Areas and perimeters

4TH AUTUMN SERIES — DATE DUE: 4TH JANUARY 2016

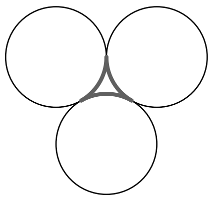
Pozor, u této série přijímáme pouze řešení napsaná anglicky!

PROBLEM 1. (3 POINTS)

There are two unit squares. In the first one a circle is inscribed. The second one is divided into 49 congruent squares and in each of them a circle is inscribed. Decide what is bigger: the area of the circle in the first square, or the sum of the areas of all circles in the second one?

PROBLEM 2. (3 POINTS)

Three circles with perimeter 36 are given. Each two of them touch as shown in the picture. What is the perimeter of the area between the circles (grey in the picture)?



PROBLEM 3. (3 POINTS)

Divide a unit square into 2015 (not necessarily congruent) rectangles with perimeter 2.

PROBLEM 4. (5 POINTS)

The exterior angle at the vertex A of a triangle ABC equals 3φ. Let D, E be points on its sides AB and CA respectively, such that $|\sphericalangle ADC| = 2|\sphericalangle ABE| = 2\varphi$. Prove that the ratio of perimeters of triangles ADE and ABC is equal to $\frac{|AE|}{|AB|}$.

PROBLEM 5. (5 POINTS)

A convex quadrilateral $ABCD$ is given. Let M and N denote the midpoints of AB and CD respectively. Furthermore, let the intersection of AN and DM be X and the intersection of BN and CM be Y. Prove that the sum of the areas of triangles ADX and BCY is equal to the area of quadrilateral $MXNY$.

PROBLEM 6. (5 POINTS)

A triangle with heights h_1, h_2, h_3 and perimeter p is given. Prove that the inradius of the triangle with sides $1/h_1$, $1/h_2$, $1/h_3$ is equal to $1/p$.

Problem 7. (5 points)

Matěj drew a convex 2016-gon. Rado is curious about its area. They agreed Rado can choose two points on its perimeter and draw a line passing through them which splits the 2016-gon in two parts. Then Matěj tells Rado the smaller one of the areas of these parts. Is it enough for Rado to repeat this 2013 times to determine the area of the 2016-gon? To choose a point X on the perimeter means to choose two adjacent vertices A and B of the 2016−gon and the ratio $r \in \langle 0, 1 \rangle$ such that $r = |AX|/|AB|$.

Problem 8. (5 points)

A unit square is cut into rectangles. Each of them is coloured by either yellow or blue and inside it a number is written. If the color of the rectangle is blue then its number is equal to rectangle's width divided by its height. If the color is yellow, the number is rectangle's height divided by its width. Let x be the sum of the numbers in all rectangles. Assuming the blue area is equal to the yellow one, what is the smallest possible x?

Areas and perimeters

4$^{\text{TH}}$ AUTUMN SERIES MODEL SOLUTIONS

Problem 1.

There are two unit squares. In the first one a circle is inscribed. The second one is divided into 49 congruent squares and in each of them a circle is inscribed. Decide what is bigger: the area of the circle in the first square, or the sum of the areas of all circles in the second one?

(Marta Kossaczká)

SOLUTION:

Let r be the ratio of the area of a square to the area of its inscribed circle. The second square is divided into 49 small squares, which are similar to the first unit square. In each of them, the ratio of the area of the square to the area of the inscribed circle is r. Therefore the ratio of the area of the second square to the sum of the areas of all circles is also r. Since both unit squares have the same area, the area of the large circle is equal to the sum of the areas of the small circles.

POZNÁMKY:

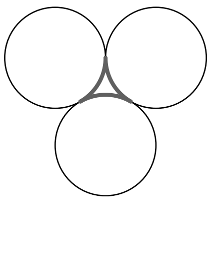
Většina řešitelů jen spočítala obsahy kruhů, objevilo se ale i několik řešení podobných vzorovému, což mě potěšilo. Výhoda vzorového řešení je kromě elegance i to, že by takový přístup fungoval pro složitější útvary než je kruh, u kterých bychom třeba ani nebyli schopni jednoduše vypočítat jejich obsah.

Část řešení počítala s obecnou délkou hrany čtverců místo jednotkové, která byla zmíněná v zadání. Obecnější řešení samozřejmě také funguje. V této úloze to nevadilo, ale u složitějších úloh by určitě nebylo od věci si pořádně přečíst zadání, i když je anglicky.

(Martin Töpfer)

Problem 2.

