Do nekonečna a ještě dál I

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 7. PROSINCE 2015

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)
Na nějakém celém čísle na číselné ose sedí neviditelná blecha. V každém skoku skočí o pevně dané nenulové přirozené číslo n doleva nebo doprava (při každém skoku si může znovu vybrat směr). Mirek se snaží blechu chytit tak, že po každém skoku blechy položí na některé celé číslo past. Blechu chytí, pokud položí past na blechu nebo blecha ve svém skoku skočí do již dříve položené pasti. Ukažte, že Mirek může pasti pokládat tak, aby blechu po konečně mnoha skocích zaručeně chytil, i když nezná počáteční pozici blechy, konstantu n ani směry, kterými blecha skáče.

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)
Nechť X je množina všech bijekcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ukažte $|X| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)|$, kde symbol $\mathbb{R}^+$ značí množinu všech kladných reálných čísel.

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)
Najděte takové dvě nekonečné DUMy A, B, aby platilo $A \cdot B \simeq B$. Zdůvodněte, proč se jedná o DUMy, a popište příslušnou rostoucí bijekci.

Do nekonečna a ještě dál

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE — VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Na nějakém celém čísle na číselné ose sedí neviditelná blecha. V každém skoku skočí o pevně dané nenulové přirozené číslo n doleva nebo doprava (při každém skoku si může znovu vybrat směr). Mirek se snaží blechu chytit tak, že po každém skoku blechy položí na některé celé číslo past. Blechu chytí, pokud položí past na blechu nebo blecha ve svém skoku skočí do již dříve položené pasti. Ukažte, že Mirek může pasti pokládat tak, aby blechu po konečně mnoha skocích zaručeně chytil, i když nezná počáteční pozici blechy, konstantu n ani směry, kterými blecha skáče.

(Mirek Olšák)

ŘEŠENÍ:

Nejprve dokážeme, že možných dvojic (m, n), kde m je počáteční pozice a n délka skoku, je spočetně mnoho. Možných výchozích pozic je stejně jako celých čísel, a těch je stejně jako přirozených. Délka skoku je přirozené číslo, takže dvojic, které nás zajímají, je stejně jako dvojic přirozených čísel. A těch je stejně jako přirozených čísel.[1]

To ale znamená, že tyto dvojice je možné očíslovat přirozenými čísly a jednu po druhé projít. V nějakém kroku budeme například předpokládat, že parametry blechy mají konkrétní hodnoty (m_k, n_k). Než jsme se dostali k tomuto předpokladu, uplynulo již i tahů (rozdělených do $k-1$ skupin, během nichž jsme postupně lovili blechy s parametry (m_1, n_1) až (m_{k-1}, n_{k-1})). Pak můžeme postupovat následovně: Položíme past na číslo $m_k + n_k \cdot i$ (pokud tam již není) a pak na $m_k - n_k \cdot (i+1)$. Tím je blecha uvězněna na konečném úseku přímky. Následně v libovolném pořadí projdeme všechny pozice, které uvězněné bleše zbyly – tedy čísla tvaru $m_k + l n_k$ pro $l \in \mathbb{Z} \cap \langle -i, i-1 \rangle$.

Takto jsme prošli postupně všechny možnosti, kde blecha mohla začínat a o kolik mohla skákat. Vyřešení každé z nich nám zabralo konečně mnoho tahů, takže jsme ji bez ohledu na počáteční polohu a délku skoku po konečném počtu tahů chytili.

ALTERNATIVNÍ ŘEŠENÍ:

Tahy si rozdělíme do trojic. V prvním tahu k-té trojice položíme past na pole $k! + k$, v druhém na pole $-(k! + k)$ a ve třetím na pole (případně jedno z polí), na kterém ještě není past a které je z takových polí nejblíže nule.

Protože faktoriál roste rychleji než libovolná lineární funkce, dosáhneme za určitou dobu toho, že políčka, která budeme zabírat v prvních a druhých tazích, budou od nuly dále než blecha. Všimněme si, že se blecha pohybuje pouze po číslech, která dávají po dělení n zbytek m. Kdyby tedy $k! + k$ nejen bylo dost velké, ale zároveň dávalo po dělení n zbytek m, podařilo by se nám v k-tém tahu uvěznit blechu na konečném úseku přímky.

