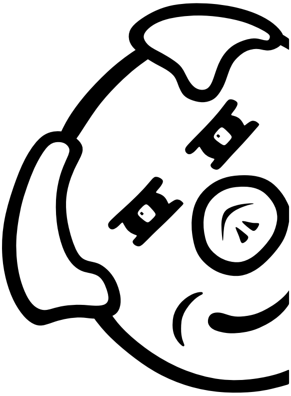
Matematický korespondenční seminář

Milý příteli!



Rok uběhl jako voda a máme tu konec pětatřicátého ročníku. Letos nám alespoň jednu úlohu poslalo neuvěřitelných 272 řešitelů, což je s přehledem největší účast za celou PraSečí historii. Děkujeme Vám!

Chtěli bychom pogratulovat letošnímu vítězi *Danilu Koževnikovi*, který v jarní části dotáhl drobnou ztrátu a porazil o 4 body loňského vítěze *Pavla Turka*, který se umístil na druhém místě. Třetí místo po výborném výkonu v Myšmaši nakonec těsně vybojoval *Kuba Löwit*.

Pokud se ti nedařilo tak jako vítězné trojici, nezoufej. Ceny dostane padesát nejlepších a mimo to budou úspěšní řešitelé jarní části, kteří nebyli v posledním ročníku střední školy, pozváni na podzimní soustředění, které je samozřejmě tou nejlepší možnou cenou vůbec.

Přejeme Ti pěkný závěr školního roku a pestré prázdniny. Těšíme se na Tebe v dalším ročníku PraSete, či pokud jsi již maturoval(a), tak třeba i u nás na matfyzu.

Za organizátory

Tomáš Novotný

Obsah závěrečných komentářů

- Návrhy témat seriálu na příští rok
- Vzorová řešení 2., 3. a 4. jarní a 3. seriálové série
- Výsledkové listiny včetně závěrečného pořadí
- Příloha: Leták se zadáním 1. a 2. podzimní série 36. ročníku

Anketa a volba seriálu

Na stránce *mks.mff.cuni.cz/anketa* na Tebe čeká anketa o tom, co se Ti v PraSeti líbí a co bys naopak dělal(a) jinak. Zpětná vazba je pro nás důležitá, a proto budeme moc rádi, když ji vyplníš. V anketě můžeš hlasovat především o tématu seriálu na příští rok. Upoutávky k jednotlivým návrhům nalezneš, když otočíš list.

Jarní soustředění

Na závěr ještě zmiňme dvě nedávná soustředění. To PraSečí proběhlo 12. – 20. března v zasněžené Hojsově Stráži na Šumavě. Kromě matematických přednášek a soutěží došlo i na rytířská klání, bloudění temnými chodbami hradu Schweinburgu a zejména neustálý boj o peníze, moc a slávu.

Náš spřátelený seminář iKS (*iksko.org*) uspořádal své páté soustředění ve Strmilově 22. – 26. března. Obvyklou záplavu matematiky nejvyšší jakosti doplňoval například pingpong nebo fotbálek, a dokonce k nám proniklo něco středověkých mravů z daleké Šumavy.

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

matfyz

Nabídka seriálů pro 36. ročník

O tématu seriálu můžeš hlasovat v anketě na stránce mks.mff.cuni.cz/anketa!

Geometrie trojúhelníka

Stále vás nepřestává fascinovat, že se výšky v trojúhelníku protínají v jednom bodě? Nejste sami. A co takhle, že onen průsečík výšek leží na jedné přímce se středem kružnice opsané a těžištěm? Nebo že se osa strany protíná s osou protějšího úhlu na kružnici opsané? Geometrie trojúhelníka zná podobně zajímavých a pěkných tvrzení nepřeberné množství a tento seriál nabízí jejich výběr i vám. Pojďme společně prozkoumat kousek světa syntetické geometrie, jehož vývoj započal už ve starém Řecku. Většina technik, které si při tomto výletu osvojíme, se vám navíc bude hodit při řešení Matematické olympiády i jiných soutěží. Můžete se těšit na spoustu obrázků a hlavně, nikdy už se nezaleknete nápisu $\alpha\gamma\varepsilon\omega\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\eta\tau\iota\varsigma\ \mu\eta\delta\varepsilon\acute{\iota}\varsigma\ \varepsilon\acute{\iota}\sigma\iota\tau\omega$[1].

Seriálem Tě provedou *David Hruška* a *Rado van Švarc.*

Grupy

Ve 20. století se dvěma evropským matematikům Abelovi a Galoisovi podařilo dokázat, že neexistuje vzoreček na hledání kořenů polynomů pátého a vyššího stupně. Využili při tom něčeho, co se dá nazvat symetrií rovnic, a položili při tom základy teorie grup. Od té doby se teorie grup stala rozsáhlým oborem s mnoha aplikacemi, objevuje se všude, kde se vyskytuje nějaká symetrie, například při počítání možných sestavení náhrdelníků z různobarevných korálku nebo počtu způsobů obarvení stěn krychle, při řešení Rubikovy kostky a dalších hlavolamů nebo například při šifrování eliptických křivek. V našem seriálu se s grupami nejdříve pořádně seznámíme, podíváme se, jak souvisí s Rubikovou kostkou a dalšími hlavolamy a zkusíme si dokázat nějaké těžší strukturální věty, které nám posléze umožní klasifikovat konečné grupy malých řádů.

Seriálem Tě provedou *Anh Dung „Tonda“ Le* a *Martin Čech.*

[1] Nevstupuj, kdo neznáš geometrii.

(Od)mocniny

2. jarní série — Vzorové řešení

Úloha 1. (92; 88; 2,85; 3,0)

Najděte největší přirozené číslo, pro které platí, že ať se podíváme na jakékoli dvě jeho po sobě jdoucí cifry, dostaneme druhou mocninu nějakého přirozeného čísla. *(Pepa Svoboda)*

Řešení:

Nejprve si vypíšeme všechny dvojciferné druhé mocniny přirozených čísel. Ty jsou 16, 25, 36, 49, 64 a 81. Nyní se podíváme, jak je možné je dát za sebe tak, aby vzniklo co největší číslo.

Číslo 25 můžeme rovnou vyloučit, protože na něj nelze ani z jedné strany nijak navázat, muselo by tedy být samotné, a například samotné číslo 81, které určitě splňuje zadání, je větší než 25. Obdobně můžeme vyloučit číslo 36. Kdyby totiž bylo v hledaném čísle, muselo by být hned na nejlevější pozici, protože na něj nelze nijak navázat zleva. V každém takovém čísle ale můžeme posloupnost číslic 36 nahradit posloupností 816 a dostaneme číslo větší též splňující podmínku ze zadání.

Všimneme si, že každé zbývající číslo má jak svého pravostranného, tak levostranného souseda (pokud ho vůbec má) definovaného jednoznačně (každá cifra se jak na místě desítek, tak na místě jednotek vyskytuje nejvýše jednou). Nyní pokud začneme od libovolného čísla ze zbývající čtveřice a budeme přidávat číslice jediným možným způsobem jak napravo, tak nalevo, dokud to půjde, vždy se dostaneme k číslu 81649, což je hledané nejvyšší možné číslo.

Poznámky:

Téměř všichni řešitelé se dostali k hledanému číslu. Nejčastější z méně důležitých chyb bylo to, že mnozí považovali i čísla 1, 4 a 9 (mnohdy zapsaná jako 01, 04 a 09) za dvouciferná. Z podstatnějších chyb pak často chyběl jakýkoliv důkaz o tom, že nalezené číslo je největší s danou vlastností, nebo byl přítomen pouze jeho náznak. Z dobré třetiny řešení nebylo zřejmé, že takové číslo vůbec existuje (to jest že není možné, aby se čísla při přidávání nějak „zacyklila“, a tedy existovalo libovolně velké číslo hledaných vlastností). *(Viki Němeček)*

Úloha 2. (81; 54; 2,01; 3,0)

Pro která prvočísla p platí, že výraz $2^p + p^2$ je také prvočíslo? *(Rado Švarc)*

Řešení:

Nejprve ošetříme zvlášť prvočísla 2 a 3. Spočítáme, že $2^2 + 2^2 = 8$, což není prvočíslo, zatímco $2^3 + 3^2 = 17$, což je prvočíslo. Dále budeme uvažovat prvočíslo $p > 3$.

Varianta bez kongruencí:

Nechť p není dělitelné třemi. Pak existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $p = 3m + 1$ nebo $p = 3m - 1$. Výraz p^2 tedy můžeme zapsat jako $9m \pm 6m + 1$. Vidíme, že první dva členy jsou dělitelné třemi. Nyní indukcí dokážeme, že $3 \mid 2^n + 1$ pro každé liché n (a tedy i pro p).

Nejprve provedeme bázový krok pro $n = 1$:

$$3 \mid 2^1 + 1 = 3.$$

Předpokládejme dále, že pro n tvrzení platí. Rádi bychom dokázali, že pak platí i pro $n+2$.[2] Víme, že

$$2^{n+2} + 1 = 4 \cdot 2^n + 1 = 3 \cdot 2^n + 2^n + 1,$$

z indukčního předpokladu máme $3 \mid 2^n + 1$ a zřejmě platí $3 \mid 3 \cdot 2^n$, takže dohromady $3 \mid 2^{n+2} + 1$. Tím je indukce hotová.

Protože $p > 3$, je p liché, a tedy $3 \mid 2^p + 1$. Dostáváme

$$3 \mid 2^p + 1 + 9m^2 \pm 6m = 2^p + (3m \pm 1)^2 = 2^p + p^2.$$

Tedy výraz je dělitelný třemi a zároveň je větší než tři (pro všechna $p > 3$ platí $2^p > 8$), nemůže to tedy být prvočíslo. Jediným řešením je prvočíslo 3.

Varianta s kongruencemi:

Buď $p \equiv 1 \pmod 3$, pak $p^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 3$, nebo $p \equiv 2 \pmod 3$, pak $p^2 \equiv 2^2 = 4 \equiv 1 \pmod 3$. Zároveň p musí být liché, takže $2^p \equiv (-1)^p = -1 \pmod 3$. Dostáváme

$$2^p + p^2 \equiv -1 + 1 = 0 \pmod 3.$$

Protože $2^p + p^2 > 3$ (pro všechna $p > 3$ platí $2^p > 8$), nemůže to být prvočíslo. Jediným řešením je tedy prvočíslo 3.

Poznámky:

Sešla se spousta řešení se správnou myšlenkou, často jste ale bojovali se zápisem. Nakonec jsem uznávala i nepříliš formální řešení. Těm, kteří si nerozumějí s indukcí nebo kongruencemi, vřele doporučuji podívat se na ně třeba do naší knihovny, jedná se o velmi užitečné nástroje. Zkušenějším řešitelům bych ráda připomněla, že čím lehčí úloha, tím víc je potřeba dokazovat i věci, které v osmičce stačí konstatovat. Úplně by stačilo odvolat se na kvadratické zbytky, ale nějaké zdůvodnění uvést musíte. *(Anička Doležalová)*

Úloha 3.

(65; 47; 1,98; 2,0)

Jsou dána kladná reálná čísla a, b, c splňující nerovnosti $a^b > b^a$ a $b^c > c^b$. Ukažte, že $a^c > c^a$.
(Matěj Konečný)

Řešení:

Protože všechna tři čísla a, b, c jsou kladná, jsou kladné i všechny strany nerovností v zadání. Navíc je můžeme mocnit na libovolný kladný exponent a jejich platnost se nezmění. Umocněme tedy první nerovnost na c a druhou na a (abychom získali u b stejné exponenty a mohli pak dát obě nerovnosti dohromady). Dostaneme tak $a^{bc} > b^{ac}$ a $b^{ca} > c^{ba}$, celkem tedy máme $a^{bc} > b^{ac} > c^{ab}$. Všechna čísla v druhé nerovnosti jsou opět kladná, můžeme tedy obě strany umocnit na $1/b$, čímž dostaneme $a^c > c^a$, což jsme měli dokázat.

---

[2] Pozor, nedokazujeme z výroku pro n výrok pro $n + 1$, jako se obvykle u indukce dělá, protože se zajímáme pouze o lichá čísla.

Poznámky:

Protože úloha byla na trojku poměrně lehká a nejtěžší část byla rozmyslet si, že všechny úpravy opravdu zachovávají nerovnost, rozhodl jsem se být přísný a strhnout bod všem, kteří tyto úpravy nijak neokomentují – stačila poznámka, že všechna čísla jsou kladná a můžeme tedy úpravy provést. Za stránku popsanou výpočty bez jakéhokoliv komentáře obecně málokdy dostanete plný počet bodů.

Matěj Doležálek si vysloužil imaginární bod za to, že opravdu pořádně zdůvodnil, že uvedené úpravy lze provést – je tomu tak proto, že mocninná funkce $f(x) = x^n$ je rostoucí na kladných číslech.

Někteří nerovnosti logaritmovali a pak je násobili, což ale samozřejmě obecně nefunguje: i pro kladná čísla totiž logaritmus nabývá záporné hodnoty a při násobení nerovností je třeba vědět, zda násobíte kladným, či záporným číslem. Našlo se však i pár řešitelů, kteří logaritmovali a vyhnuli se diskutování znaménka tím, že nerovnosti násobili pouze čísly, která byla ze zadání kladná. Na závěr bych chtěl všechny řešitele pochválit, a sice proto, že všichni postupovali od známých nerovností k neznámé a nikoliv naopak. *(Martin Čech)*

Úloha 4. (76; 72; 4,59; 5,0)

Dokažte, že

$$\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\cdots+\sqrt[2016]{2016}}}<2.$$

(Matěj Konečný)

Řešení:

Nejprve si dokážeme zdánlivě nesouvisející pomocné tvrzení. Pro každé přirozené $n > 2$ platí $n + 2 < 2^n$. Důkaz provedeme pomocí matematické indukce. Pro $n = 3$ tvrzení platí, neboť $3 + 2 < 2^3$. V indukčním kroku předpokládejme, že uvedené tvrzení platí pro nějaké $n = k > 2$, dokážeme jej pro $n = k + 1$. Platí

$$(k+1)+2=k+2+1<2^k+1<2^{k+1},$$

čímž je pomocné tvrzení dokázáno. Protože jsou obě strany pomocné nerovnosti nezáporné, můžeme ji odmocnit a pro každé přirozené $n > 2$ dostáváme ekvivalentně

$$\sqrt[n]{n+2}<2. \qquad [1]$$

Nyní označme $a_{2016} = \sqrt[2016]{2016}$. Dále definujme konečnou posloupnost $a_n = \sqrt[n]{n+a_{n+1}}$ pro $n = 2015, 2014, \ldots, 2$. Nyní indukcí dokážeme, že $a_n < 2$ pro každý člen této posloupnosti. Platí $a_{2016} = \sqrt[2016]{2016} < \sqrt[2016]{2^{2016}} = 2$, což považujeme za bázový krok pro $n = 2016$. V indukčním kroku ukážeme, že pokud tvrzení platí pro $n + 1 > 2$, tak platí i pro n. Máme totiž

$$a_n=\sqrt[n]{n+a_{n+1}}<\sqrt[n]{n+2}\le 2 \quad \text{dle [1]}.$$

Odtud dostáváme $a_2 < 2$, ale a_2 je vlastně levá strana kýžené nerovnosti, což jsme měli dokázat.

