bude definovaná v z . Už jsme si dokázali jednoznačnost funkce splňující rekurzivní předpis a tato jednoznačnost platí i na množinách $D' \leftarrow y$. Pro každé y je tak tato funkce jednoznačná a její hodnota v bodě z nezávisí na volbě y . Takto najdeme hodnotu pro každé z z množiny $D' \leftarrow x$ a výsledná funkce bude splňovat rekurzivní předpis, protože jej splňují jednotlivá zúžení na $D' \leftarrow y$.

Příklad. Motivační obrázek v úvodu této kapitoly znázorňoval, jak může vypadat rekurze, která se nezastaví na přirozených číslech. Množinu, na které se tato rekurze odehrává, jsme již popsali v bodě (v) příkladu na stránce 11. Nyní popíšeme rekurzivní předpis: Uvažme prvek x množiny D a funkci f definovanou na množině $D \leftarrow x$. Rozebereme tři případy.

- (i) Pokud je x nulový prvek, rekurzivní předpis vrátí množinu ω .
- (ii) Pokud je x izolovaný prvek, má bezprostředního předchůdce y . Rekurzivní předpis vrátí množinu $\mathcal{P}(f(y))$.
- (iii) Pokud je x limitní prvek, vrátí rekurzivní předpis sjednocení všech hodnot funkce f .

Operace na DUMách

Předpis z předchozího příkladu je možné použít zcela obecně, takže se hledání množiny s co největší mohutností přetavilo v hledání co „nejdelší“ dobře uspořádané množiny. K tomu bychom si ale měli ujasnit, jak délku dobře uspořádaných množin porovnávat.

Definice. Řekneme, že dvě DUMy A, B jsou *stejněho typu* (značíme $A \simeq B$), pokud mezi nimi existuje rostoucí bijekce $f: A \rightarrow B$.

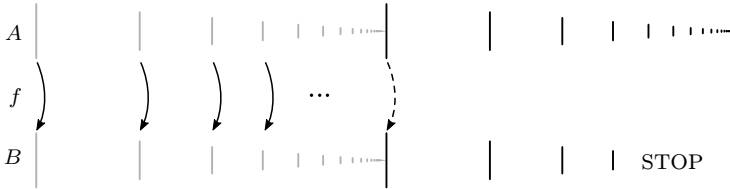
Povšimněme si, že porovnávání typů je jemnější než porovnávání velikostí. Pokud je $A \simeq B$, tak už nutně $|A| = |B|$, ale obráceně to neplatí. Jak vyplývá z následujícího tvrzení, kdykoli k nekonečné spočetné DUMě přidáme nový prvek větší než všechny ostatní, bude mít výsledná DUM jiný typ. Na druhou stranu bude mít stále stejnou mohutnost jako ω .

Tvrzení. Necht' A, B jsou dvě libovolné DUMy. Pak nastane právě jedna z následujících možností:

- (i) $A \simeq B$.
- (ii) $A \simeq (B \leftarrow x)$ pro nějaký prvek x z B .
- (iii) $(A \leftarrow x) \simeq B$ pro nějaký prvek x z A .

Pokud nastane možnost (ii) nebo (iii), je dokonce prvek x jednoznačně určen a ve všech třech případech je jednoznačně určena příslušná rostoucí bijekce. Pokud je navíc A jen podmnožinou DUMy B , určitě nenastane možnost (iii).

Důkaz. Rekurzivně sestrojíme zobrazení f , které každému prvku množiny A přiřadí prvek množiny B nebo značku STOP. Rekurzivní předpis je následující: Funkci f už máme definovanou na množině $A \leftarrow x$. Pokud tato funkce na každý prvek množiny B již něco zobrazila, přiřadíme prvku x značku STOP. V opačném případě přiřadíme x ten nejmenší prvek B , na který se dosud nic nezobrazilo.



Znázornění konstrukce f

Z konstrukce se žádným dvěma prvkům A nepřihadí stejný prvek B a mimo prvky zobrazené na STOP je f rostoucí.