Three circles with perimeter 36 are given. Each two of them touch as shown in the picture. What is the perimeter of the area between the circles (grey in the picture)?



(Rado Švarc)

Solution:

First, note that the perimeters of the three circles are equal, and so are their radii (let us denote them by r). Therefore, the centers of the circles are vertices of an equilateral triangle. The endpoints of each of the three arcs forming the grey area clearly lie on the sides of the triangle because the tangent point of two circles lies on the line segment joining their centers. Thus, the angle corresponding to each arc is $60°$. Since $60°$ is $1/6$ of $360°$, the length of each arc is $\frac{1}{6}$ of the perimeter of the circle. So the length of each arc is 6, and because the grey area is bounded by three such arcs, the perimeter we are trying to determine is 18.

Poznámky:

Téměř všichni řešitelé sepsali úlohu tak, že jsem se rozhodl dát jim plný počet bodů. Na druhou stranu téměř v polovině všech řešení chybělo jakékoliv vysvětlení, proč je trojúhelník vytvořený středy kružnic rovnostranný. Angličtina byla v drtivé většině případů srozumitelná, rád bych ale upozornil na dvě nejčastější chyby. Za prvé, rovnostranný trojúhelník je „equilateral triangle“, velmi často jsem místo toho viděl v řešení napsáno „isosceles“, což znamená trojúhelník rovnoramenný. Za druhé, poloměr, tj. „radius“, má dvě možná množná čísla, „radiuses“ a „radii“. Druhá uvedená možnost je však mnohem běžnější a též vhodnější. *(Viki Němeček)*

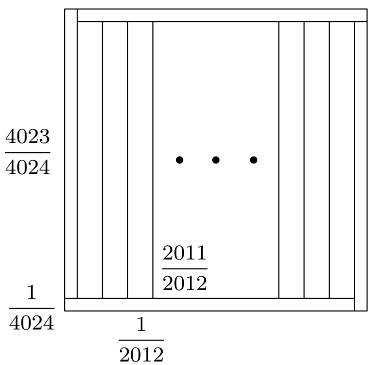
Problem 3.

Divide a unit square into 2015 *(not necessarily congruent) rectangles with perimeter* 2.

(Rado Švarc)

Solution:

Along the perimeter of the unit square we place four rectangles with sides $\frac{1}{4024}$ and $\frac{4023}{4024}$ (thus with perimeter $2\cdot\left(\frac{1}{4023}+\frac{4023}{4024}\right)=2$)—see the picture. The remaining space forms a smaller square with side $1-2\cdot\frac{1}{4024}=\frac{2011}{2012}$. This square can be divided into 2011 rectangles with sides $\frac{1}{2012}$ and $\frac{2011}{2012}$. All of them have perimeter 2, so we divided the unit square into 2015 rectangles with perimeter 2.



Poznámky:

Zhruba tři čtvrtiny řešení byly správně a všechna dospěla ke stejnému obrázku. Většina řešitelů také komentovala, jak došla k délkám stran. To není nutné – stačí dokázat, že nalezené řešení opravdu funguje, což může třeba v olympiádě ušetřit čas. Jak se na to teda přijde? Po zjištění, že 2015 obdélníků vedle sebe nefunguje, dostaneme nápad, že dáme čtyři obdélníky okolo a zbytek rovnoměrně nakrájíme. Pak kratší stranu obdélníka na obvodu označíme jako x a znalost obvodů a strany rozdělovaného čtverce už nám dají rovnice pro x které mají jednoznačné řešení $1/4024$. U neúspěšných řešení bylo nejčastějším problémem nepochopení pojmu „unit square“, což znamená jednotkový čtverec neboli čtverec o délce strany 1. Rozdělení obecného čtverce je ale o dost jednodušší úloha.

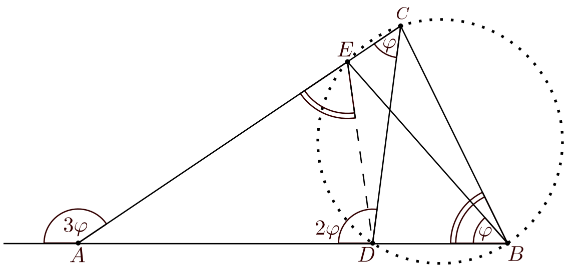
(Josef Svoboda)

Problem 4.