Poznámky:

Udělovala jsem plný počet bodů i řešitelům, kteří uvedené pomocné tvrzení nedokazovali, neboť jsem uvěřila, že je vidět, že exponenciální funkce roste rychleji než lineární.

Objevili se i řešitelé, kteří nalezli extrém funkce $\sqrt[n]{n}$ pomocí diferenciálního počtu. To je samozřejmě dovolená technika, chci jen poukázat na to, že v PraSeti zadáváme úlohy tak, aby derivovat nebylo nutné.

(Míša Hubatová)

Úloha 5.

(33; 25; 3,76; 5,0)

Pepa má na kartičkách napsaná všechna přirozená čísla od jedné do 10^{2016}. Z dlouhé chvíle se rozhodl umocnit je na všechna na 2016 a následně sečíst. Určete posledních 1008 cifer čísla, které mu vyjde. *(Rado Švarc)*

Řešení:

Posledních 1008 cifer nějakého čísla a je zbytek po dělení a číslem 10^{1008}, neboli $a \bmod 10^{1008}$. V našem případě tedy potřebujeme zjistit

$$\sum_{i=1}^{10^{2016}} i^{2016} \pmod{10^{1008}}.$$

Pokud si naši sumu rozdělíme na části po 10^{1008} členech, tak dostaneme

$$\sum_{i=1}^{10^{2016}} i^{2016} = \sum_{j=0}^{10^{1008}-1} \sum_{i=1}^{10^{1008}} (j \cdot 10^{1008} + i)^{2016}.$$

Vlastnosti kongruencí zaručují, že součet ani součin modulo n nezměníme, pokud sčítance, respektive činitele vymodulíme n (jinak řečeno, pokud se díváme na posledních n cifer výsledku, můžeme se dívat jen na posledních n cifer členů), proto platí

$$\sum_{j=0}^{10^{1008}-1} \sum_{i=1}^{10^{1008}} (j \cdot 10^{1008} + i)^{2016} \equiv \sum_{j=0}^{10^{1008}-1} \sum_{i=1}^{10^{1008}} i^{2016} \pmod{10^{1008}},$$

a protože j se v této dvojsumě nevyskytuje, tak platí

$$\sum_{j=0}^{10^{1008}-1} \sum_{i=1}^{10^{1008}} i^{2016} \equiv 10^{1008} \cdot \sum_{i=1}^{10^{1008}} i^{2016} \pmod{10^{1008}}.$$

Takže vidíme, že posledních 1008 cifer našeho součtu jsou samé nuly.

Poznámky:

Většina došlých řešení byla správná a používala stejnou myšlenku, několik málo jedinců navíc postupovalo po cifrách. Výhoda tohoto řešení je, že se dá lehce dokázat i silnější tvrzení, a to, že posledních 2015 cifer budou samé nuly. Špatná řešení se většinou starala jen o poslední cifry sčítanců, což samozřejmě nejde. *(Honza Soukup)*

Úloha 6.

(41; 31; 3,46; 5,0)

Dokažte, že $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2016}$ se dá zapsat jako rozdíl druhých odmocnin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel. *(Rado Švarc)*

Řešení:

Indukciou ukážeme, že pre každé n prirodzené sa výraz $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}$ dá napísať ako $a_n - b_n\sqrt{2}$, kde a_n, b_n sú prirodzené čísla, pre ktoré platí $a_n^2 = 2b_n^2 + 1$. Potom budeme mať

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n} = \sqrt{a_n^2} - \sqrt{2b_n^2} = \sqrt{a_n^2} - \sqrt{a_n^2 - 1}.$$

Z toho už okamžite dostaneme požadované tvrdenie pre $n = 1008$.

Pre $n = 1$ je

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n} = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Predpokladáme, že tvrdenie platí pre n, a dokážeme, že potom platí aj pre $n+1$.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n} &= a_n - b_n\sqrt{2}\\ \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+2} &= \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2} =\\ &= \left(a_n - b_n\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right) = 3a_n + 4b_n - \left(2a_n + 3b_n\right)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Označíme $a_{n+1} = 3a_n + 4b_n$ a $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$. Kedže a_n, b_n sú prirodzené, tak aj a_{n+1}, b_{n+1} sú prirodzené. Ostáva ukázať, že platí $a_{n+1}^2 = 2b_{n+1}^2 + 1$. Platí:

$$\begin{aligned}a_n^2 &= 2b_n^2 + 1,\\ 9a_n^2 + 24a_nb_n + 16b_n^2 &= 8a_n^2 + 24a_nb_n + 18b_n^2 + 1,\\ \left(3a_n + 4b_n\right)^2 &= 2\left(2a_n + 3b_n\right)^2 + 1,\\ a_{n+1}^2 &= 2b_{n+1}^2 + 1.\end{aligned}$$

Tým je dôkaz hotový.

Jiné řešení:

Podľa binomickej vety rozvinieme $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2016}$. Sčítame členy s párnou mocninou $\sqrt{2}$ a členy s nepárnou mocninou $\sqrt{2}$ a dostaneme

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2016} = A - B\sqrt{2},$$

kde A, B sú prirodzené, pretože záporné členy sú práve tie, pri ktorých je $\sqrt{2}$ s nepárnou mocninou. Podľa binomickej vety rozvinieme i $\left(\sqrt{2}+1\right)^{2016}$. Sčítame členy s párnou mocninou $\sqrt{2}$ a členy s nepárnou mocninou $\sqrt{2}$ a dostaneme

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{2016} = A + B\sqrt{2}.$$

To platí, pretože $\left(\sqrt{2}+1\right)^{2016}$ má po roznásobení rovnaké koeficienty ako $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2016}$ až na znamienko pri nepárnych mocninách $\sqrt{2}$. Vynásobíme $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2016}$ a $\left(\sqrt{2}+1\right)^{2016}$:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2016}\left(\sqrt{2}+1\right)^{2016} &= \left(A - B\sqrt{2}\right)\left(A + B\sqrt{2}\right),\\ \left(\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)\right)^{2016} &= A^2 - 2B^2,\\ (2-1)^{2016} &= A^2 - 2B^2\\ A^2 - 1 &= 2B^2.\end{aligned}$$

A teda dostávame

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2016} = \left(A - B\sqrt{2}\right) = \sqrt{A^2} - \sqrt{2B^2} = \sqrt{A^2} - \sqrt{A^2-1}.$$

Hľadaná dvojica prirodzených čísel je A^2 a $A^2 - 1$.

Poznámky:

Mnoho riešení používalo indukciu všemožnými spôsobmi. Častou chybou potom bolo, že nič nepredpokadali o číslach pod odmocninou. Po vynásobení $(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})(\sqrt{2}-1)$ sčítali najprv členy s $\sqrt{2}$ a potom tie bez. Nakoniec obe čísla umocnili na druhú. Takto dostali dve čísla, ktoré sa navzájom líšili o 1. Bohužiaľ ale zabudli dokázať, že sú prirodzené (na to bolo treba postupovať trocha opatrnejšie alebo ešte raz použiť iný, zvlášť elegantný postup, ktorým by si vyslúžili $+i$).

(Marta Kossaczká)

Úloha 7.

(6; 4; 3,33; 5,0)

Přirozené číslo n nazveme třítuctové, jestliže pro každé prvočíslo p, které dělí n, platí, že p^{36} dělí n a p^{37} už ne. Rado a Matěj mají každý konečnou množinu svých oblíbených třítuctových čísel. Zjistili, že oba mají ve svých množinách stejný počet čísel. Navíc se součin všech čísel v Radově množině rovná součinu všech čísel v Matějově množině, zatímco součty čísel v jednotlivých množinách jsou různé. Ukažte, že se součet čísel z Matějovy množiny liší od součtu čísel z Radovy množiny alespoň o milión.

(Rado Švarc)

Řešení:

Uvažujme množinu prvočísel $P = \{2, 3, 5, 7, 13, 19, 37\}$ a všimněme si, že pro každé $p \in P$ platí $p-1 \mid 36$. To znamená, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $p \in P$ existuje k takové, že $n^{36} = n^{k(p-1)} = \left(n^k\right)^{p-1}$. Pokud $p \mid n$, tak máme $n^{36} \equiv 0 \pmod{p}$, v opačném případě z Malé Fermatovy věty plyne $n^{36} = \left(n^k\right)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Symbolem $v_p(n)$ budeme značit *p-valuaci čísla n*.[3] Z definice třítuctového čísla víme, že pro p prvočíslo a n třítuctové platí $v_p(n) \in \{0, 36\}$. To také znamená, že každé x třítuctové lze zapsat jako y^{36} pro nějaké $y \in \mathbb{N}$. I toho využijeme v důkazu následujícího pomocného tvrzení.

Lemma. *Buď X nějaká množina třítuctových čísel a $p \in P$. Označme ξ počet takových $x \in X$, pro něž platí $p \nmid x$. Potom platí*

$$\sum_{x \in X} x \equiv \xi \pmod{p}.$$

Důkaz. Definujme $X_p = \{x \in X : p \mid x\}$ jako množinu všech čísel z X dělitelných p a X_p' jako její doplněk v X. Potom

$$\sum_{x \in X} x = \sum_{x \in X_p} x + \sum_{x \in X_p'} x.$$

Podívejme se na rovnost modulo p. Víme, že každé $x \in X_p$ je kongruentní s nulou, takže i celá suma nám do součtu přispěje nulou. Proto

$$\sum_{x \in X} x \equiv \sum_{x \in X_p'} x \pmod{p}.$$

Protože každé $x \in X$ je třítuctové, existuje takové $y \in \mathbb{N}$, že $x = y^{36}$. Tedy

$$\sum_{x \in X_p'} x = \sum_{y^{36} \in X_p'} y^{36}.$$

Ale pro $x \in X_p'$ platí $p \nmid x$, takže pokud $x = y^{36}$, pak i $p \nmid y$. A podle prvního odstavce víme, že pak $y^{36} \equiv 1 \pmod{p}$, tedy

$$\sum_{x \in X_p'} x \equiv \sum_{x \in X_p'} 1 = |X_p'| \pmod{p},$$

[3] To znamená největší přirozené číslo α takové, že $p^\alpha \mid n$.

ale protože $|X'_p| = \xi$, dostáváme

$$\sum_{x \in X} x \equiv \xi \pmod{p},$$

což jsme chtěli dokázat. □

Víme, že součin čísel z množiny R (jako *Radova*) je stejný jako součin čísel z množiny M (jako *moje*). Označme tento součin jako Π. Nyní uvažujme pevné prvočíslo $p \in P$, definujme ρ jako počet čísel z R dělitelných p a analogicky μ jako počet čísel z M dělitelných p. Nakonec označme $c = v_p(\Pi)$. Protože pro třítuctová čísla n je $v_p(n) \in \{0, 36\}$, vidíme, že $c = 36\rho$, ale symetricky i $c = 36\mu$. A z toho vyplývá $\rho = \mu$.

Definujme S_M jako součet čísel z M a S_R jako součet čísel z R. Potom podle lemmatu platí $S_M \equiv |M| - \mu \pmod{p}$ a $S_R \equiv |R| - \rho \pmod{p}$. Ale protože $\rho = \mu$ a $|M| = |R|$, dostáváme

$$S_M \equiv S_R \pmod{p}.$$

Poslední kongruence platí pro každé $p \in P$, a proto podle Čínské zbytkové věty platí i pro jejich součin, tedy

$$S_M \equiv S_R \pmod{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37}.$$

Ale protože víme, že $S_M \neq S_R$, musí se lišit alespoň o $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 = 1919190 > 1000000$, čímž jsme dokázali tvrzení ze zadání.

Poznámka. Kdybychom místo Malé Fermatovy věty využili Eulerovu větu pro čísla 5, 7, 8, 13, 19, 27 a 37, dostali bychom silnější odhad, že se součty musí lišit alespoň o 69090840. (A také bychom si vysloužili $+i$.)

Poznámky:

Jak sami vidíte, úloha nakonec až tak těžká nebyla, přesto přišla pouze čtyři správná řešení. Je to asi proto, že zadání vypadalo hodně nepřístupně (*„Co je to za divné podmínky?“*, *„Proč zrovna exponent 36?“*). Pokusím se nastínit, jak se na řešení dalo přijít.

Na rozdíl od skutečného výzkumu, kdy člověk neví, které parametry jsou důležité, a které naopak nikoli, u olympiádních úloh je typicky nutné využít všechny podmínky ze zadání. Pokud tedy zadání obsahuje mnoho různých podmínek, tak sice vypadá nepřívětivě, ale jen přemýšlení nad tím, proč jsou zadané zrovna takové podmínky, může člověka navést na správnou cestu.

Proč je například exponent zrovna 36? Když na konkrétní konstantě vlastně moc nezáleží, bývá v olympiádách zvykem použít aktuální letopočet.[4] Takže čím je číslo 36 zajímavé? Je to druhá mocnina, ale především má relativně hodně dělitelů. A protože každé číslo v Matějově i Radově množině je tvaru y^{36}, můžeme si s pomocí aritmetiky exponentů představit, že pracujeme s různými mocninami (druhými, třetími, čtvrtými, šestými, ...), což navádí na nějaké použití Malé Fermatovy věty.

Další zajímavá podmínka je ta, že se součiny čísel v obou množinách rovnají. Úloha je jistě z teorie čísel a tam se typicky využívají prvočísla. Tak se podívejme na nějaké pevné prvočíslo p a uvědomme si, že (díky třítuctovosti) obsahují obě množiny stejný počet čísel dělitelných p. A protože mají obě množiny stejnou velikost, je v nich i stejný počet čísel nedělitelných p.

Tím jsme víceméně vytěžili zadání (ještě je potřeba věřit, že když je *milión* napsaný slovem, tak to víceméně znamená *nějaké veliké číslo*, a moc se tím nezabývat). Najednou už toho ale víme opravdu hodně, a to jsme zatím žádnou převratnou myšlenku nepředvedli, jen přímočaré úvahy.

[4] Dokonce i do řešení/výsledků se často vloudí – vidíte-li podivnou úlohu, jejímž řešením mají být nějaká konkrétní čísla, zkuste, zda právě aktuální letopočet *náhodou* nevyhovuje.

A přesto se úloha najednou zdá být mnohem přístupnější: Máme nějaké dvě množiny speciálních čísel takové, že pro každé prvočíslo p je v obou stejný počet prvků dělitelných p i stejný počet prvků nedělitelných p.

Teď už musí přijít ten nápad, že mezi děliteli čísla 36 je plno čísel tvaru $p-1$, zkusit se podívat na součty modulo příslušná prvočísla, vzpomenout si na Čínskou zbytkovou větu a zajásat, že součin použitých prvočísel je skutečně větší než milión.

Doufám, že všichni, kteří se strašidelnějšího zadání zalekli, ho příště naopak zkusí využít ve svůj prospěch.

(Matěj Konečný)

Úloha 8.