Pro $k \geq n$ platí $n \mid k!$. To ale znamená, že $k! + k$ se modulo n mění při každém zvýšení k o jedna. Proto projde během každých n po sobě jdoucích tahů každou možnou zbytkovou třídu modulo n. Tím tedy bude blecha uvěžěna v nějakém konečném intervalu. Pomocí třetího kroku naší trojice celý tento interval časem vyplníme pastmi, a tak blechu chytíme.

[1] Toto tvrzení je dokázáno v textu seriálu.

Alternativní řešení 2:
Zvolíme si funkci $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která roste rychleji než lineárně (například x^2 nebo x^x), a budeme postupovat následovně: Pokaždé, když budou pasti právě na všech číslech mezi nejpravější a nejlevější pastí, zvolíme si $k = f(i)$, kde i je počet již položených pastí. Následně budeme pokládat pasti popořadě na k, $-k$, $k-1$, $-k+1$ a tak dále, dokud opět nebudou pasti na všech číslech mezi k a $-k$.

Budiž nyní opět m počáteční poloha blechy a n délka skoku. Maximální vzdálenost blechy od nuly po jejím l-tém skoku můžeme vyjádřit jako $\left||m|+l\cdot n\right|$. V některém z tahů, ve kterém položíme popořadě i-tou past na $f(i)$-té pole, bude splněna nerovnost

$$\left||m| + in + 2n^2\right| < f(i) - n.$$

Bude platit díky tomu, že levá strana roste lineárně (jediná proměnná je i, zbytek jsou konstanty), kdežto pravá strana roste rychleji. Nyní se podíváme, co tato nerovnost vyjadřuje.

Výraz $\left||m| + in + 2n^2\right|$ je maximální vzdálenost blechy od nuly po $i+2n$ skocích, kdežto $f(i)-n$ vyjadřuje vzdálenost od nuly, v jaké se nám podařilo (v $(i+2n)$-tém kroku) položit na n po sobě jdoucích čísel pasti (a to stejný počet symetricky jak na kladné, tak na záporné části osy). Podařilo se nám tedy vytvořit bariéru, kterou blecha neumí přeskočit, a rozhodně se k ní nedostala dříve, než jsme ji dostavěli. Nyní je tedy blecha lapena mezi dvěma barikádami, a následným zaplněním prostoru mezi nimi ji nutně chytíme.

Poznámky:
Téměř každé řešení, které dorazilo, bylo originál, ať už volbou funkce f u řešitelů postupujících podle poslední verze řešení, nebo popisem seřazení dvojic počáteční polohy blechy a délky jejího skoku při řešení prvního typu.

Určitě se hodí poznamenat, že první řešení má oproti zbývajícím dvěma jednu výhodu: dalo by se úplně stejně aplikovat i v případě, že by blecha skákala například po racionálních číslech o racionální hodnotu, či v jakémkoli jiném případě, kdy je možno všechny možné počáteční konfigurace zapsat pomocí nějaké n-tice přirozených čísel a zároveň platí, že umíme blechu v konečném počtu kroků chytit, známe-li tento počáteční stav a počet kroků, který od začátku hry uběhl.

Pozitivně mě překvapilo, že většina řešitelů vyřešila úlohu správně nebo skoro správně, a i většina špatných řešení obsahovala alespoň správnou myšlenku. Jestliže někde byla chyba, tak zpravidla v tom, že některá tvrzení nebyla dokázána, nebo v tom, že řešiteli uniklo, že mu z jeho konstrukce může umět blecha pro nějaká m, n vždy utéct. *(Viki Němeček)*

Úloha 2.

Nechť X je množina všech bijekcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ukažte $|X| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)|$, kde symbol $\mathbb{R}^+$ značí množinu všech kladných reálných čísel.

(Mirek Olšák)

Řešení:
Abychom dokázali, že $|X| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)|$, stačí najít prosté zobrazení g z $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ do X. Podmnožině kladných reálných čísel M přiřadíme následující reálnou funkci f:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{pokud } |x| \in M \\ x, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tímto způsobem jsme definovali zobrazení g, můžeme tedy psát $g(M) = f$.