Mohou nastat tři možnosti:

- (i) Žádnému prvku nebylo přiřazeno STOP a $f: A \rightarrow B$ je rostoucí bijekce $A \rightarrow B$, tedy $A \simeq B$.
- (ii) Žádnému prvku nebylo přiřazeno STOP a f není bijekce. Můžeme zvolit nejmenší prvek x množiny B , na který se nic nezobrazilo. V takovém případě se na základě konstrukce f nic nemohlo zobrazit na žádný prvek větší než x , zatímco všechny prvky menší než x jsou z definice prvku x funkcí f pokryty. Proto je f hledaná rostoucí bijekce mezi A a $B \leftarrow x$.
- (iii) Některému prvku bylo přiřazeno STOP. Vezměme nejmenší takový prvek x . Pak zúžení $f \upharpoonright x$ je hledaná rostoucí bijekce mezi $A \leftarrow x$ a B .

Už jsme dokázali, že nastane jedna alespoň jedna z uvedených situací, a zkonstruovali jednu konkrétní bijekci. Existuje ale i opačný proces, který z informace, která varianta (i)–(iii) nastala, prvku x a rostoucí bijekce rekonstruuje funkci f splňující popsany rekurzivní předpis: V případech (i) resp. (ii) stačí použít coby funkci f samotnou rostoucí bijekci $A \rightarrow B$ resp. $A \rightarrow (B \leftarrow x)$.

V případě (iii) stejně, jen je třeba dodefinovat rostoucí bijekci $(A \leftarrow x) \rightarrow B$ na prvcích $y \geq x$ předpisem $f(y) = \text{STOP}$.

Proto jsou varianta (i)–(iii), prvek x a rostoucí bijekce určeny jednoznačně funkcí f splňující rekurzivní předpis. I tato funkce je však určena jednoznačně z vlastností rekurze, takže máme dokázanou jednoznačnost.

Pro poslední doplňující fakt, že v případě, kdy A je podmnožinou B , nenastane možnost (iii), si stačí uvědomit, že v takovém případě pro každý prvek a množiny A platí $f(a) \leq a$.

Definice. Pokud platí $A \simeq (B \leftarrow x)$ pro nějaký prvek x z B , říkáme, že B má *větší typ* než A (značíme $A < B$).

Cvičení 7.

- (i) Uvědom si, že předchozí věta říká, že pro dvě DUMy A, B nastane právě jedna z možností $A < B$, $A \simeq B$, $A > B$.
- (ii) Ukaž, že když DUMy A, B_0, B_1, C splňují $A < B_0 < C$ a $B_0 \simeq B_1$, tak $A < B_1 < C$.
- (iii) Ukaž, že když DUMy A, B, C splňují $A < B$ a $B < C$, tak $A < C$.
- (iv) Nechť X je množina nekonečně mnoha DUM. Dokaž, že v množině X lze nalézt takovou DUMu A , že pro každou jinou DUMu B z množiny X platí $A < B$ nebo $A \simeq B$.

Cvičení 8. Najdi DUMu B a její vlastní¹⁰ podmnožinu A , aby stále platilo $A \simeq B$.

Nyní umíme porovnávat jednotlivé DUMy. Ještě si ukážeme dvě základní operace, jak vytvářet nové DUMy s větším typem. Základní DUM, ze které můžeme stavět, je ω . Dále přirozené číslo n na místě DUMy budeme považovat za n -prvkovou DUMu.

Definice. Pro dvě DUMy A a B definujeme

- (i) DUMu $A + B$ coby množinu všech uspořádaných dvojic tvaru $(a, 0)$ nebo $(b, 1)$, kde a je z A a b je z B ;
- (ii) DUMu $A \cdot B$ coby kartézský součin $A \times B$.

V obou případech definujeme porovnávání dvojic následovně: Pokud se dvojice liší na druhém místě, rozhodne o tom, která dvojice je větší, druhé místo (pro sčítání DUM uvažujeme $0 < 1$). V případě shody na druhé pozici rozhodne první.