(17; 7; 1,82; 1,0)

Najděte všechna přirozená a taková, že pro každé přirozené n větší než 4 platí

$$2^n - n^2 \mid a^n - n^a.$$

(Rado Švarc)

Řešení:

Mějme a, které vyhovuje podmínce v zadání. Zvolme $n = p(p-1)+2$, kde p je liché prvočíslo, které nedělí a a pro které platí $p > \left|2^a - a^2\right|$. Protože $p \geq 3$, je $n \geq 8 > 4$, takže n můžeme dosadit do vztahu v zadání a platí $2^n - n^2 \mid a^n - n^a$. Pro kterékoliv b takové, že $p \nmid b$, odvodíme platnost vztahu

$$b^{p(p-1)+2} - (p(p-1)+2)^b \equiv b^2 - 2^b \pmod{p};$$

jednak totiž z Malé Fermatovy věty dostaneme

$$b^{p(p-1)+2} \equiv \left(b^{p-1}\right)^p \cdot b^2 \equiv b^2 \pmod{p},$$

jednak z pravidel počítání s kongruencemi plyne

$$(p(p-1)+2)^b \equiv 2^b \pmod{p}.$$

Pokud za b dosadíme 2, dostaneme $2^n - n^2 \equiv 2^2 - 2^2 \equiv 0 \pmod{p}$, takže $p \mid 2^n - n^2 \mid a^n - n^a$. Ovšem pokud za b dosadíme a, dostaneme $a^n - n^a \equiv a^2 - 2^a \pmod{p}$, takže spolu s $p \mid a^n - n^a$ dostáváme $p \mid a^2 - 2^a$. Ale protože $p > |2^a - a^2|$, musí být $a^2 = 2^a$.

Odtud vidíme, že a musí být mocninou dvojky, tedy $a = 2^d$ pro nějaké nezáporné celé d. Dosazením získáme $2^{2d} = 2^{2^d}$ neboli $2^d = 2d$.

Indukcí ukážeme, že pro $k \geq 3$ je $2^k > 2k$. Pro $k = 3$ skutečně dostáváme platnou nerovnost $8 > 6$. Pokud pro $k \geq 3$ tvrzení platí, potom skutečně $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 4k > 2(k+1)$, kde poslední nerovnost plyne z $k > 1$.

Aby tedy mohlo platit $2^d = 2d$, musí být $d < 3$. Navíc $d = 0$ zjevně nevyhovuje, což nás nechává s možnostmi $d = 1$ a $d = 2$ neboli $a = 2$ a $a = 4$.

Lehce ovšem ověříme, že tyto dva případy podmínce ze zadání vyhovují. Pro $a = 2$ dostáváme v zadání vztah $2^n - n^2 \mid 2^n - n^2$, který platí triviálně. Pro $a = 4$ chceme zjistit, zda je splněno $2^n - n^2 \mid 4^n - n^4$. To ale plyne z rovnosti

$$4^n - n^4 = (2^n)^2 - \left(n^2\right)^2 = \left(2^n - n^2\right)\left(2^n + n^2\right).$$

Jediná možná řešení jsou tedy $a = 2$ a $a = 4$.

Poznámky:

Úlohu vyřešilo pět lidí, tři způsobem podobným vzorovému (za což byli odměněni $+i$) a dva lehce složitějším rozborem, v němž nejprve rozborem různých dosazení ukázali, že a musí být nějakou mocninou dvojky, z čehož následně odvodili, že při $a > 4$ by dostali větší číslo dělící menší kladné číslo.

(Rado Švarc)

Průsečíky

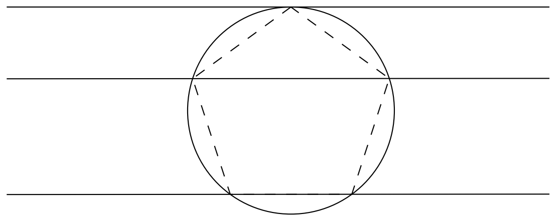
3. jarní série Vzorové řešení

Úloha 1. (81; 74; 2,75; 3,0)

Umístěte do roviny kružnici a libovolný počet přímek tak, aby vzniklo právě pět průsečíků a ty tvořily vrcholy pravidelného pětiúhelníku. *(David Hruška)*

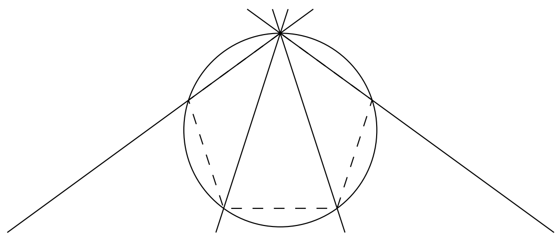
První řešení:

Umístíme do roviny kružnici. Podíváme se, kde by měl vrcholy nějaký pravidelný pětiúhelník jí vepsaný. V jednom z vrcholů zkonstruujeme tečnu ke kružnici. Další přímku proložíme dvěma sousedními vrcholy. Poslední přímku proložíme zbývajícími dvěma vrcholy. Ze symetrie pravidelného pětiúhelníka plyne, že přímky jsou rovnoběžné, a tedy žádné další průsečíky nevzniknou.



Druhé řešení:

Stejně jako v prvním řešení umístíme do roviny kružnici a podíváme se, kde by měl vrcholy nějaký pravidelný pětiúhelník jí vepsaný. Jeden z vrcholů si vybereme. Potom vytvoříme čtyři přímky – každou z přímek proložíme vybraným vrcholem a jedním ze čtyř zbývajících vrcholů.



Poznámky:

Úloha byla jednoduchá a správných řešení přišla spousta. Někteří se pustili i do konstrukce pětiúhelníka pomocí pravítka a kružítka, která už je trochu náročnější. Že takovou konstrukci lze provést, není vůbec samozřejmé – třeba pravidelný sedmiúhelník pomocí pravítka a kružítka zkonstruovat nelze. *(Tonda Češík)*

Úloha 2.

(71; 58; 2,44; 3,0)

V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle BAC| = 32^\circ$. Výška na stranu AB protíná osu úhlu u vrcholu A na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Určete velikost úhlu BCA. *(David Hruška)*

Řešení:

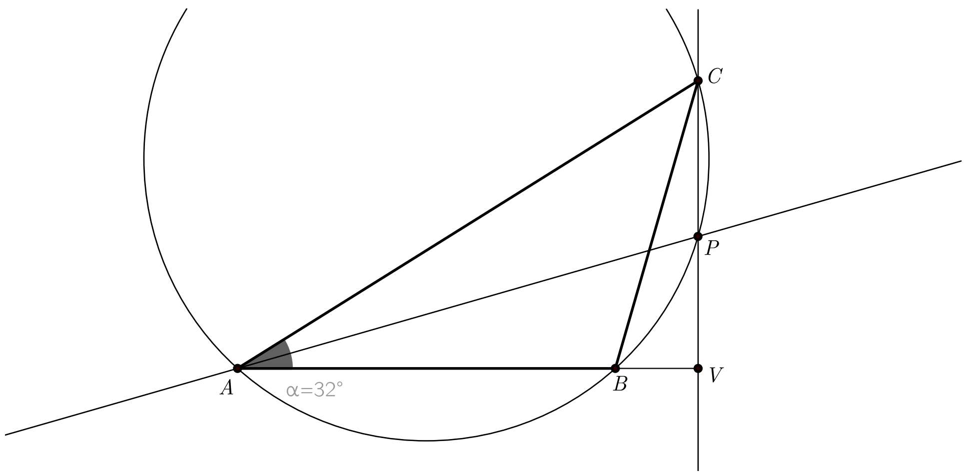
Označme průsečík výšky na stranu AB s opsanou kružnicí a osou úhlu $\sphericalangle BAC$ jako P a patu výšky z C na přímku AB jako V. Body A, B, P a C leží v tomto pořadí na jedné kružnici (viz obrázek), což plyne ze zadání a z toho, že AP je osou úhlu BAC. Z věty o obvodových úhlech plyne

$$|\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle BAP| = \frac{|\sphericalangle BAC|}{2} = 16^\circ.$$

Nyní z trojúhelníku AVC víme

$$180^\circ = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle AVC| + |\sphericalangle BCP| + |\sphericalangle BCA| = 32^\circ + 90^\circ + 16^\circ + |\sphericalangle BCA|.$$

Úhel BCA má tedy velikost 42°.



Poznámky:

Chtěl bych poděkovat těm, kteří k řešení přikládají obrázky. Velmi to usnadňuje opravování (a vám psaní řešení). Navíc v obrázku jsou věci dohledatelné – jako třeba když se překlepnete při psaní úhlu apod.

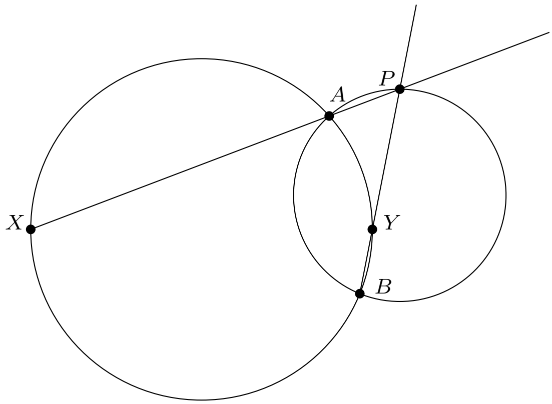
Znovu chci připomenout, že řešení spočtené počítačem či GeoGebrou nebereme a bude hodnoceno nulou, i kdyby bylo správně. *(Honza Kadlec)*

Úloha 3.

(48; 40; 2,48; 3,0)

Na kružnici k leží body A a B tak, že AB není průměrem k. Uvnitř kratšího oblouku AB se pohybuje bod Y. Spolu s ním se po k pohybuje i bod X tak, že XY je vždy průměrem k. Ukažte, že existuje kružnice ℓ taková, že průsečík AX a BY leží na ℓ pro všechny uvažované polohy bodů X a Y. *(Rado Švarc)*

Řešení:



Průsečík XA a BY označíme P. Úsečka XY je průměrem kružnice, úhel XBY je tedy pravý. Úhel AXB je pro všechny polohy bodu X stejný, protože je to obvodový úhel příslušný k tětivě AB. To znamená, že v trojúhelníku XBP se dva úhly při pohybu bodu X nemění, nemění se tedy ani ten třetí. Nyní si stačí všimnout, že body A a B se nepohybují a úsečka AB je ze všech možných bodů P vidět pod stejným úhlem. Protože všechny body P jsou ve stejné polorovině určené touto úsečkou, leží spolu s body A a B na jedné kružnici, jejíž poloměr je daný velikostí úhlu APB.

Poznámky:

Všechna správná řešení, která nám přišla, více či méně kopírovala vzorák. V mnohých řešeních se stalo, že autor našel kružnici, na které bod P leží, ale už neukázal (a mnohdy ani nemohl, neboť by to nebyla pravda), že se tato kružnice při pohybu bodů X a Y nepohybuje.

Velmi častým nešvarem bylo zavádění značení, aniž by předem bylo popsáno jinak než náčrtkem, jaké body a úhly dané symboly značí. Většinou je při používání nějakého bodu, úhlu či přímky, která není pojmenována už v zadání, vhodné, aby před jeho prvním použitím bylo napsáno, který bod přesně pojmenováváme. *(Viki Němeček)*

Úloha 4.

(63; 55; 4,21; 5,0)

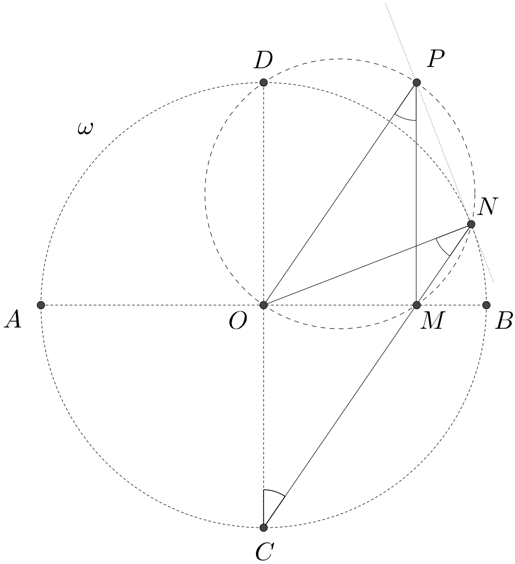
Na kružnici ω se středem O leží body A, B, C a D tak, že AB a CD jsou navzájem kolmé průměry. Bod M leží uvnitř úsečky AB. Nechť N je průsečík CM s ω různý od C. Tečna k ω vedená bodem N protne kolmici z M na AB v bodě P. Ukažte, že $|PO| = |MC|$. *(Rado Švarc)*

Řešení:

Ze všeho nejdřív si uvědomme, že pokud body O a M splynou, dokazované tvrzení určitě platí. Dále tedy předpokládejme, že bod O je různý od M. Nyní dokážeme, že čtyřúhelník $OCMP$ je rovnoběžník, a tím vyřešíme i naši úlohu (protější strany rovnoběžníku jsou stejně dlouhé).

Dvě protější strany OC a MP našeho čtyřúhelníku jsou ze zadání rovnoběžné (obě jsou kolmicemi na AB). Dokážeme to i pro druhou dvojici stran CM a PO. Nejprve si povšimněme, že úhly OMP

a ONP jsou pravé. To proto, že úsečka MP je kolmá na AB a NP je zase tečnou na ω v bodě N. Podle Thaletovy věty tak body O, M, N a P leží na společné kružnici s průměrem OP. Proto také $|\sphericalangle OPM| = |\sphericalangle ONM|$ (jedná se o obvodové úhly nad stejnou úsečkou). Stejně velké jsou i úhly ONC a OCN, jelikož trojúhelník OCN je rovnoramenný. Tedy úhly OCN a OPM jsou shodné. Přímky CM a OP tak protínají dvě rovnoběžky pod stejným úhlem, jsou proto samy rovnoběžné a $OCMP$ je rovnoběžník.



Poznámky:

Možná jste si povšimli, že na kružnici s průměrem OP leží i bod D. Tuto pozoruhodnou vlastnost jsme zamlčeli, neboť ve vzorovém řešení nebyla potřeba. Někteří z Vás ji však využili spolu s faktem, že čtyřúhelník $OMPD$ je obdélník. Ještě více řešitelů pak dokazovalo shodnost trojúhelníků MNO a NMP.

Nakonec musím velké části řešitelů vyčinit, neboť pouze tři z vás zmínili, že body M a O mohou splynout. Jakkoli je tento případ jednoduchý, ve správném řešení by neměl chybět, protože obecný důkaz pro něj obvykle nefunguje nebo je přinejmenším problematický (například již nemůžeme argumentovat úhly OMP či MOC). *(Vašek Rozhoň)*

Úloha 5.

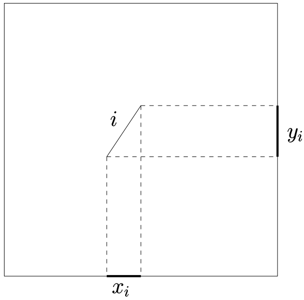
(54; 48; 3,76; 5,0)

Uvnitř čtverce o straně 1008 *leží* 2016 *úseček délky jedna. Ukažte, že existuje přímka rovnoběžná s některou stranou čtverce, která protíná*[5] *alespoň dvě ze zadaných úseček.* *(Rado Švarc)*

Řešení:

Očíslujme si úsečky čísly od 1 do 2016. Pro každou úsečku i označme x_i její kolmý průmět na dolní stranu čtverce, y_i na stranu pravou.

[5] Průsečíkem s úsečkou může být i její krajní bod.