The exterior angle at the vertex A of a triangle ABC equals 3φ. Let D, E be points on its sides AB and CA respectively, such that $|\sphericalangle ADC| = 2|\sphericalangle ABE| = 2\varphi$. Prove that the ratio of perimeters of triangles ADE and ABC is equal to $\frac{|AE|}{|AB|}$.

(Martin „E.T.“ Sýkora)

Solution:



The interior angles of the triangle ADC have to sum up to $180°$, therefore $|\sphericalangle DCA| = \varphi$. We notice that $|\sphericalangle ECD| = \varphi = |\sphericalangle EBD|$ and this is sufficient for the quadrilateral $DBCE$ to be cyclic. Thus

$$|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle CBD| = 180° - |\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle DEA|.$$

Furthermore, triangles AED and ABC share the angle by vertex A, and so they are similar by AA. Let k denote the scale factor of those similar triangles, that means

$$k = \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|ED|}{|BC|}.$$

Hence we get

$$\frac{\text{perimeter}(ADE)}{\text{perimeter}(ABC)} = \frac{|AD| + |DE| + |EA|}{|AB| + |BC| + |CA|} = \frac{k \cdot |AC| + k \cdot |BC| + k \cdot |AB|}{|AB| + |BC| + |CA|} = k = \frac{|AE|}{|AB|}.$$

Poznámky:
Úlohu šlo též vyřešit zcela bez použití tětivového čtyřúhelníku. Všimneme-li si, že trojúhelníky AEB a ADC jsou podobné podle *uu* , dostaneme $|AE|/|AD| = |AB|/|AC|$. Navíc trojúhelníky AED a ABC sdílejí úhel při vrcholu A, tudíž jsou podobné dle *sus*.

Někteří řešitelé použili několikrát sinovou, popřípadě kosinovou větu, čímž ale získali výrazně delší řešení náročnější na výpočty.

Jazyková poznámka na závěr – slovo *sentence* znamená *gramatická věta* , nikoli matematická. Doporučuji si osvojit slova *theorem, claim.*

(Míša Hubatová)

Problem 5.

A convex quadrilateral $ABCD$ is given. Let M and N denote the midpoints of AB and CD respectively. Furthermore, let the intersection of AN and DM be X and the intersection of BN and CM be Y. Prove that the sum of the areas of triangles ADX and BCY is equal to the area of quadrilateral $MXNY$.

(Rado Švarc)

Solution:

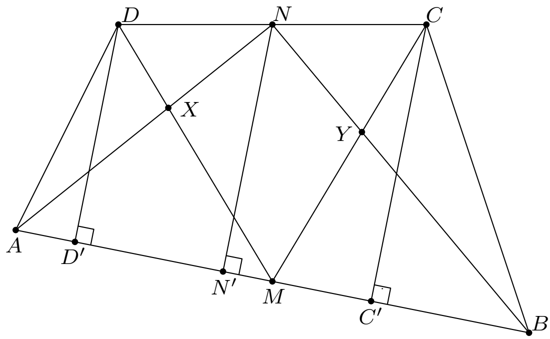
The quadrilateral $ABCD$ is convex so the points X and Y lie inside it. Let $[X_1X_2\dots X_n]$ denote the area of the polygon $X_1X_2\dots X_n$. We seek to prove that $[ADX]+[BCY]=[MXNY]$. Add $[AXM]+[BYM]$ to the both sides of the equation to get an equivalent statement

$$[ADM]+[BCM]=[ABN].$$

Let D', N' and C' be the perpendicular projections of D, N and C respectively onto the line AB.[1] Note that $DD'C'C$ is a trapezoid, where $CN=ND$ and $NN' \parallel CC' \parallel DD'$. So NN' is the bimedian of the trapezoid and $NN'=(CC'+DD')/2$. Now we can compute $[ABN]$ and $[ADM]+[BCM]$:

$$[ABN]=\frac{1}{2}AB\cdot NN'=\frac{1}{2}AB\frac{CC'+DD'}{2}$$
$$[ADM]+[BCM]=\frac{1}{2}AM\cdot DD'+\frac{1}{2}BM\cdot CC'=\frac{1}{2}\frac{AB}{2}DD'+\frac{1}{2}\frac{AB}{2}CC'$$

Therefore $[ABN]=[ADM]+[BCM]$.