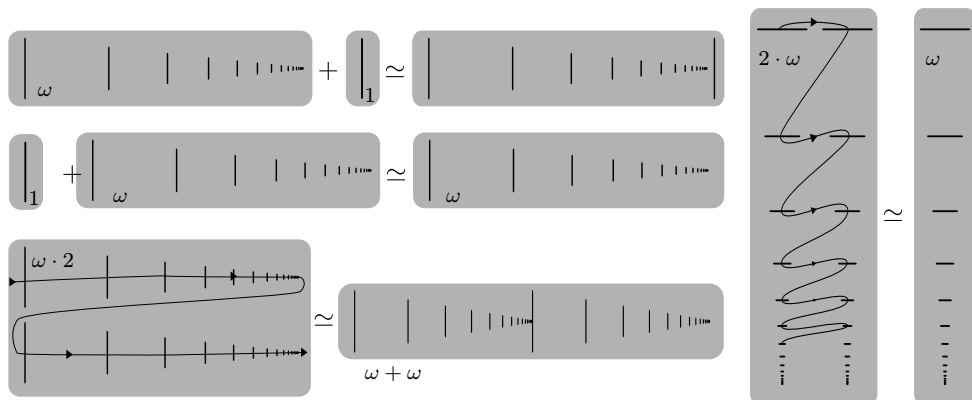
Ukážeme, že takto definované uspořádání je dobré – uvažme nějakou neprázdnou množinu dvojic a označme ji X . Množina všech možných druhých souřadnic je podmnožina DUMy, takže najdeme nejmenší druhou souřadnici y . Nyní se omezíme jen na ty dvojice z množiny X , jejichž druhá souřadnice je y . První souřadnice opět probíhá DUMu, takže najdeme nejmenší z nich, x . Dvojice (x, y) je nejmenší prvek množiny X .

Sčítání DUM odpovídá skládání DUM za sebe. Násobení $A \cdot B$ lze ilustrovat tak, že kartézský součin $A \times B$ (v každém řádku je A , v každém sloupci B) přechteme po řádcích. Odpovídá to tomu, když v B nahradíme každý jednotlivý prvek kopií DUMy A .

Příklad. DUMu z motivačního obrázku můžeme sestojit jako $\omega \cdot \omega + 2$.

Příklad. Na rozdíl od sčítání a násobení reálných čísel zde záleží na pořadí. Například $\omega + 1$ odpovídá přidání nového největšího prvku do ω a je tak $\omega + 1 > \omega$, dále $\omega \cdot 2 \simeq \omega + \omega > \omega$. Na druhou stranu $1 + \omega \simeq \omega$ a taky $2 \cdot \omega \simeq \omega$. Operace jsou znázorněny na obrázku.

¹⁰Vlastní podmnožina množiny A je taková, která není rovna A . Jedná se tedy o ekvivalent pojmu ostře menší prvek v uspořádání.



Cvičení 9. Předchozí příklad ukazuje, že výsledek součtu či součinu může vyjít jako druhý sčítanec resp. činitel. Ukaž, že u prvního sčítance resp. činitele se toto až na degenerované případy nestane, tedy konkrétně pro DUMy A, B platí

- (i) $A < A + B$, pokud je B neprázdná;
- (ii) $A < A \cdot B$, pokud je B alespoň dvoupřvková.

A to je z teorie prvního dílu vše. Zbývá se pustit do řešení úloh. Nevěš hlavu, jestli se Ti prozatím nepovedlo pochopit těžší důkazy s transfinitní rekurzí – ty jsou v seriálu uvedeny spíše pro úplnost a úlohy lze řešit i bez nich. Ale pokud Tě naopak zklamalo, že seriál šel sice do nekonečna, ale zatím málo „dál“, pak právě pro Tebe je tu závěrečná kapitola.

Čokoládová výzva

Čokoládová výzva je soutěž, jejíž výherce dostane čokoládu.¹¹ V každém díle seriálu bude jedna čokoládová výzva, tedy dohromady se bude soutěžit o tři čokolády. V příštích dvou dílech se bude jednat o co nejrychlejší vyřešení nějaké úlohy a poslání řešení e-mailem, takže doporučujeme se na další díly seriálu podívat co nejdříve.

První výzva je o poznání kreativnější.