Jelikož úsečky mají délku jedna a úsečky i, x_i a y_i tvoří (případně degenerovaný) pravoúhlý trojúhelník, z trojúhelníkové nerovnosti dostáváme, že

$$x_i + y_i \geq 1$$

pro každé i od 1 do 2016. Sečteme-li tyto nerovnice, dostaneme

$$\sum_{i=1}^{2016} (x_i + y_i) \geq 2016. \tag{1}$$

Pro spor předpokládejme, že žádná přímka rovnoběžná se stranami čtverce neprotíná dvě různé úsečky. Potom se ale žádné dva kolmé průměty úseček na jednu stranu čtverce nesmějí protínat (ani dotýkat krajním bodem), tudíž nezabírají celou stranu. Proto musí platit

$$\sum_{i=1}^{2016} x_i < 1008, \qquad \sum_{i=1}^{2016} y_i < 1008.$$

Jejich sečtením dostaneme

$$\sum_{i=1}^{2016} (x_i + y_i) < 2016.$$

Což je ovšem spor s [1]. Tudíž hledaná přímka musí existovat, což jsme měli dokázat.

Poznámky:

Přestože úloha patřila mezi lehčí pětibodovky, přišlo poměrně dost částečně či zcela špatných řešení. Nejčastější chybou bylo dokázání existence přímky pro „nejhorší“ případ, tj. situace, kdy jsou všechny úsečky rovnoběžné se stranami. Ovšem jednak je třeba vyřešit všechna rozmístění úseček (nebo alespoň dokázat, že je skutečně „nejhorší“) a také tento případ nemusí být nutně nejhorší. Při dodržování rovnoběžnosti všech úseček se stranami by nebylo možné umístit ani 2015 úseček, přičemž pokud by jedna z úseček byla o libovolně malý kousek kratší, tak lze dokonce umístit všech 2016.

Druhým prohřeškem bylo opomenutí rovnosti u trojúhelníkové nerovnosti, za což jsem strhnul bod těm, kteří neukázali, že součet všech délek musí být ostře menší než 2016, tudíž jejich spor nefungoval. *(Tomáš Novotný)*

Úloha 6.

(41; 40; 4,68; 5,0)

Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ splňuje $|AB|+|CD| = |BC|$. Označme průsečík os úhlů ABC a BCD jako E a průsečík polopřímek $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{CD}$ jako F. Dokažte, že $FAED$ je tětivový čtyřúhelník.

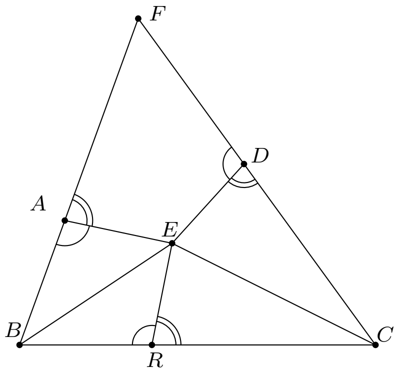
(Rado Švarc)

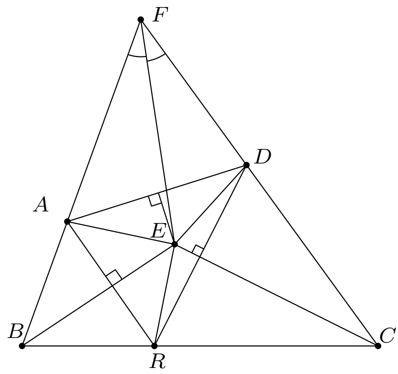
Řešení:

Díky podmínce $|AB| + |CD| = |BC|$ umíme na BC najít takový bod R, že platí $|AB| = |BR|$ a $|RC| = |CD|$. Protože $|AB| = |BR|$, $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle EBR|$ a $|BE| = |BE|$, jsou z věty *sus* trojúhelníky ABE a RBE shodné. Analogicky dostaneme shodnost trojúhelníků DCE a RCE. Potom ale $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle BRE|$ a $|\sphericalangle CRE| = |\sphericalangle CDE|$. A dále

$$|\sphericalangle FAE| = 180^\circ - |\sphericalangle BAE| = 180^\circ - |\sphericalangle BRE| = |\sphericalangle ERC| = |\sphericalangle EDC| = 180^\circ - |\sphericalangle EDF|.$$

Z toho už plyne, že $FAED$ je tětivový čtyřúhelník.





Nástin jiného řešení:

Opět zkonstruujeme bod R tak jako v předchozím řešení. Protože trojúhelníky ABR a RCD jsou rovnoramenné, je osa $\sphericalangle ABR$ zároveň osou úsečky AR. Protože E leží na ose $\sphericalangle ABR$, leží i na ose AR. Analogicky E leží i na ose RD. Proto je E středem kružnice opsané $\triangle ARD$, takže leží i na ose AD. Protože E je průsečík os úhlů $\sphericalangle FBC$ a $\sphericalangle BCF$, jedná se o střed kružnice vepsané $\triangle BFC$. Proto leží i na ose úhlu $\sphericalangle CFB$.

Pokud $|FA| \neq |FD|$, pak E je jediný průsečík osy AD a osy $\sphericalangle AFD$, takže se jedná o Švrčkův bod v trojúhelníku AFD. Tudíž leží na kružnici opsané $\triangle AFD$ a jsme hotovi. Pokud $|FA| = |FD|$, jsou A, R a D body dotyku kružnice vepsané $\triangle BFC$ se stranami. Proto $|\sphericalangle EAF| = |\sphericalangle EDF| = 90^\circ$, takže A a D leží na kružnici nad průměrem EF a jsme hotovi.

Poznámky:

Potěšilo mne, že naprostá většina došlých řešení si vysloužila čtyři body a více. Mnozí jste úhlili přes úhly $\sphericalangle AED$ a $\sphericalangle AFD$, což bylo obvykle trochu složitější a ošklivější. Ti, kteří postupovali jedním ze vzorových přístupů, jež vyžadovaly jen velmi málo úhlení, si vysloužili ičko. Při druhém přístupu bohužel všichni až na *Františka Coufa* zapomněli na výjimku v případě $|AF| = |DF|$, čímž si vysloužili paradoxní ohodnocení $4 + i$.

(Rado Švarc)

Úloha 7.

(17; 15; 4,12; 5,0)

Uvnitř strany AC trojúhelníku ABC leží bod D. Nechť P je průsečík os úhlů BAC a BDC a Q je průsečík os úhlů BCA a BDA. Ukažte, že střed M úsečky PQ splňuje $|MD| > |MB|$.

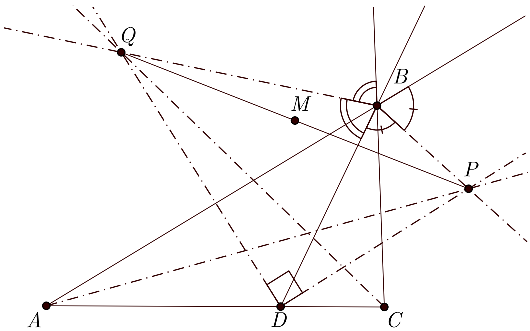
(Rado Švarc)

Řešení:

Osy vedlejších úhlů jsou na sebe kolmé, takže $DQ \perp DP$. Bod M je proto jakožto střed přepony středem kružnice opsané pravoúhlého trojúhelníku PQD. Protože bod Q leží na příslušných osách úhlů, je středem kružnice připsané straně BD v trojúhelníku CBD, takže BQ je osa úhlu vedlejšího k $\sphericalangle DBC$. Analogicky je BP osou úhlu vedlejšího k $\sphericalangle ABD$. Pro úhly u vrcholu B spočteme

$$|\sphericalangle PBQ| = \frac{360^\circ - |\sphericalangle ABC|}{2} = 180^\circ - \frac{|\sphericalangle ABC|}{2} > 90^\circ,$$

protože $|\sphericalangle ABC| < 180^\circ$. Jelikož je $\sphericalangle PBQ$ tupý, leží bod B uvnitř kružnice nad průměrem PQ. To znamená, že úsečka MB je kratší než poloměr zmíněné kružnice, což je mimo jiné hodnota $|MD|$.



Poznámky:

Téměř všechna správná řešení postupovala podobně jako vzorové, které není složité, ale trochu trikové. Asi proto se sešlo jen sedmnáct řešení a jejich velká většina byla hodnocena pěti body. Poučení z řešení plyne asi takové, že osy úhlů jsou dobré – generují další osy a často i pravé úhly. A na konec moje prosba a výzva všem geometrům: „Kreslete do řešení obrázky! Zejména pokud používáte hodně značení a definujete si objekty, které nejsou v zadání.“ *(David Hruška)*

Úloha 8.

(14; 3; 1,36; 1,0)

V rovině leží 2016 *jednotkových kružnic tak, že se žádné dvě nedotýkají a každá protíná alespoň tři jiné. Kolik nejméně průsečíků mohou určovat?* *(Rado Švarc)*

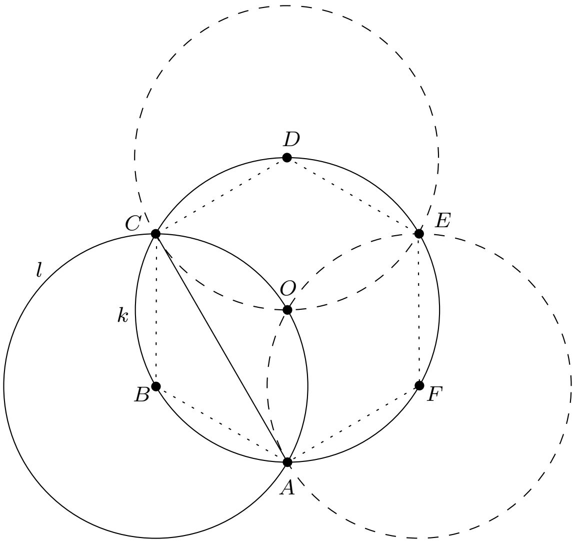
Řešení:

Dokážeme, že hledaným číslem je 2016. Důkaz se bude skládat ze dvou částí. Nejprve dokážeme, že 2016 průsečíků lze dosáhnout (najdeme takové rozmístění kružnic) a potom dokážeme, že každé rozmístění obsahuje alespoň 2016 průsečíků.

Definice. Mějme nějaké rozmístění n kružnic v rovině. Takové rozmístění označíme jako *vyhovující*, pokud se žádné dvě kružnice nedotýkají a každá protíná alespoň 3 další.

Tvrzení. *Existuje vyhovující rozmístění 2016 jednotkových kružnic, které určuje 2016 průsečíků.*

Důkaz. Použijeme 504 kopií konfigurace čtyř kružnic z obrázku, přičemž jednotlivé kopie se navzájem nedotýkají ani neprotínají. Protože každá kopie určuje 4 průsečíky, budeme mít skutečně 2016 průsečíků.



Nyní je jen třeba ukázat, že jsou kružnice skutečně jednotkové. A na to nejprve musíme konfiguraci pořádně popsat:

Mějme jednotkovou kružnicí k se středem O, které vepíšeme pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Následně nakreslíme kružnice opsané trojúhelníkům ACO, CEO a EAO.

Nyní dokážeme, že kružnice ACO (analogicky pak i CEO a EAO) je jednotková. Označme tuto kružnici l. S k má l společnou tětivu AC. A protože $ABCDEF$ je pravidelný šestiúhelník se středem O, jsou trojúhelníky ACB a ACO shodné, tedy speciálně tětivě AC na kružnici k i l přísluší stejný obvodový úhel, a proto jsou k a l shodné, což znamená, že l je také jednotková.

Než se pustíme do spodního odhadu, dokážeme si jedno pomocné lemma.

Lemma. *Mějme vyhovující rozmístění n kružnic a k buď nějaká z nich. Dále označme x_k počet průsečíků, které leží na k, a libovolný z těchto průsečíků nazvěme A. Pak bodem A prochází nejvýše x_k kružnic.*

Důkaz. Každá kružnice $l \neq k$, která prochází A, tam k protíná. A protože se žádné dvě kružnice nedotýkají, má l s k i druhý průsečík (označme ho B). Bodem B neprochází žádná další kružnice, která prochází A, protože dva různé body určují maximálně dvě různé jednotkové kružnice. Proto každé kružnici různé od k a procházející A můžeme přiřadit unikátní průsečík na k různý od A. Takových průsečíků je $x_k - 1$, a proto je kružnic procházejících A maximálně x_k (k a $x_k - 1$ dalších).

Tvrzení. *Každé vyhovující rozmístění n jednotkových kružnic určuje alespoň n průsečíků.*

Důkaz. Pokud nějaké dvě kružnice splývají, tak vytvářejí nekonečně mnoho průsečíků, tedy dále předpokládejme, že žádné dvě kružnice nesplývají.

Každý průsečík od nás dostane jedno euro,[6] které spravedlivě rozdělí všem kružnicím, které přes něj procházejí. (Tedy pokud průsečíkem prochází x kružnic, každá dostane $\frac{1}{x}$ €.) Spočítáme dvěma

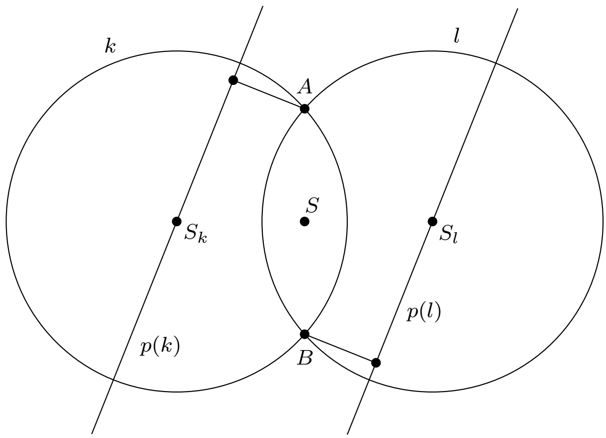
[6] Nebo libovolnou jinou měnu podle toho, co zrovna máme k dispozici.

způsoby, jak bohatá je naše konfigurace. Celkový počet eur je zřejmě stejný jako počet průsečíků. Nyní odhadneme počet eur pomocí počtu kružnic. Dokážeme, že každá kružnice má celkovou hodnotu alespoň 1 €.

Vezměme si nějakou kružnici k a označme x_k počet průsečíků, které na ní leží. Podle lemmatu každým průsečíkem prochází maximálně x_k kružnic, a proto k od každého průsečíku dostane alespoň $\frac{1}{x_k}$ €. To znamená, že celkem dostane alespoň $x_k \cdot \frac{1}{x_k} = 1$ €. A tedy celkový počet eur v naší konfiguraci je větší nebo roven počtu kružnic. Tedy i počet průsečíků je alespoň počet kružnic, což jsme chtěli dokázat. □

Důkaz. (Alternativní, podle *Filipa Bialase.*) Mějme vyhovující rozmístění n jednotkových kružnic. Každé kružnici přiřadíme nějaký průsečík tak, že žádným dvěma kružnicím nepřiřadíme stejný průsečík.