Je funkce f bijekcí? Pokud mají dvě čísla $a \neq b$ různé absolutní hodnoty, zobrazí se na různá čísla. Pokud je mají stejné, jedná se o opačná čísla, a ta se zobrazí na vzájemně opačné hodnoty – buď se prohodí, nebo obě zůstanou na místě. Proto je f prostá. Dále je funkce f také na, neboť pro reálné číslo a se $-a$ zobrazí na a, pokud $|a| \in M$, a jinak se a zobrazí na samo na sebe. Z toho, že f je prostá a na, plyne, že je skutečně bijekcí.

Víme tedy, že g zobrazuje z $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ do X. Nyní stačí ukázat, že g je prosté. Nechť N je podmnožina kladných reálných čísel různá od M. Určitě existuje takové kladné reálné x, že x leží v právě jedné z množin M, N. Pak se hodnota $f(x)$ pro tyto dvě podmnožiny liší, neboť v jednom případě dostaneme x a v druhém $-x$.

Poznámky:

Potěšilo mě, že se navzdory obtížnosti a abstraktnímu tématu seriálu sešlo mnoho správných řešení. Řešitelům, kteří postupovali jako ve vzorovém řešení, jsem udělil $+i$. Častou chybou byla konstrukce funkce z $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ do X, která využívala očíslování podmnožiny M přirozenými čísly. Podmnožina M může být i nespočetná, a proto takové očíslování nemusí existovat. *(Anh Dung „Tonda“ Le)*

Úloha 3.

Najděte takové dvě nekonečné DUMy A, B, aby platilo $A \cdot B \simeq B$. Zdůvodněte, proč se jedná o DUMy, a popište příslušnou rostoucí bijekci.

(Mirek Olšák)

Řešení:

Uvažme množinu všech konečných posloupností přirozených čísel, do které ještě přidáme prázdnou posloupnost $\emptyset$. Tuto množinu uspořádáme primárně podle délky a sekundárně standardně lexikograficky odzadu. Máme tedy

$$\emptyset < (0) < (1) < (2) < \cdots < (0,0) < (1,0) < (2,0) < \cdots < (42,42,42) < (43,42,42) < \cdots .$$

Toto uspořádání je dobré, protože je lineární a každá podmnožina má nejmenší prvek – nejprve z podmnožiny vezmeme nejkratší posloupnosti a mezi nimi pak najdeme tu nejmenší v lexikografickém uspořádání. Popsaná množina posloupností je tedy DUM, označme ji jako X. Nyní definujme zobrazení $f\colon \omega \cdot X \to X$ jako

(1) $f\big((0,\emptyset)\big) = \emptyset$,
(2) $f\big((n,\emptyset)\big) = (n-1)$ pro $n > 0$,
(3) $f\big(n,(x_1,x_2,\ldots,x_k)\big) = (n,x_1,\ldots,x_k)$ pro $k \geq 1$.

Tato funkce je definovaná pro každou dvojici (n,x), kde $n \in \omega$ a $x \in X$, a je zřejmě prostá a na – body (1) a (2) pokryjí nejvýše jednoprvkové posloupnosti a bod (3) zbytek. Funkce f je tedy bijekce. Je rostoucí? Pokud $(m,x) < (n,y)$ pro $(m,x),(n,y) \in \omega \cdot X$, znamená to, že nastává některá z těchto možností:

(i) $x = y = \emptyset$. Pak musí být $m < n$, a tedy i $f\big((m,x)\big) < f\big((n,y)\big)$ vzhledem k bodům (1) a (2).
(ii) $\emptyset = x < y$. $f\big((m,x)\big)$ je nejvýše jednoprvková, zatímco $f\big((n,y)\big)$ je alespoň dvouprvková.
(iii) $\emptyset < x < y$. Posloupnost $f\big((m,x)\big)$ bez prvního členu je x a posloupnost $f\big((n,y)\big)$ bez prvního členu je y; protože $x < y$ a uspořádání uvažujeme „odzadu“, dostáváme tak $f\big((m,x)\big) < f\big((n,y)\big)$.
(iv) $\emptyset < x = y$. Zde musí být $m < n$. Vztah $f\big((m,x)\big) < f\big((n,y)\big)$ plyne z porovnání prvních prvků těchto posloupností.