Úloha. Sestroj **spočetnou** DUMu s co největším typem.

Ten, jehož DUM bude největší, vyhraje čokoládu. Při vzácné shodě (ale ta snad nenastane, stačilo by přeci přičíst jedničku) čokoládu rozdělíme. Konstrukce musí být formálně jasná, ale není například potřeba dokazovat, že se jedná o DUMu (pokud to bude pravda). Svou konstrukci pošli společně se seriálovou sérií (posíláš-li poštou), případně pro ni najdeš příslušnou kolonku v submitovátce.

A v příštím díle si předvedeme nespočetnou DUMu. ;-)

¹¹ Ale nejde o soutěžní úlohu, takže za ni nelze získat žádné body.

Seznam symbolů a pojmů

Na této stránce jsou stručně uvedeny všechny důležité pojmy prvního dílu seriálu. U každého pojmu je uvedeno, na které stránce byl definován.

- str 1. ω neboli množina všech přirozených čísel (včetně nuly).
- str 6. *Zobrazení* neboli *funkce* $f: A \rightarrow B$.
- str 6. $\mathbb{R}$ neboli množina všech reálných čísel.
- str 6. *Definiční obor*, *obraz bodu*.
- str 6. *Prostá* funkce, *bijekce*, *rostoucí* funkce.
- str 6. $f \upharpoonright A$ neboli zúžení funkce f na množinu A .
- str 6. $|A| = |B|$ neboli množina A má *stejnou mohutnost* jako B .
- str 6. $|A| \leq |B|$ neboli množina A má *mohutnost menší nebo rovnou* mohutnosti B .
- str 6. $|A| < |B|$ neboli množina A má *menší mohutnost než* B .
- str 6. *Spočetná* množina, *nespočetná* množina.
- str 6. *Kartézský součin* $A \times B$.
- str 6. $\mathcal{P}(X)$ neboli *potence* množiny X .
- str 7. $\mathbb{Q}$ neboli množina všech racionálních čísel.
- str 11. *DUM* neboli *dobře uspořádaná* množina.
- str 11. *Nulový*, *izolovaný*, *limitní* prvek v DUMě.
- str 12. $D \leftarrow x$
- str 12. *Rekurzivní předpis*, funkce *splňující* rekurzivní předpis.
- str 13. $A \simeq B$ neboli DUMy A , B jsou *stejného typu*.
- str 14. $A < B$ neboli DUM B má *větší typ než* A .
- str 14. *Součet* DUM $A + B$.
- str 14. *Součin* DUM $A \cdot B$.

Návody

1. Očísluj čtverečky a vezmi množinu šedých čtverečků.
2. (ii) Představ si místo každého přirozeného čísla jeho binární zápis (včetně nekonečné posloupnosti nul na začátku). (iii) Vezmi jakoukoli spočetnou množinu, která je pokrytá, a proved' postup obrácený k tomu, když se do Hilbertova hotelu nacpal autobus.
3. Bílá políčka oddělují jednotlivé členy posloupnosti, délka souvislých šedých úseků udává velikost čísla. S případem, kdy je bílých čtverečků jen konečně mnoho, se vypořádaj stejně jako v předchozím cvičení.
4. $(0, 2)$ nulový, $(n, 0)$ limitní pro všechna n , ostatní izolované.
5. (i) Nemá minimum, (ii), (iv) po odstranění nuly nemá minimum, (iii) otevřený interval $(10, 20)$ nemá minimum.
6. Když existuje posloupnost, tvoří množinu bez minima. Při důkazu opačného směru máme neprázdnou množinu bez minima. Z ní vezmeme libovolný prvek x_0 , to není minimum, najdeme $x_1 < x_0$, dále $x_2 < x_1$ atd.
7. (iv) Vezmi libovolnou DUMu D z množiny X , porovnej ji se všemi ostatními a využij toho, že D je dobře uspořádaná.
8. Prohlédni si pozorně část o sčítání a násobení DUM.
9. Sestroj rostoucí bijekci mezi A a začátkem $A + B$ resp $A \cdot B$. Věta o porovnávání pak už říká vše potřebné.