Zvolme si nějaký směr v rovině tak, aby nebyl rovnoběžný s žádnou spojnicí dvou středů kružnic nebo dvou průsečíků. To jistě můžeme udělat, neboť středů i průsečíků je jen konečně mnoho (předpokládáme, že žádné dvě kružnice nesplývají). Středem každé kružnice veďme přímku s tímto směrem. Pro kružnici k označíme příslušnou přímku $p(k)$. Platí $p(k) \neq p(l)$ pro $k \neq l$, protože směr přímky není rovnoběžný se spojnicí žádných dvou středů. Nyní kružnici k přiřadíme takový z průsečíků ležících na k, který je k $p(k)$ nejblíže. (Protože k není rovnoběžná s žádnou spojnicí dvou průsečíků, je toto zobrazení dobře definované.)



Sporem ukážeme, že naše zobrazení je prosté. Předpokládejme, že máme dvě různé kružnice k, l a oběma jsme přiřadili stejný průsečík A. Ten leží na obou z nich, a tedy existuje ještě jejich druhý společný průsečík B. Označme S_k, S_l středy k, l a S střed úsečky S_kS_l. Středová souměrnost se středem v S na sebe převede kružnice k, l, průsečíky A, B i přímky $p(k), p(l)$. Předpokládali jsme, že $d(A, p(k)) < d(B, p(k))$ a zároveň $d(A, p(l)) < d(B, p(l))$. Po použití středové souměrnosti se z první nerovnosti stane $d(B, p(l)) < d(A, p(l))$, což je spor s druhým předpokladem.

□

Poznámky:

Překvapilo mě, jak málo řešení přišlo – od *i*KSkařů, vítězů MO a aspirantů na místo v IMO týmu jsem čekal víc. Možná si roli zahrál nabitý program celý měsíc před termínem odeslání.

Ačkoliv to zní jako klišé z poznámek opravovatele, skutečně si nemyslím, že by úloha byla nedatelná. Na konstrukci se rozhodně přijít dá (stačilo to na 1 bod) a je docela uvěřitelné, že to lépe nepůjde. To je samozřejmě třeba dokázat. Důkaz s eury mi přijde dost trikový (přestože dvě ze tří správných řešení používala ten), ale řešení Filipa Bialase se mi moc líbí především svou přímočarostí:

Chci ukázat, že průsečíků je alespoň tolik jako kružnic. Tak se přirozeně nabízí každé kružnici přiřadit unikátní průsečík. Dává smysl přiřazovat kružnici průsečík, který na ní leží. Tak si vezměme nějaké takové zobrazení a podívejme se, co se stane, když dvěma kružnicím přiřadí stejný průsečík. Ten průsečík leží na obou kružnicích, ale tyto kružnice mají ještě druhý společný průsečík. Takže by bylo super, kdyby zobrazení jedné přiřadilo jeden průsečík a druhé ten druhý. A teď si stačí vzpomenout, že olympiádní úlohy z kombinatorické geometrie se obvykle řeší nějakým extremálním principem, a přijít s tou správnou myšlenkou. *(Matěj Konečný)*

Do nekonečna a ještě dál 3

3. seriálová série — Vzorové řešení

Úloha 1. (15; 14; 4,13; 5,0)

Řekneme, že množina $X \subset \mathbb{R}$ je shora omezená, pokud existuje reálné číslo, které je větší než všechny prvky dané množiny. V opačném případě říkáme, že je X shora neomezená. Nechť je dána shora neomezená množina $X \subset \mathbb{R}$. Dokažte, že existuje její spočetná podmnožina, která je stále shora neomezená. Vysvětlete, jak přitom používáte axiom výběru. *(Mirek Olšák)*

Řešení:

Požadovanou množinu sestrojíme postupnou konstrukcí. Tu nejprve popíšeme neformálně a teprve potom se podíváme na to, kde se v ní využil axiom výběru.

Pomocí víceznačné funkce:

Množina X musí obsahovat číslo větší nebo rovné nule, jinak by byla shora omezená nulou. Označme takové číslo a_0. Dále musí X obsahovat i číslo větší nebo rovné jedné, jinak by byla shora omezená jedničkou. Označme takové číslo a_1. Když toto provedeme pro každé $n \in \omega$, bude množina $A = \{a_n : n \in \omega\}$ mít obě požadované vlastnosti. Je spočetná, protože jsme ji sestrojili jako obraz spočetné množiny. (K tomuto se vracíme na konci této části vzoráku.) A pro každé kladné reálné číslo x je $a_{\lceil x \rceil} \geq \lceil x \rceil \geq x$. (Použitý symbol označuje horní celou část čísla x, tj. nejmenší celé číslo, které je větší nebo rovno x.)

Kdy jsme použili axiom výběru? Pochopitelně ve chvíli, kdy jsme z prvků množiny X volili nějaký, který je větší než dané n. Nejsnazší způsob formálního zápisu je nejprve definovat víceznačnou funkci[7] $\tilde{f}\colon \omega \to X$, která přirozenému číslu n přiřadí všechna čísla ležící v X větší nebo rovná n. Z ní umíme podle tvrzení z kapitoly Postupné vybírání vybrat běžnou jednoznačnou funkci $f\colon \omega \to X$. Ta každému přirozenému číslu přiřazuje nějaký konkrétní větší nebo stejně velký prvek X. Nic nám tedy nebrání definovat $a_n = f(n)$.

Axiom výběru jsme tedy využili skrytě – ve formě tvrzení o výběru funkce z víceznačné funkce, v jehož důkazu je axiom výběru esenciální součástí. Mohlo by se zdát, že ho potřebujeme i na důkaz spočetnosti sestrojené množiny. Když totiž víme, že existuje ne nutně prosté zobrazení z ω na A a chceme ukázat existenci prostého zobrazení A do ω, nabízí se využít cvičení 1, jehož řešení také využívá výběr funkce z víceznačné funkce. Nic takového ale dělat nemusíme. Pro prvek a z množiny A můžeme totiž definovat $g(a)$ jako nejmenší takové n, že $a_n = a$. Využitím dobrého uspořádání množiny ω jsme se tak vyhnuli použití axiomu výběru při konstrukci prostého zobrazení $g\colon A \to \omega$.

Přímým použitím axiomu výběru (podle Filipa Bialase):

Nabízí se i jiný způsob konstrukce. Můžeme si říci, že se podíváme mezi nulu a jedničku; pokud tam leží alespoň jeden prvek X, některý vybereme a přihodíme ho do konstruované množiny. Pak

[7] Viz třetí díl seriálu, kapitola Postupné vybírání.

se podíváme mezi jedničku a dvojku a pokud tam najdeme nějaké číslo, zase ho přidáme k těm už vybraným. Tento postup se dá formalizovat přímo pomocí axiomu výběru.

Průniky množiny X s intervaly $\langle i, i+1)$ pro $i \in \mathbb{Z}$ označme X_i. Množinu Y sestrojíme tak, že na X použijeme axiom nahrazení se zobrazením f, které každému $x \in X$ přiřadí to X_i, v němž x leží. Tím jsme získali množinu Y, která obsahuje právě ta X_i, která jsou neprázdná. Proto jde o množinu obsahující neprázdné disjunktní množiny, takže můžeme použít axiom výběru. Získáváme množinu reprezentantů B.

Ta má obě požadované vlastnosti. Spočetná je, protože každému jejímu prvku můžeme přiřadit celé číslo (a sice číslo intervalu X_i, jehož reprezentantem tento prvek je). A kdyby byla shora omezená, šlo by ji omezit nějakým celým číslem n; potom bychom ale věděli, že všechny množiny X_i pro $i \geq n$ byly prázdné, takže X neobsahovala žádné číslo větší než n. To je ve sporu s neomezeností X.

Poznámky:

Většina došlých řešení byla v pořádku. Mírně mě překvapilo, že málokdo zvolil cestu pomocí víceznačných funkcí, i když se v seriálu vyskytovaly opakovaně a práce s nimi mi přijde intuitivnější než přímé používání axiomu výběru. Většina řešitelů postupovala podobně jako druhé ze vzorových řešení.

Opakovaně jsem se setkával s některými chybami. Dva z řešitelů se spokojili se zkonstruováním rostoucí posloupnosti a prohlásili, že ta je nutně shora neomezená. To ale není pravda – protipříkladem je posloupnost $a_n = -1/n$. Druhým problémem byla snaha konstruovat posloupnost „postupně“: Nejprve vybereme prvek x_0, potom prvek x_1 větší než $x_0 + 1$, ... Ano, přesně takto by člověk k úloze přistoupil, kdyby nemusel vysvětlovat, jak využívá axiom výběru. Uvědomme si ale, že kdykoliv máme pevné číslo x, pak k nalezení čísla většího než $x + 1$ axiom výběru nepotřebujeme – jedná se o konečný výběr, o kterém se píše hned na druhé stránce třetího dílu seriálu. K čemu je tedy axiom výběru potřeba? K tomu, abychom dokázali provést *všech spočetně mnoho výběrů.* Pokud chceme posloupnost vytvářet postupně, je nejsnazší začít víceznačnou funkcí, která každému $x \in X$ přiřadí všechny prvky X větší než $x + 1$. Tímto způsobem úlohu zcela správně vyřešili *Petr Gebauer* a *Radek Olšák.* Těm, kteří nevysvětlili, jak axiom výběru použijí, a tvrdili, že ho potřebují při každém jednotlivém výběru, jsem strhl dva body.

(Kuba Krásenský)

Úloha 2. (9; 6; 3,22; 5,0)

Dokažte, že lze množinu všech kladných reálných čísel rozdělit na dvě disjunktní neprázdné množiny A a B tak, aby byly obě uzavřené na sčítání. Tím myslíme, že musí platit $a_0 + a_1 \in A$ a $b_0 + b_1 \in B$ pro všechna (ne nutně různá) $a_0, a_1 \in A$, $b_0, b_1 \in B$. *(Mirek Olšák)*

Řešení pomocí báze $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$:

Nechť M je báze $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$, tj. každé reálné číslo se dá právě jedním způsobem zapsat jako lineární kombinace prvků z M, kde koeficienty jsou racionální a jen konečně mnoho z nich je nenulových. Existenci báze M jsme dokázali v kapitole *Netriviální řešení Cauchyho rovnice.*

Vyberme nějaké $c \in M$ a rozdělme množinu $\mathbb{R}^+$ na dvě podmnožiny A, B následujícím způsobem: Množina A bude obsahovat kladná reálná čísla, která mají nezáporný koeficient u c, a množina B ostatní kladná reálná čísla.

Ukážeme, že zvolené podmnožiny splňují podmínky zadání. Zřejmě jsou disjunktní a jejich sjednocením je $\mathbb{R}^+$. Mají-li dvě čísla stejné znaménko koeficientu u c, platí totéž i pro jejich součet, neboť lineární kombinaci součtu dostaneme sčítáním koeficientů „po složkách“; proto jsou A a B uzavřené na sčítání. Zbývá ještě ukázat, že A a B jsou neprázdné. Nechť $d \in M$ je nenulové a různé od c (nula v bázi stejně být nemůže, protože pak by šlo např. nulu zapsat více způsoby jako

$k \cdot 0$ pro různá k). Dále vybereme $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $q \cdot d > |c|$. Potom $0 < q \cdot d + c \in A$ a zároveň $0 < q \cdot d - c \in B$, takže jsou obě množiny opravdu neprázdné.

Řešení pomocí Zornova lemmatu (volně podle Petra Gebauera a Kuby Löwita):

Množinu M nazveme *dobrou*, pokud splňuje následující podmínky:

(1) $M \subset \mathbb{R}^+$.
(2) M je uzavřená na sčítání.
(3) M neobsahuje žádné racionální číslo.

Označme $\mathcal{S}$ množinu všech dobrých množin, na které definujeme uspořádání inkluzí. Nechť $\mathcal{R}$ je řetězec v $\mathcal{S}$. Potom $\bigcup_{M \in \mathcal{R}} M = T$ také náleží $\mathcal{S}$, neboť:

(1) $T \subset \mathbb{R}^+$.
(2) Jestliže $a, b \in T$, znamená to, že najdeme $L, M \in \mathcal{R}$ tak, že $a \in L$, $b \in M$. Protože $\mathcal{R}$ je řetězec, platí $L \subset M$ nebo $M \subset L$; větší z množin L, M tudíž obsahuje a i b. Potom tato větší množina obsahuje i $a + b$, takže $a + b \in T$. Množina T je tudíž uzavřená na sčítání.
(3) Kdyby T obsahovala racionální číslo q, muselo by q ležet v některé množině $M \in \mathcal{R}$, což je spor. Proto T neobsahuje žádné racionální číslo.

Můžeme tedy aplikovat Zornovo lemma na množinu $\mathcal{S}$. Protože $\{\sqrt{2} \cdot n : n \in \omega\} \in \mathcal{S}$, můžeme nalézt maximální prvek M_0 splňující navíc $\{\sqrt{2} \cdot n : n \in \omega\} \subset M_0$. Ukážeme, že M_0 a $\mathbb{R}^+ \setminus M_0$ představují vyhovující rozdělení množiny $\mathbb{R}^+$. Obě zmíněné podmnožiny jsou zřejmě neprázdné a disjunktní, jejich sjednocení tvoří $\mathbb{R}^+$ a M_0 je uzavřená na sčítání, stačí proto ukázat, že je $\mathbb{R}^+ \setminus M_0$ uzavřená na sčítání. Pro spor předpokládejme, že existují $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus M_0$ taková, že $a + b = m_0 \in M_0$. Kdybychom do M_0 přidali prvek a spolu se všemi součty tvaru $na + m$, kde $n \in \omega$, $m \in M_0$, dostali bychom zase množinu uzavřenou na sčítání. Díky maximalitě dobré množiny M_0 tedy musejí existovat $n_1 \in \omega$ a $m_1 \in M_0$ taková, že $m_1 + n_1 a = q_1 \in \mathbb{Q}$. Obdobným argumentem zajistíme existenci $n_2 \in \omega$ a $m_2 \in M_0$ takových, že $m_2 + n_2 b = q_2 \in \mathbb{Q}$. Nyní platí

$$n_1 n_2 m_0 + n_2 m_1 + n_1 m_2 = n_2(n_1 a + m_1) + n_1(n_2 b + m_2) = n_2 q_1 + n_1 q_2 \in \mathbb{Q},$$

což je ve sporu s uzavřeností množiny M_0 na sčítání.

Poznámky:

Všechna došlá řešení se podobala jednomu nebo druhému vzorovému řešení. Část toho prvního, ve které dokazujeme neprázdnost dílčích podmnožin, můžeme zkrátit volbou báze, která obsahuje 1 a $\sqrt{2}$, a následným použitím těchto prvků jako c, d. Pak totiž můžeme přímo vyjmenovat některá čísla, která patří do A či B. Takovou bázi získáme pomocí Zornova lemmatu jako maximální lineárně nezávislou množinu obsahující 1 a $\sqrt{2}$.

Dvěma úspěšným řešením využívajícím Zornovo lemma jsem udělil $+i$. Chtěl bych zde upozornit, že je důležité zajistit, aby „množina“, na kterou chceme aplikovat Zornovo lemma, byla opravdu množinou, tedy aby se dala zkonstruovat pomocí zadaných axiomů. V našem případě se použitá množina sestrojí axiomem vydělení z $\mathbb{R}^+$. Mnohdy to tak zřejmé není a hrozí, že pracujeme s nevlastní třídou, na niž Zornovo lemma použít nemůžeme.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Úloha 3.