Poznámky:

Úloha byla poměrně jednoduchá, čemuž odpovídá veliký počet řešení za plný počet bodů. Mnoho řešitelů zdůvodnilo rovnost $NN'=(CC'+DD')/2$ jen velmi vágně (N je střed CD, proto …). Body jsem za to nestrhával (pokud bylo zdůvodnění alespoň nějaké), ale pozor na to, podle mě to úplně zřejmé není. Přitom existuje mnoho různých důkazů, od těch méně elegantních (dokreslení průsečíku AB a CD či trigonometrie) přes úvahy o linearitě kolmé projekce až po velmi elegantní pozorování se střední příčkou lichoběžníku.

V podstatě všichni řešitelé také zapomněli zdůvodnit, proč X a Y leží uvnitř $ABCD$, přestože s tím pracovali (rozkládali obsahy větších trojúhelníků na součty obsahů menších).

(Matěj Konečný)

[1] D' is the foot of the D-altitude in the triangle AMD and N' and C' are defined similarly.

Problem 6.

A triangle with altitudes h_1, h_2, h_3 and perimeter p is given. Prove that the inradius of the triangle with sides $1/h_1$, $1/h_2$, $1/h_3$ is equal to $1/p$. *(Rado Švarc)*

SOLUTION:

Let a_1, a_2 and a_3 be the sides of the original triangle so that h_i is the height corresponding to a_i and let ρ be its inradius. By combining various formulae for the area of a triangle, we get $\frac{a_i h_i}{2} = \frac{p\rho}{2}$, which implies $\frac{1}{h_i} = \frac{a_i}{p\rho}$. This means that the new triangle is similar to the original one with coeficient $\frac{1}{p\rho}$. Therefore, the inradius of the new triangle is equal to $\frac{\rho}{p\rho} = \frac{1}{p}$.

POZNÁMKY:

Úloha nebyla příliš obtížná a mnoho řešitelů ji udolalo – někteří pěkně, někteří méně. Krátká a/nebo úhledná řešení, ve kterých se neobjevovaly odmocniny, jsem odměňoval imaginárním bodem.

Rád bych upozornil na to, že někteří psali „sentence *sss*“, což je čechismus, který se do angličtiny správně překládá jako „SSS theorem“. (Pokud by se objevila např. věta *sus*, překládala by se jako „SAS theorem“.) Dále platí, že přestože se pro Héróna Alexandrijského v angličtině používá jméno Hero of Alexandria častěji než Heron of Alexandria, jeho vzorec se stále překládá jako Heron's formula.

Nakonec bych rád do budoucna účastníky poprosil, aby si dávali pozor na to, co považují za známé. V řešení této úlohy se často objevil vzorec $1/\rho = 1/h_1 + 1/h_2 + 1/h_3$ a tvrzení o tom, že převrácená hodnota obsahu trojúhelníka je rovna

$$4 \cdot \sqrt{H\left(H - \frac{1}{h_1}\right)\left(H - \frac{1}{h_2}\right)\left(H - \frac{1}{h_3}\right)}, \text{ kde } H = \frac{1}{2h_1} + \frac{1}{2h_2} + \frac{1}{2h_3}.$$

Já jsem ani jedno z těchto tvrzení neznal, a přestože jejich důkaz není složitý, rozhodně není ani triviální. Vím, že není jasné, co vše se dá prohlašovat za známé, ale v našem semináři obecně platí, že pokud si nejste jistí, že je to opravdu hodně známé, a není to uvedené v úvodním textu, tak bychom byli rádi, kdybyste alespoň ocitovali zdroj, ze kterého čerpáte. To udělali jen sourozenci *Kopfovi*, které tímto veřejně chválím. Ovšem pokud jste skutečně citovanou větu použili správně, body jsem nestrhával. *(Rado Švarc)*

Problem 7.

Matěj drew a convex 2016-gon. Rado is curious about its area. They agreed Rado can choose two points on its perimeter and draw a line passing through them which splits the 2016-gon in two parts. Then Matěj tells Rado the smaller one of the areas of these parts. Is it enough for Rado to repeat this 2013 times to determine the area of the 2016-gon? To choose a point X on the perimeter means to choose two adjacent vertices A and B of the 2016−gon and the ratio $r \in \langle 0, 1\rangle$ such that $r = |AX|/|AB|$.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

SOLUTION:

Suppose the vertices of the polygon are $A_1, A_2, \ldots, A_{2016}$ in clockwise order; let the midpoint of segment A_iA_{i+1} be S_i for $i = 1, \ldots, 2016$ (where $A_{2017} = A_1$). Suppose X is a point on the perimeter of the 2016-gon but not on the sides A_1A_2 and $A_{2016}A_1$. We will use $[X]$ to mean Matěj's answer if Rado chooses the line A_1X. Line A_1X divides the 2016-gon into two polygons, let X_L be the one that contains A_{2016} and X_R the one that contains A_2. Also, let $[X_L]$ and $[X_R]$ be their areas respectively. Write $[ABC]$ for the area of a triangle ABC.