Našli jsme rostoucí bijekci a dokázali tak $\omega \cdot X \simeq X$, takže DUMy $A = \omega$ a $B = X$ vyhovují zadání.

Poznámky:

Jak se na řešení dalo přijít? To se v první části těchto poněkud delších poznámek pokusím popsat. Součin $A \cdot B$ si můžeme představit tak, že postupně procházíme[2] prvky B (rostoucím způsobem

[2] Můžete namítnout, že jiné nekonečné DUMy než ω takto celé projít neumíme, a budete mít pravdu. Nicméně je tento pohled stále užitečný, takže si pojďme pojďme představit „procházení“ libovolně dlouhých DUM. Koneckonců přesně to umí transfinitní indukce a rekurze.

vzhledem k jejímu uspořádání), ale místo každého prvku projdeme kopii DUMy A, opět vzestupně vzhledem k uspořádání A. DUMa A musí být nekonečná, ale zároveň tím, že budeme v B brát místo každého prvku kopii A, chceme dostat stejný typ. Dává tedy smysl volit A co nejmenší, tedy jako ω. Za B chceme naopak zvolit co největší DUMu, aby ji násobení moc nezměnilo. V seriálu je uvedeno, že $2 \cdot \omega \simeq \omega$, obdobně to platí i pro $n \cdot \omega$. Kdyby tedy mohla být množina A konečná, je úloha vyřešena. Bohužel ale $\omega \cdot \omega \not\simeq \omega$ a podobně ani $\omega \cdot (\omega \cdot n) \not\simeq \omega \cdot n$. Pro nekonečné A je tedy potřeba volit větší B. Podívejme se, jaké větší DUMy známe. Co takhle zkusit $\omega \cdot \omega$? Podle definice násobení je to množina všech dvojic přirozených čísel s porovnáváním primárně podle druhé složky. A co $\omega \cdot (\omega \cdot \omega)$? Bude to vlastně to samé jako $(\omega \cdot \omega) \cdot \omega$? Opět použitím pouhé definice násobení si snadno rozmyslíme, že obojí odpovídá trojprvkovým posloupnostem přirozených čísel s lexikografickým uspořádáním – v prvním případě přidáváme k dvojicím číslo na tu nejméně důležitou – první – pozici a ve druhém před číslo přidáváme méně důležitou dvojici. Ze stejného důvodu dává smysl definovat pro $n > 1$ DUMu $\omega^n = \omega \cdot \omega^{n-1} = \omega^{n-1} \cdot \omega$ jako lexikograficky uspořádané posloupnosti n přirozených čísel. Žádnou takovou DUMu nemůžeme použít jako B (pro $A = \omega$), protože vynásobení ω zvýší exponent o jedničku.

Mohli bychom použít množinu nekonečných posloupností? Tu by podle výše použitých úvah přenásobení ω určitě nezměnilo, ale máme jiný problém – nekonečné posloupnosti s lexikografickým uspořádáním netvoří ani spočetnou, ani dobře uspořádanou množinu! Pro nespočetnost viz seriál a nekonečnou klesající posloupnost pro vyvrácení dobrého uspořádání jistě zvládnete najít sami. Abychom se existenci této posloupnosti vyhnuli, nezbývá už než zkusit konstrukci popsanou výše. :-)

Úloha byla obtížná a obdrželi jsme pouze tři správná řešení, všechna myšlenkově shodná se vzorovým. Nejčastějším chybou těch ostatních byla volba $A = B = \omega$ s bijekcí $\omega \cdot \omega \to \omega$ popsanou v kapitole seriálu věnované Hilbertovu hotelu. Tato bijekce je dobrým zdůvodněním toho, že jsou obě příslušné množiny stejně velké, ale není rostoucí vzhledem k uspořádání DUMy $\omega \cdot \omega$. Dá se sice říct, že bijekce $\omega \to M$ čísluje prvky množiny M, takže je „rostoucí", to jsme ale na M přenesli uspořádání z ω, takže o jejím vlastním uspořádání (pokud to byla DUM) z toho nic usoudit nemůžeme. DUM X ze vzorového řešení se obvykle nazývá ω^ω a jistou představu o ní lze získat studiem zajímavého obrázku[3]. *(David Hruška)*

[3] *https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e6/Omega-exp-omega-labeled.svg*