(9; 6; 3,44; 5,0)

Dokažte, že lze celý prostor $\mathbb{R}^3$ získat jako sjednocení nějaké množiny navzájem disjunktních kružnic s poloměrem 1. *(Mirek Olšák)*

Řešení (podle Filipa Bialase):

Po třech dílech seriálu víme, že $|\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, tudíž můžeme sestrojit dobře uspořádanou posloupnost bodů prostoru, která má délku $\mathfrak{c}$ a každý bod se v ní nachází právě jednou.

Nyní chceme transfinitní rekurzí přiřadit každému bodu x_α kružnici k_α takovou, že $x_\alpha \in k_\alpha$ pro každý ordinál $\alpha < \mathfrak{c}$. Navíc požadujeme, aby každé dvě kružnice byly buď totožné, nebo disjunktní.

Vezměme tedy nějaký bod x_α a množinu již přiřazených kružnic $M_\alpha = \{k_\beta : \beta < \alpha\}$. Pokud $x_\alpha \in \bigcup M_\alpha$, pak vezmeme jako k_α onu již vybranou kružnici, která obsahuje x_α. Stačí tedy rozřešit případ, kdy x_α ještě není pokryt žádnou kružnicí. Zavedeme soustavu souřadnic se středem v x_α a uvažujeme všechny roviny, které obsahují osu z. Každá taková rovina je určena svou odchylkou od osy x, kterou můžeme brát z intervalu $[0, \pi)$. Získáme tak kontinuum rovin procházejících x_α. Jelikož jsme zatím zvolili méně než kontinuum kružnic, přičemž každá kružnice leží celá právě v jedné rovině, existuje rovina neobsahující žádnou z dosavadních kružnic. Tuto rovinu označme ρ.

Každá z kružnic k náležících do M_α může mít s rovinou ρ maximálně dva společné body. Bodů v rovině ρ, které jsou již pokryty, je tedy jistě méně než kontinuum. Množinu těchto bodů označme Y. Bod x_α leží na kružnici k_α právě tehdy, když se její střed nachází na kružnici ℓ se středem x_α a poloměrem 1. Máme tedy kontinuum možných kružnic. Hledaná kružnice k_α ale nesmí obsahovat žádný bod z Y, takže střed k_α nesmí ležet na žádné z jednotkových kružnic se středem v Y. Každá jednotková kružnice se středem v Y může mít s ℓ maximálně dva průsečíky, takže máme máme dohromady méně než kontinuum zakázaných středů. Proto lze skutečně zvolit vyhovující kružnici.

Poznámky:

Úloha se velice podobala jednomu příkladu v seriálu (před hrou bez neprohrávající strategie), jenomže bylo potřeba vyřešit víc technických potíží. Klíčem bylo si uvědomit, že kontinuum jako kardinál má vlastnost, že každý menší ordinál má ostře menší kardinalitu. V každém kroku máme tedy vybráno pouze „málo“ kružnic a zbývá nám „hodně“ prostoru k přidání další kružnice. Postupů, jak přidat onu kružnici, jste navrhli více. Jeden z nich byl uveden ve vzorovém řešení.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Řešení čokoládových výzev ze seriálu

Úloha. (čokoládová výzva z druhého dílu) Nechť α je ordinál a n přirozené číslo. Označme $[\alpha]^n$ množinu všech n-prvkových podmnožin α a $[\alpha]^{<\omega}$ množinu všech konečných podmnožin α. O zobrazení $f\colon [\alpha]^n \to [\alpha]^{<\omega}$ řekneme, že je *čokoládové*, pokud existuje $(n+1)$-prvková množina $X \subset \alpha$ taková, že

$$(\forall x \in X)(x \notin f(X \setminus \{x\})).$$

Dokaž, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) Všechna zobrazení $f\colon [\alpha]^n \to [\alpha]^{<\omega}$ jsou čokoládová.
(ii) $\alpha \geq \omega_n$.

Řešení. Dokážeme tvrzení (obyčejnou) indukcí podle n. Napřed uvažujeme $n = 0$. Pak $[\alpha]^n$ je jednoprvková a zobrazení f je jednoznačně určené hodnotou $f(\emptyset)$. Platí posloupnost ekvivalencí

$$\alpha < \omega \Leftrightarrow \alpha \in [\alpha]^{<\omega} \Leftrightarrow (\exists f(\emptyset) \in [\alpha]^{<\omega})(\forall x \in \alpha)(x \in f(\emptyset)).$$

Poslední výrok lze chápat tak, že žádná jednoprvková množina $\{x\}$ nesvědčí o čokoládovosti f, takže f není čokoládová. Tím jsme dokázali tvrzení pro $n = 0$.

Nyní předpokládáme, že $n > 0$ a že pro všechna nižší n je již tvrzení dokázané. Jednotlivé implikace dokážeme zvlášť.

(i)$\Rightarrow$(ii): Předpokládáme, že $\alpha < \omega_n$, a dokážeme, že lze najít zobrazení, které není čokoládové. Z definice ω_n plyne $|\alpha| \leq |\omega_{n-1}|$. Definice čokoládového zobrazení je závislá jen na mohutnosti α, takže bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $\alpha \leq \omega_{n-1}$. V opačném případě bychom namísto α použili typ$(\{g(x) : x \in \alpha\})$ stejné mohutnosti, kde g je prosté zobrazení $\alpha \to \omega_{n-1}$.

Definujeme nečokoládovou $f\colon [\alpha]^n \to [\alpha]^{<\omega}$. Z indukčního předpokladu existuje pro každé $\beta < \omega_{n-1}$ nečokoládové zobrazení $f_\beta\colon [\beta]^{n-1} \to [\beta]^{<\omega}$. Uvažme $Y \in [\alpha]^n$ a nechť β je jeho největší prvek. Pak stanovme

$$f(Y) = f_\beta(Y \setminus \{\beta\}).$$

Proč toto zobrazení není čokoládové? Uvažme $(n+1)$-prvkovou množinu X a nechť β je její největší prvek. Protože f_β není čokoládové zobrazení, najdeme $x \in X \setminus \{\beta\}$ takové, že $x \in f_\beta(X \setminus \{x, \beta\})$. Proto i $x \in f(X \setminus \{x\})$, takže ani f není čokoládové.

(ii)$\Rightarrow$(i): Mějme $f\colon [\alpha]^n \to [\alpha]^{<\omega}$; ukážeme, že je čokoládové. Uvažme všechny n-prvkové podmnožiny ω_{n-1}. Těch je méně než $|\omega_n|$, takže existuje $\beta \in \alpha \setminus \omega_{n-1}$ takové, že

$$\beta \notin \bigcup\{f(Y) : Y \in [\omega_{n-1}]^n\}.$$

Definujeme zobrazení $f_\beta\colon [\omega_{n-1}]^{n-1} \to [\omega_{n-1}]^{<\omega}$ předpisem

$$f_\beta(Y) = f(Y \cup \{\beta\}) \cap \omega_{n-1}.$$

Z indukčního předpokladu je f_β čokoládové, takže existuje množina X, která to dokládá. Pro ukázání čokoládovosti funkce f pak stačí použít množinu $X \cup \{\beta\}$. Když vynecháme β, bude platit $\beta \notin f(X)$ z definice β. Když vynecháme prvek z množiny X, vyplyne čokoládová vlastnost z čokoládovosti f_β.

Úloha. (čokoládová výzva z třetího dílu) Množina (blíže neurčené velikosti) prasátek nastoupí na všechny prvky předem určené DUMy. Každé ví, na kterém prvku stojí, a vidí jen prasátka na vyšších prvcích. Dále každé dostane na hlavu černý nebo bílý klobouk, a jen na základě klobouků, které vidí před sebou, si tipne barvu svého klobouku. Ukaž, že ať je tato DUM jakákoli, existuje strategie, se kterou se při jakémkoli rozložení klobouků splete jen konečně mnoho prasátek.

Řešení. Díky principu dobrého uspořádání existuje dobré uspořádání na množině všech možných rozdání klobouků. Prasátka si předem dohodnou takové uspořádání a dále následující strategii: Každé prasátko najde v dohodnutém uspořádání nejmenší možné rozložení klobouků, které se shoduje s klobouky, které vidí. Na základě toho pak tipne barvu svého klobouku.

Pro spor předpokládejme, že nekonečně mnoho prasátek tiplo barvu svého klobouku špatně. Z nich nám stačí vzít prvních ω (tak, jak stojí v řadě); očíslujme je $p_0, p_1, p_2, \ldots$ Prasátko p_0 vidí správnou barvu klobouku p_1, takže vzhledem k tomu, že se prasátko p_1 netrefilo, bylo nejmenší možné rozložení nalezené p_0 jiné než to nalezené p_1. Na druhou stranu, každé rozložení možné pro p_0 je možné i pro p_1, takže prasátko p_0 muselo najít menší rozložení než p_1. Obdobně ale lze ukázat, že p_2 našlo menší rozložení než p_1, dále p_3 našlo ještě menší než p_2 a tak dále. Dohromady máme nekonečnou klesající posloupnost rozložení klobouků v dobrém uspořádání – a to je spor: V dobrém uspořádání se nemůže vyskytovat nekonečná klesající posloupnost.

Finální myš-maš

4. jarní série Vzorové řešení

Úloha 1. (68; 67; 2,40; 2,0)

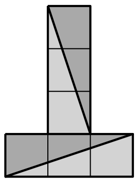
Byla nebyla jedna krychle beze zbytku pokryta n trojúhelníkovými tapetami. Tapety se smí ohýbat přes hrany krychle,[8] ale nesmí se trhat ani překrývat samy se sebou ani s ostatními tapetami. Rozhodněte a dokažte, zda opravdu byla, či nebyla, pro

(a) $n = 4$,

(b) $n = 3$. *(Anh Dung „Tonda“ Le)*

Řešení:

(a) Tapetami pokryjeme síť krychle jako na obrázku a ze sítě poté složíme krychli, takže taková krychle byla.



(b) Pro spor předpokládejme, že taková krychle byla. Vrchol krychle nemůže být překrytý vnitřkem žádné tapety, protože kolem vrcholu krychle je dohromady úhel $270°$, zatímco kolem vnitřního bodu trojúhelníku $360°$, takže by se tapeta pomuchlala. Vrchol proto musí být pokrytý jen hranami a vrcholy. Přitom každá hrana pokryje $180°$ z úhlu kolem vrcholu, takže u vrcholu může být jen jedna. To znamená, že alespoň $90°$ je pokryto jedním nebo více vrcholy trojúhelníků. Dohromady to znamená, že vrcholy krychle musí být pokryty úhly o velikosti alespoň $8 \cdot 90° = 720°$, ale vrcholy třech trojúhelníků mají dohromady jen $3 \cdot 180°$, což je méně. Tím dostáváme požadovaný spor, a taková krychle tedy nebyla.

Poznámky:

V podstatě všichni, kdo poslali první část, ji měli správně. Ve druhé části to bylo o poznání slabší. Správných řešení bylo pár a byla jen dvou typů. Většina jich byla téměř stejná jako výše uvedené. Druhý postup, který vedl k cíli a který zvolili dva nebo tři řešitelé, byl také podobný, akorát sporu bylo dosaženo tím, že by sedm z devíti vrcholů daných trojúhelníků muselo být pravých.

Ve většině nesprávných řešení byla snaha nějakým způsobem rozebrat všechny možnosti a říct, že jelikož žádná z nich nevyšla, tak krychle existovat nemohla. Ale o zkoumaných možnostech se dělaly různé předpoklady, jako například že trojúhelníky musí být pravoúhlé, že budou na krychli nějak „rozumně“ umístěné atd. Úspěšně rozebrat všechny možnosti bylo u tohoto příkladu opravdu téměř nedosažitelné (ostatně, nikomu se to nepovedlo). *(Štěpán Šimsa)*

[8] Všimněte si, že není možné tapetu nalepit přes vrchol krychle, aniž bychom ji pomuchlali.

Úloha 2.

(58; 51; 3,14; 3,0)

(a) *Ukažte, že pokud je pro m a n přirozená poměr $\dfrac{5n+m}{5m+n}$ celočíselný, pak i poměr $\dfrac{n}{m}$ je celočíselný.*

(Rado Švarc)

(b) *Je dán trojúhelník a bod uvnitř něj. Tímto bodem vedeme rovnoběžku s každou stranou. Tyto rovnoběžky dělí trojúhelník na tři rovnoběžníky a tři trojúhelníky. Součet obsahů těchto trojúhelníků označme s, obsah celého trojúhelníka označme S. Určete nejmenší možnou hodnotu poměru $\frac{s}{S}$.*

(David Hruška)

Řešení:

(a) Poměr $\frac{5n+m}{5m+n}$ je celé číslo. Protože $n, m \in \mathbb{N}$, bude tento zlomek určitě kladný. Upravujme tedy rovnici pro $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{5n+m}{5m+n} = k,$$
$$5n+m = 5km+kn,$$
$$n \cdot (5-k) = m \cdot (5k-1).$$

Pokud $k = 5$, pak $0 = 24m$. Protože $m \in \mathbb{N}$, nemůže tato situace nastat, takže obě strany rovnice lze vydělit m a výrazem $5-k$:

$$\frac{n}{m} = \frac{5k-1}{5-k}.$$

Poměr $\frac{n}{m}$ je kladný, takže poměr $\frac{5k-1}{5-k}$ musí být také kladný, a z toho lehce vyvodíme, že $k \leq 4$. Příslušné čtyři možnosti snadno rozebereme:

$k = 1: \ \frac{n}{m} = \frac{5\cdot1-1}{5-1} = 1,$

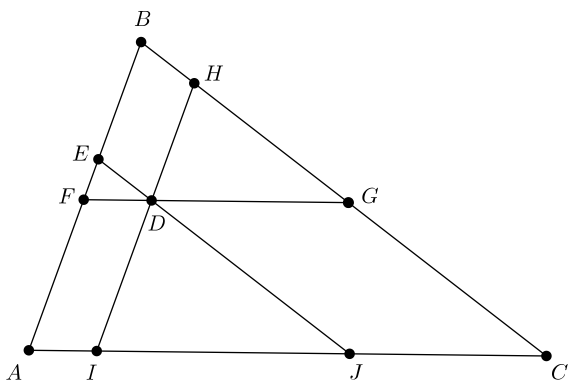
$k = 2: \ \frac{n}{m} = \frac{5\cdot2-1}{5-2} = 3,$

$k = 3: \ \frac{n}{m} = \frac{5\cdot3-1}{5-3} = 7,$

$k = 4: \ \frac{n}{m} = \frac{5\cdot4-1}{5-4} = 19.$

Pro všechny možné hodnoty k je poměr $\frac{n}{m}$ celočíselný.

(b) Označme trojúhelník jako ACB a bod uvnitř jako D. Trojúhelníky vytvořené rovnoběžkami přiléhající po řadě na strany a, b, c označme jako DGH, IJD a FDE.