From the problem statement we have $[X] = \min([X_L], [X_R])$. Next, note that

$$[A_1A_iS_i] = [A_1A_{i+1}S_i] = \frac{1}{2}[A_1A_iA_{i+1}]$$

because median divides a triangle into two parts with the same area (the two triangles have the same length of one side and of the respective height).

Now we will prove one auxiliary lemma.

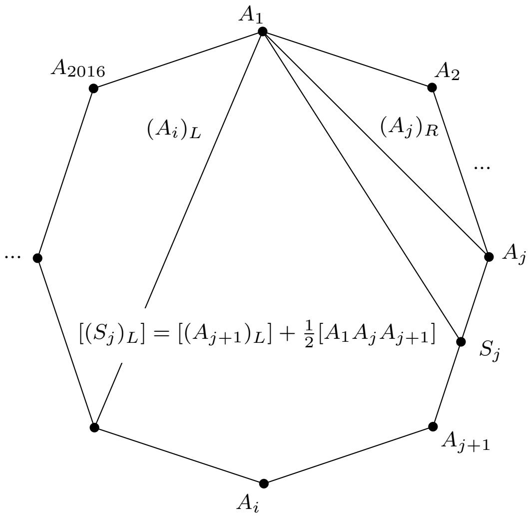
Lemma. *If X and Y are points on the perimeter such that $[X] \leq [Y]$ then the polygon among X_L, X_R that does not contain Y has area $[X]$.*

Proof. WLOG[2] assume that X_L does not contain Y. Because X_R contains Y_R we have

$$\min([X_L],[X_R]) = [X] \leq [Y] = \min([Y_L],[Y_R]) \leq [Y_R] < [X_R],$$

so really $[X] = \min([X_L],[X_R]) = [X_L]$. □

Now, let us describe a strategy that Rado can use. First we can ask about lines A_1A_{1008} and A_1A_{1009}. By the lemma above, in the case of $[A_{1008}] \leq [A_{1009}]$ we know that $[A_{1008}]$ represents the area of $(A_{1008})_R$ and otherwise $[A_{1009}]$ represents the area of $(A_{1009})_L$. Because $[(A_2)_R] = [(A_{2016})_L] = 0$, in both cases we are in the situation where we know the area of $(A_i)_L$ and $(A_j)_R$ for some i, j that satisfy $i - j \leq 1008$ (either $i = 2016$ and $j = 1008$ or $i = 1009$ and $j = 2$).



Suppose we know the area of $(A_i)_L$ and of $(A_j)_R$ and first assume that $[(A_j)_R] \leq [(A_i)_L]$. If we ask about the line A_1S_j we get

$$[S_j] = \min([(A_j)_R] + \frac{1}{2}[A_1A_jA_{j+1}], [(A_{j+1})_L] + \frac{1}{2}[A_1A_jA_{j+1}]).$$

Because

$$[(A_{j+1})_L] + \frac{1}{2}[A_1A_jA_{j+1}] \geq [(A_i)_L] + \frac{1}{2}[A_1A_jA_{j+1}] \geq [(A_j)_R] + \frac{1}{2}[A_1A_jA_{j+1}],$$

we know

$$[S_j] = [(A_j)_R] + \frac{1}{2}[A_1A_jA_{j+1}].$$

[2]Without Loss Of Generality

From this we can compute $[(A_{j+1})_R] = [(A_j)_R] + 2 \cdot ([S_j] - [(A_j)_R])$. If $[(A_j)_R] > [(A_i)_L]$ we can ask about the line A_1S_{i-1} and analogically compute the area $[(A_{i-1})_L]$. In any case, the difference between i and j decreases by one with this step so after at most 1008 steps we will have $i = j$ and we will know the area of the 2016-gon is $[(A_i)_L] + [(A_i)_R]$.

We have used at most $2 + 1008$ questions so the answer is yes, Rado can determine the area of the 2016-gon in 2013 questions.

POZNÁMKY:
Několik lidí bohužel pochopilo úlohu špatně a například nechali Rada dělat geometrické konstrukce, aby našli správnou dvojici bodů, na které se má zeptat. Ale jediný způsob, jak Rado může vybrat příslušné body, je popsán v zadání. Nemalé části těch, kteří úlohu vyřešili správně, trochu pokulhávala argumentace, ale rozhodl jsem se strhávat body až za větší pochybení.