Díky rovnoběžnosti jsou si všechny čtyři dané trojúhelníky podle věty uu podobné. Označme koeficienty podobnosti trojúhelníků IJD, DGH, FDE s trojúhelníkem ACB po řadě α, β, γ. Protože $AIDF$ je rovnoběžník, tak $|AI| = |FD|$, analogicky $|JC| = |DG|$. Platí

$$|AI| + |IJ| + |JC| = |AC|\,, \quad \text{z čehož plyne} \quad |FD| + |IJ| + |DG| = |AC|\,.$$

Po vydělení poslední rovnosti $|AC|$ dostáváme $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Označme s_1, s_2, s_3 po řadě obsahy trojúhelníků IJD, DGH, FDE. Poměr obsahů dvou podobných trojúhelníků se rovná druhé mocnině jejich koeficientu podobnosti, a proto můžeme psát:

$$\frac{s}{S} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{S} = \frac{\alpha^2 \cdot S + \beta^2 \cdot S + \gamma^2 \cdot S}{S} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

Chceme tedy minimalizovat tuto sumu kvadrátů za podmínky $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Ukážeme, že je vždy větší nebo rovna $\frac{1}{3}$. Podmínku využijeme ve tvaru $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = 1$:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &\geq \frac{1}{3}, \\ 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) &\geq (\alpha + \beta + \gamma)^2. \end{aligned}$$

Roznásobíme, převedeme na jednu stranu a následně upravíme na čtverce.

$$\begin{aligned} 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma &\geq 0, \\ (\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost zjevně platí, a protože jsme použili jen ekvivalentní úpravy, platí i původní nerovnost $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \frac{1}{3}$. Jinými slovy je poměr $\frac{s}{S}$ vždy alespoň $\frac{1}{3}$. Rovnost nastává právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$. Lehce ověříme, že to je případ, kdy bod D splyne s těžištěm trojúhelníku ACB, takže skutečně umíme dosáhnout toho, aby $\frac{s}{S} = \frac{1}{3}$.

Poznámky:

Úlohu jsme bodovali následovně:

(i) jeden bod byl za podmínku pro k a druhý za dořešení úlohy,
(ii) za nalezení minima jako umístění bodu do těžiště a určení hodnoty $\frac{1}{3}$ jsme dávali bod, zbylé dva za důkaz minimálnosti.

První část byla většinou bez problémů. Chtěli bychom jen podotknout, že pokud existuje jen málo možných výsledků, jako v tomto případě, je vhodné je otestovat a vypsat. Zkontrolujete si tím své řešení, mnohdy se stane, že něco přehlédnete.

Překvapilo nás, kolik z vás poslalo i řešení (b). Bohužel sice často bylo řečeno, že nejmenší hodnota poměru je $\frac{1}{3}$ (a nastává v případě těžiště), ale chyběl důkaz. Argumentovali jste tím, že hýbáním bodem D už se „malé trojúhelníčky jen zvětšují“ a dokládali jste to degenerovanými případy s bodem ve vrcholu nebo na straně, což má k důkazu daleko.

Správným krokem bylo vyjádření poměrů podobností, což vedlo na minimalizaci funkce tří proměnných s jednou podmínkou. Minimální hodnotu $\frac{1}{3}$ bylo možné uhodnout a následně dokázat pomocí standardních metod (AG, Cauchy–Schwarz, případně uvedený rozklad na čtverce). Těžší cesta vedla přes hledání minima funkce dvou proměnných (po dosazení z podmínky). Hledat minimum funkce dvou proměnných není obecně jednoduché a na řešitele číhá několik nástrah, ale nakonec jsme nestrhávali body těm, kteří se o to pokusili a došli k správnému závěru, i když třeba ne úplně formálně.

(Jan Kadlec ∪ Jan Soukup)

Úloha 3.

(41; 19; 1,90; 1,0)

Rozhodněte, zda lze na šachovnici 8×8 *umístit dva*

(a) *krále*

(b) *prince (krále bez možnosti diagonálních tahů)*

a následně s nimi provést posloupnost tahů tak, aby se v každé možné pozici ocitli právě jednou. Táhne vždy libovolná z figur způsobem povoleným pro krále resp. prince. Šachové ohrožování ani vyhazování se nebere v úvahu a figury nesmí stát na stejném políčku. Pozicí rozumíme uspořádanou dvojici políček, na kterých králové nebo princové právě stojí. (Tedy například jejich prohozením vznikne jiná pozice.) (David Hruška)

Řešení:

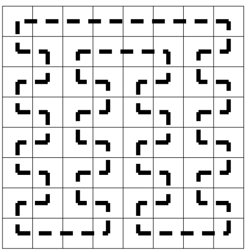
(a) Dva krále *lze* umístit na šachovnici a provést s nimi zadanou posloupnost tahů.

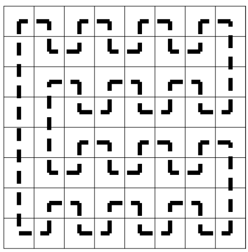
Řešení (podle Lucie Krajčoviechové):

Rozlišujme černého a bílého krále. Ukážeme, jak je možné projít bílým králem všechna neobsazená políčka právě jednou pro každou pevnou polohu černého krále a každé počáteční políčko bílého krále. Až to budeme mít, začneme tím, že dopředu naplánujeme trasu černého krále. Po každém jeho kroku projde bílý král zbylých 63 políček. Pokud nikdy neskončí na políčku, kam se chystá jít černý král, ocitnou se při tomto postupu králové v každé pozici právě jednou.

Zbývá ukázat slibované cesty přes všechna políčka. *Uzavřená cesta* budeme říkat libovolné posloupnosti různých políček, v níž každá dvě po sobě jdoucí políčka jsou sousední (král mezi nimi může přejít jedním tahem) a navíc poslední políčko sousedí s tím prvním. Začne-li král na libovolném políčku nějaké uzavřené cesty, může se po ní pohybovat jedním ze dvou směrů tak, že projde každé políčko cesty právě jednou a skončí na políčku sousedícím s tím, kde začal.

Uvažme libovolnou pozici černého a bílého krále. Uzavřenou cestu bílého krále přes všechna políčka šachovnice se pokusíme upravit tak, aby procházela všechna políčka kromě toho, na kterém stojí černý král. Stojí-li černý král na takovém políčku cesty, že z něj cesta pokračuje jedním směrem vertikálně a druhým horizontálně, můžeme ono políčko z cesty vypustit a vznikne uzavřená cesta (vertikální a horizontální soused spolu budou stále diagonálně sousedit). Bohužel není možné navrhnout cestu přes všechna políčka takovou, aby na každém políčku vertikálně nebo horizontálně „zahýbala“. Nicméně existuje dvojice uzavřených cest přes všechna políčka taková, že pro každou polohu černého krále jedna z cest má popsanou vlastnost (viz obrázek).





Na závěr popíšeme kompletní strategii pro tahy králi, která povede k tomu, že se ocitnou v každé pozici právě jednou. Umisťme krále na libovolná dvě políčka šachovnice a zvolme libovolnou uzavřenou cestu přes všechna políčka, po které se bude pohybovat černý král. Po každém jeho pohybu projde bílý král všechna ostatní políčka šachovnice tak, aby neskončil na políčku, kam bude příštím tahem chtít jít černý král. To udělá tak, že si vybere jednu z dříve zmíněných uzavřených cest tak, aby zahýbala na políčku, kde stojí černý král. Dále si zvolí směr obcházení cesty, při němž neskončí na políčku, kam se chystá jít černý král (všimněte si, že při obou směrech procházení uzavřené cesty skončí na jiném políčku), a všechna políčka cesty v tomto směru projde s vynecháním políčka, na kterém stojí černý král. Tímto postupem se ocitnou králové v každé pozici právě jednou.

(b) Ukážeme, že dva prince *nelze* umístit na šachovnici a provést s nimi požadovanou posloupnost tahů. Pro spor předpokládejme počáteční umístění a tahy takové, že se princové ocitnou v každé pozici právě jednou.

Různých pozic je přesně $64 \cdot 63$ (první princ má 64 možností a druhý už pouze 63, protože nemůže stát na stejném políčku). Uvažme obvyklé šachovnicové obarvení a nazvěme pozici *stejnobarevnou*, jsou-li v ní princové na políčkách stejné barvy. V opačném případě hovoříme o *různobarevné* pozici.

Všimněme si, že libovolný tah ze stejnobarevné pozice vede do různobarevné, protože tah každého prince změní barvu políčka, na kterém se nachází. Analogicky z různobarevné pozice všechny možné tahy vedou do stejnobarevné.

Z toho plyne, že se v každé posloupnosti tahů střídají stejnobarevné a různobarevné pozice, a proto během libovolných $64 \cdot 63$ tahů princové projdou $32 \cdot 63 = 2016$ (ne nutně různých) stejnobarevných a stejný počet různobarevných pozic.

Dále počítejme, kolik stejnobarevných pozic existuje. Tento počet je přesně $64 \cdot 31 = 1984$ (prvního prince můžeme umístit kamkoliv a druhého již pouze na zbylých 31 políček shodné barvy). Princové proto museli během $64 \cdot 63$ tahů navštívit některé stejnobarevné pozice vícekrát, což je ve sporu s předpokladem. Žádná taková posloupnost tahů tedy neexistuje.

Poznámky:

První část úlohy se téměř všichni pokoušeli řešit podobně jako v autorském řešení. Málokdo ovšem pořádně vysvětlil, proč pro bílého krále vždy existuje cesta, která projde každé políčko právě jednou a navíc neskončí tam, kde by překážel černému králi. Něco takového rozhodně není zřejmé a na této úloze to byla nejnáročnější část.

Všimněte si, že černý král se v našem řešení pohybuje jako princ a bílý použije jen 64 diagonálních tahů. Z našeho řešení druhé části úlohy plyne, že je potřeba alespoň $2016 - 1984 = 32$ diagonálních tahů, ale není jasné, zda této hranice lze dosáhnout.

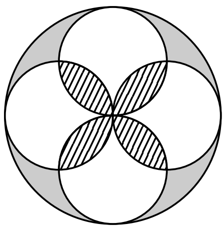
(Filip Hlásek)

Úloha 4.

(76; 74; 2,39; 2,0)

(a) *Rozhodněte, zda ze zvýrazněných oblastí na obrázku má větší obsah šedá, nebo šrafovaná.*

(David Hruška)



(b) *Rado má pizzu ve tvaru čtverce* 30×30. *Patvarem nazvěme mnohoúhelník (ne nutně konvexní) se stranami rovnoběžnými se stranami pizzy. Rado rozřezal pizzu na několik patvarů se součtem obvodů* 600. *Ukažte, že nějaký kousek pizzy má obsah alespoň* 36.

(Rado Švarc)

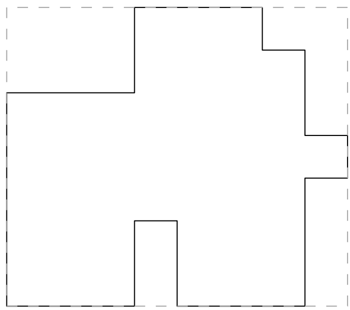
Řešení:

(a) Malé kruhy mají poloviční poloměr než velký kruh. Označíme-li r poloměr malého kruhu, bude obsah velkého kruhu $\pi(2r)^2$ a obsah čtyř malých kruhů $4\cdot\pi r^2$. Obsah velkého kruhu můžeme rovněž vyjádřit jako součet ploch malých kruhů s plochou šedé oblasti (tj. prostoru nepokrytého malými kruhy) bez plochy šrafované části, kterou bychom jinak započítali dvakrát, protože se na ní vždy překrývají dva malé kruhy. Díky rovnosti plochy velkého kruhu a čtyř malých kruhů dostáváme rovnost mezi plochou šedé a šrafované oblasti.

(b) Pro spor předpokládejme, že existuje rozřezání na patvary $P_1, P_2, \ldots, P_n$, které mají všechny obsah menší než 36. Označme $S(P_i)$ obsah a $O(P_i)$ obvod patvaru P_i.

Lemma. *Pro každý patvar P_i existuje čtverec o straně a_i takový, že obsah čtverce bude roven obsahu patvaru a obvod čtverce bude nejvýše obvod patvaru.*

Důkaz. Nejprve každý patvar P_i nahradíme nejmenším obdélníkem (se stranami rovnoběžnými se stranami pizzy), který celý tento patvar obsahuje. Zjevně je obsah tohoto obdélníku větší nebo roven obsahu patvaru. Obvod obdélníku bude nejvýše roven obvodu patvaru, protože jedna z nejkratších cest pomocí rovnoběžných a svislých úseček mezi dvěma vrcholy patvaru vede po hraně obdélníku.



Nyní nahradíme obdélník čtvercem o stejném obvodu. Má-li obdélník rozměry $(c-x)\times(c+x)$, bude mít čtverec stranu délky c. Obsah čtverce c^2 je větší nebo roven obsahu obdélníku

$$(c-x)(c+x) = c^2 - x^2.$$

Nakonec čtverec zmenšíme tak, aby měl stejný obsah jako původní patvar. Zmenšením jeho obvod jedině klesne. $\square$

Po nahrazení patvarů pomocí čtverců podle lemmatu dostáváme:

$$900 = \sum_{i=1}^{n} S(P_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

$$600 = \sum_{i=1}^{n} O(P_i) \geq \sum_{i=1}^{n} 4a_i.$$

Zkombinováním těchto vztahů dostaneme:

$$\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n} 4a_i \leq \frac{3}{2}\cdot 600 = 900 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

$$6\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Pro spor jsme předpokládali, že obsah každého patvaru je menší než 36. To znamená, že strana a_i příslušného čtverce o stejném obsahu je menší než 6, čímž dostáváme spor s posledním vztahem.

POZNÁMKY:

Řešení první části přišlo opravdu hodně a téměř všechna byla správně. Někteří sice zbytečně počítali obsahy šedé a vyšrafované části, ale i ti se nakonec dobrali správného výsledku. Snad bych jen opět připomněl, že je důležitý slovní komentář – na zadefinování značení i na vysvětlování, jak jsme k danému vzorečku došli. Místy to vypadalo skoro jako v anglické sérii, tj. řešení bez jediného slova.

Druhá část byla o poznání zapeklitější. Mnozí se ve svých řešení zbytečně zdržovali u popisu rozdělení na 25 čtverců a pak celý důkaz shrnuli do nějaké, lehce nekonkrétní, jedné věty, která vlastně nic nedokazovala. Rád bych připomněl, že u existenciálních úloh je opravdu užitečné řešení sepisovat sporem a ne postupným zdůvodňováním, proč naše rozdělení je optimální. Věřím, že hned několik řešení si mohlo vysloužit více bodů, pokud by byly sepsány ty samé myšlenky jako důkaz sporem. *(Martin Töpfer)*

Úloha 5.

(43; 29; 2,88; 3,0)

(a) *David na svých cestách zabloudil do země, kde je konečně mnoho silnic, každá z nich začíná a končí křižovatkou a každá křižovatka je tvaru Y. (Silnice mohou být klikaté a mimoúrovňově se křížit.) Řekl si, že by si ji rád prohlédl, ale trochu se obával, aby se tam úplně neztratil. Naplánoval si to tak, že vyrazí ze křižovatky u hospody Na mýtince, na lichých křižovatkách odbočí vlevo a na sudých vpravo.*[9] *Může si být jistý tím, že se po nějakém čase ocitne opět u hospody Na mýtince?*

(David Hruška)

(b) *Bludiště sestává z konečně mnoha políček čtverečkované sítě a je po obvodu ohraničeno zdmi. Rovněž mezi některými dvojicemi sousedních políček mohou být zdi. Čtverečky jsou orientovány podle světových stran. Na některých políčkách se nacházejí branci. Počáteční pozice každých dvou branců spojuje cesta, která nevede skrz zeď. Generál Koňadra může udílet povely SEVER, JIH, VÝCHOD nebo ZÁPAD. Všichni branci se poté pokusí pohnout o jedno políčko daným směrem. Branec, který se pohnout nemůže, protože mu v kroku brání zeď, zůstane stát. Ukažte, že generál mající dobrý výhled na celé bludiště umí vydávat povely tak, aby všichni branci po konečném počtu povelů stáli na jednom políčku.* *(Rado Švarc)*

ŘEŠENÍ:

(a) David se určitě k hospodě Na mýtince vrátí.