Většina správných řešení byla více méně podobná tomu vzorovému. Další část řešení také zafixovala A_1, ale pak se snažila najít takovou stranu A_iA_{i+1}, uvnitř které leží bod X takový, že A_1X půlí obsah zadaného 2016-úhelníku. V tomto trojúhelníku jde zjistit obsah celého mnohoúhelníku třemi dotazy $A_1A_i, A_1S_i, A_1A_{i+1}$. Za elegantní řešení si vysloužil imaginární bod *Václav Steinhauser*, který si naopak zafixoval stranu a hledal takový správný třetí vrchol, aby z výsledného trojúhelníku mohl dopočítat obsah celého mnohoúhelníku.

Několik řešitelů si všimlo, že otázek stačí položit mnohem méně (rekord drží *František Couf* s 18 otázkami), například s využitím ternárního vyhledávání[3] – otázkami ale nebylo potřeba šetřit a takovéto snahy často jen zkomplikovaly sepisování. *(Štěpán Šimsa)*

Problem 8.

A unit square is cut into rectangles. Each of them is coloured by either yellow or blue and inside it a number is written. If the color of the rectangle is blue then its number is equal to rectangle's width divided by its height. If the color is yellow, the number is rectangle's height divided by its width. Let x be the sum of the numbers in all rectangles. Assuming the blue area is equal to the yellow one, what is the smallest possible x?

(Rado Švarc)

SOLUTION (BY FILIP BIALAS):
First, we will prove that sides of each rectangle must be parallel to the sides of the unit square. Let G be a graph, whose vertices are the rectangles. Two rectangles are connected if their sides intersect at more than one point. If a rectangle is not adjacent to the lower side of the unit square then there is a neighbour below it. Eventually we will reach the lower side which is parallel to the sides of the initial rectangle.

Consider the unit square described in the problem. Let's say that there are r yellow and s blue rectangles. Denote the heights and widths of yellow rectangles by $a_1, a_2, \cdots, a_r$ and $b_1, b_2, \cdots, b_r$ and the heights and width of blue rectangles by $c_1, c_2, \cdots, c_s$ and $d_1, d_2, \cdots, d_s$, respectively. Then

$$\sum_{i=1}^{r} a_i b_i = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{s} d_i c_i = \frac{1}{2},$$
$$x = \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{b_i} + \sum_{i=1}^{s} \frac{d_i}{c_i}.$$

By the Cauchy-Schwarz inequality in the fractional form:

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{b_i} = \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{a_i b_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{r} a_i b_i} = 2\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\right)^2.$$

[3] *https://en.wikipedia.org/wiki/Ternary_search*

And therefore

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{d_i}{c_i} \geq 2\left(\sum_{i=1}^{s} d_i\right)^2 .$$

Which yields a lower bound

$$x \geq 2\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{s} d_i\right)^2 .$$

Now we will show that at least one of the sums $\sum_{i=1}^{r} a_i$ and $\sum_{i=1}^{s} d_i$ is greater or equal to 1. Suppose not. Consider the projection of the yellow rectangles onto the right side of the unit square. It does not cover the whole side because the sum of the heights of the yellow rectangles is less than 1. So there is a horizontal strip which does not contain any yellow point. Similarly, there is a vertical strip which does not contain any blue point. The intersection of these two strips is not coloured, contradiction. Without loss of generality assume $\sum_{i=1}^{r} a_i \geq 1$.

$$\sum_{i=1}^{s} d_i \geq \sum_{i=1}^{s} c_i d_i = \frac{1}{2}$$

$$x \geq 2\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{s} d_i\right)^2 \geq \frac{5}{2}$$

The value $\frac{5}{2}$ is attained if we cut the unit square horizontally in the middle, so the minimum is indeed $\frac{5}{2}$.

Poznámky:
Došla tři správná řešení, přičemž všechna jsou podobná vzorovému. Ostatní se mě pokusili přesvědčit, že x je menší, pokud jednotkový čtverec rozdělíme na méně obdélníků, což je sice intuitivní, ale dokázat se to nikomu nepodařilo. Chtěl bych pochválit Filipa Bialase za pěkně napsané řešení i elegantní zdůvodnění rovnoběžnosti, čímž si zasloužil $+i$.

Nevím proč, ale nemálo řešitelů použilo termín „weight“ pro šířku, přestože jsme přímo v zadání uvedli „width“. *(Anh Dung „Tonda“ Le)*