Označme stav, ve kterém se David může nacházet, jako uspořádanou trojici (s, d, p), kde s je silnice, po které momentálně jde, d je směr, kterým po ní jde, a p je parita udávající, kam odbočí na následující křižovatce. Silnic je konečně mnoho a pro každou z nich jsou jen čtyři možné stavy, takže i stavů je konečně mnoho. Proto David jednou přijde do stavu, ve kterém už byl. Od té doby bude nutně chodit v cyklu, protože každý stav jednoznačně určuje stav následující.

Nyní pro spor předpokládejme, že hospoda Na mýtince v tomto cyklu není. Označme x první stav cyklu, do kterého se David dostal. Tento stav určitě není tím prvním celé Davidovy cesty, protože jinak by v cyklu byla i hospoda Na mýtince. Uvědomíme si, že stav kromě následujícího jednoznačně určuje také stav předcházející. To je pravda proto, že chceme-li zjistit předchozí stav, stačí pouze oproti tomu současnému změnit paritu, podle ní zjistit, na kterou stranu jsme na poslední křižovatce odbočili, a podle toho se jednoznačně vrátit na hranu, ze které jsme přišli.

Proto není možné, aby se David dostal do stavu x poprvé z nějakého stavu mimo cyklus a podruhé ze stavu, který už v cyklu je. To je kýžený spor.

[9] David si bude v duchu počítat, kolik křižovatek již prošel, a podle tohoto počtu se bude rozhodovat. Klidně se mu tedy může stát, že přijde na stejnou křižovatku podruhé, ale rozhodne se odbočit jiným směrem.

(b) Problém budeme řešit indukcí podle počtu branců.

Je-li na čtvercové mřížce jen jeden branec, je úloha vyřešena. Pokud jsou na mřížce dva branci A a B, povede mezi nimi po libovolném počtu příkazů cesta beze zdi. Nyní se podíváme na nějakou z nejkratších cest P mezi A a B a její délku (počet polí) si označíme d.

Dále budeme pokračovat indukcí podle d. Pokud $d = 0$, jsou A a B na stejném políčku. Pokud $d > 0$, můžeme brance A navigovat po cestě P. Potom mohou nastat následující situace:

(1) Branec B nemohl alespoň jeden z rozkazů kvůli zdi vykonat. Potom se ale určitě zmenšila délka nejkratší cesty mezi A a B, a tedy už z indukčního předpokladu umíme A a B dostat na stejné pole.

(2) Branec B prošel stejnou trasu jako branec A. V takovém případě se ale posunul o vektor, který spojuje počáteční pole A a B. Kdybychom tedy krok opakovali stále s tímto výsledkem, museli by se pokaždé branci posunout o ten samý (nenulový) vektor, což je spor s konečností bludiště. Tato možnost tedy může nastat pouze konečněkrát za sebou, a tedy jednou nastane možnost (1). Poté již dokážeme dostat A a B na stejné políčko.

Nyní předpokládejme, že pro n nebo méně branců umíme brance dostat na stejné políčko. Budeme se o to snažit pro $n + 1$. Nejprve z indukčního předpokladu umíme zařídit, aby se prvních n branců sešlo na jednom políčku. Od této chvíle se už budou vždy pohybovat společně, protože jak povely, tak schopnost/neschopnost daný povel vykonat, sdílejí. Můžeme je tedy nadále považovat za jednoho brance. Dva brance už však na jedno políčko umíme dostat z indukčního předpokladu.

Poznámky:

V části (a) se téměř čtvrtina řešitelů pokusila (samozřejmě neúspěšně) ukázat, že se David k hospodě již nikdy nevrátí. Naopak všechna správná řešení vypadala podobně jako vzorák. Jen mnohá z nich nemluvila o jednoznačném určení předchozího stavu, což vyústilo v rozbor případů, kterých naštěstí nebylo mnoho, a tak byly typicky rozebrané správně.

U druhé úlohy přišlo mnoho nefunkčních řešení spočívajících třeba v tom, že všechny brance naženeme do jednoho rohu. Předně roh (nebo i všechny) může být ohraničen zdmi tak, že se do něj vůbec nedá dostat, ale také samo nahánění do rohu může být pro dostatečně složité bludiště netriviální. Z ostatních řešení na indukci podle počtu branců přišla téměř všechna (za což dostala jeden bod), s druhou částí byly občas problémy například v tom, že řešení pouze opakovala trasu P, dokud se branci nesetkají na jednom poli. Nenašel jsem ale jediný důkaz, že něco takového obecně funguje. *(Viki Němeček)*

Úloha 6. (56; 47; 1,93; 2,0)

(a) *Buď $n > 2$ přirozené číslo. Dokažte, že*

$$\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n\text{-krát}} < \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{(n-1)\text{-krát}}.$$

Takzvané patrové mocniny, které se v dokazovaném vztahu vyskytují, se vyhodnocují shora, tedy např. $3^{2^3} = 3^{(2^3)} = 3^8 = 6561.$ *(Matěj Konečný)*

(b) *Ukažte, že pro každé přirozené n a každou n-tici kladných reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí*

$$(1 + x_1)(1 + x_1 + x_2) \cdots (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \geq \sqrt{x_1 x_2 \cdots x_n (n + 1)^{n+1}}.$$

(Rado Švarc)

Řešení:

(a) Tvrzení dokážeme indukcí podle n. Nechť $a_n = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n\text{-krát}}$ a $b_n = \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{(n-1)\text{-krát}}$.

Pro nejmenší uvažované n, tj. $n = 3$, tvrzení platí, protože

$$a_3 = 2^{2^2} = 2^4 = 16 < 27 = 3^3 = b_3.$$

V indukčním kroku dokážeme, že z platnosti pro n ($a_n < b_n$) platí tvrzení i pro $n+1$:

$$a_{n+1} = 2^{a_n} < 3^{a_n} < 3^{b_n} = b_{n+1}.$$

Tím jsme tvrzení dokázali.

(b) Využijeme rovnost

$$1 + x_1 + \cdots + x_i = (n - i + 1) \times \frac{1 + x_1 + \cdots + x_{i-1}}{n - i + 1} + x_i$$

a použijeme AG nerovnost na $n - i + 2$ čísel: jedno x_i a $n - i + 1$ zlomků $\dfrac{1 + x_1 + \cdots + x_{i-1}}{n - i + 1}$. Tím dostaneme:

$$1 + x_1 + \cdots + x_i \geq (n - i + 2) \sqrt[n-i+2]{\left(\frac{1 + x_1 + \cdots + x_{i-1}}{n - i + 1}\right)^{n-i+1} x_i}.$$

Po umocnění na $n - i + 2$ získáme

$$(1 + x_1 + \cdots + x_i)^{n-i+2} \geq \frac{(n - i + 2)^{n-i+2}}{(n - i + 1)^{n-i+1}} (1 + x_1 + \cdots + x_{i-1})^{n-i+1} x_i.$$

Pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dostáváme následujících n nerovností:

$$\begin{aligned}
(1 + x_1)^{n+1} &\geq \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} x_1, \\
(1 + x_1 + x_2)^n &\geq \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} (1 + x_1)^{n-1} x_2, \\
(1 + x_1 + x_2 + x_3)^{n-1} &\geq \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-2)^{n-2}} (1 + x_1 + x_2)^{n-2} x_3, \\
&\vdots \\
(1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})^3 &\geq \frac{3^3}{2^2} (1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2})^2 x_{n-1}, \\
(1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 &\geq \frac{2^2}{1^1} (1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) x_n.
\end{aligned}$$

Jejich vynásobením a zkrácením příslušných členů získáme nerovnost

$$(1 + x_1)^2 (1 + x_1 + x_2)^2 \ldots (1 + x_1 + \cdots + x_n)^2 \geq (n+1)^{n+1} x_1 x_2 \ldots x_n,$$

což je jen zadaná nerovnost umocněná na druhou (umocnění na druhou je ekvivalentní úprava, protože členy na obou stranách jsou kladné).

Poznámky:

První úloha nebyla obtížná – prakticky každý, kdo věděl, jak funguje mocnění, ji vyřešil. Druhá úloha byla o poznání těžší. Správná řešení přišla pouze dvě. Obě byla na první pohled odlišná od vzorového (jedno využívalo vcelku zvláštní indukci a druhé chytrou substituci), ovšem při bližším přezkoumání se ukázalo, že postupují stejně jako vzorák, jen to jinak maskují. To ostatně dává smysl – v každém fungujícím řešení musí nastávat správný případ rovnosti, který je v tomto případě velmi speciální, konkrétně

$$x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{1+x_1}{n-1}, x_3 = \frac{1+x_1+x_2}{n-2}, \dots, x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}.$$

Jen těžko si lze představit řešení, které skutečně tyto případy rovnosti zachovává a přitom se ideou výrazně liší od vzorového. *(Rado Švarc)*

Úloha 7. (62; 39; 2,27; 2,0)

(a) *Kolik nejvíce průsečíků se stranami (ne nutně konvexního) 333-úhelníku může mít přímka, která není s žádnou z nich rovnoběžná?*

(David Hruška)

(b) *V ostroúhlém nerovnoramenném trojúhelníku ABC je $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$. Nechť O a H značí po řadě střed kružnice opsané a průsečík výšek. Pokud P a Q jsou průsečíky přímky OH se stranami AB a BC, ukažte, že $|PO| = |HQ|$.*

(Rado Švarc)

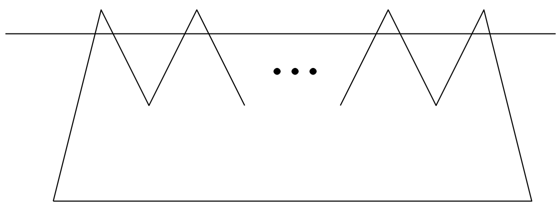
Řešení:

(a) Přímka může mít s každou stranou 333-úhelníku nejvýše jeden průsečík, takže celkový počet průsečíků může být maximálně 333. Ukážeme, že dokonce nemůžeme mít více než 332 průsečíků.

Prochází-li přímka vrcholem, pak mimo dvě hrany sdílející tento vrchol může přímka mnohoúhelník protínat nejvíce v 331 bodech. Tudíž maximální počet všech průsečíků je nejvýše 332.

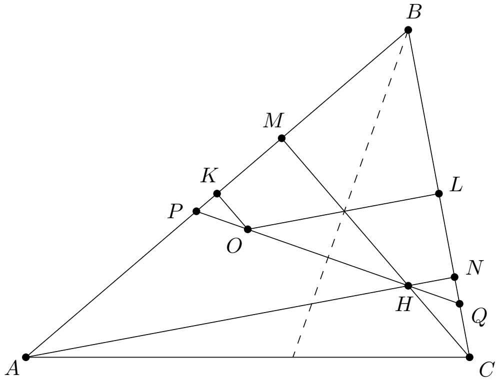
Nyní předpokládejme, že přímka žádným vrcholem neprochází. Úseky přímky, které leží vně 333-úhelníku, obarvíme červeně a ostatní modře. První a poslední úseky jsou nekonečné, tudíž nutně musí být červené. Navíc sousední úseky mají různou barvu, a proto máme sudý počet průsečíků. Největší sudé číslo menší nebo rovno 333 je 332. Proto i takto může přímka vytvořit maximálně 332 průsečíků.

Počtu 332 průsečíků umíme dosáhnout 333-úhelníkem tvaru „pily“:



(b) Nechť K, L jsou kolmé projekce bodu O na BA, resp. BC, a M, N kolmé projekce bodu H na BA, resp. BC. Zřejmě K, L jsou středy stran BA a BC. V trojúhelníku BMC platí:

$$\begin{aligned} |BM| &= \cos \sphericalangle MBC, \\ |BC| &= \cos 60^\circ, \\ |BC| &= \frac{|BC|}{2} = |BL|. \end{aligned}$$



Takže v osové souměrnosti podle osy úhlu ABC se M zobrazí na L, tedy toto zobrazení posílá kolmici na BA bodem M, přímku HM, na kolmici na BC bodem L, přímku OL. Analogicky se přímka HN zobrazí na OK, tudíž jsou body H, O souměrné podle osy úhlu ABC. V této souměrnosti je tedy přímka HO svým vlastním obrazem, takže její průsečíky s AB a AC jsou svými vzájemnými obrazy. Proto jsou body P, Q souměrné dle této osy, tedy $|PO| = |HQ|$.

Poznámky:

Většina došlých řešení části a) byla správná a téměř všechna z nich využila argument ve vzorovém řešení. Další možný postup, poněkud náročnější na vysvětlení a sepisování, je uvažovat konvexní a nekonvexní úhly v 333-úhelníku. Někteří bohužel po důkazu, že maximum nemůže být 333, zapomněli uvést vyhovující uspořádání přímky a mnohoúhelníku, a tím zbytečně ztratili jeden bod.

Část b) této úlohy nebyla moc těžká. Kromě trikového využití osové souměrnosti ve vzorovém řešení se dá ukázat, že trojúhelníky KPO a HNQ jsou shodné, neboť úhly v geometrické úloze s trojúhelníkem spolu s ortocentrem a středem kružnice opsané se dají většinou snadno vypočítat. Častou chybou bylo prohlášení, že dva čtyřúhelníky jsou si podobné, mají-li stejné vnitřní úhly, což není obecně pravdou (např. čtverec a nepravidelný obdélník). Někteří správně odhalili zajímavý vztah mezi ortocentem a středem kružnice opsané, a to že se jedná o kamarády. Neboli spojíme-li je s jakýmkoliv vrcholem trojúhelníku, dostaneme stejné úhly jen v opačném pořadí.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Výsledky seriálu

1.	*Filip*	*Bialas*	3	GOpatovPH	15	14	15	**44,32**	494
2.	*Danil*	*Koževnikov*	2	GKepleraPH	15	12	15	**41,15**	274
3.	*Jakub*	*Löwit*	4	GČeskoliPH	8	15	15	**38,26**	672
4.	*Petr*	*Gebauer*	2	G Mělník	12	11	15	**38,08**	205
5.	*Radek*	*Olšák*	1	GMensaPH	12	12	8	**32,42**	143
6.	*Pavel*	*Turek*	3	GTomkovaOL	15	9	8	**31,85**	659
7.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	2	GZborovPH	8	10	6	**24,52**	249
8.	*Hedvika*	*Ranošová*	2	GBudějovPH	10	6	6	**22,51**	229
9.	*Jáchym*	*Solecký*	3	PORG PH	11	–	11	**21,83**	22
10.	*Pavel*	*Hudec*	2	GJarkovPH	7	7	4	**18,07**	172
11.	*Daniele*	*Venier*	3	LSciARoiti	1	5	9	**16,17**	16
12.	*Richard*	*Hladík*	3	GaOA MarLáz	11	–	4	**14,98**	86
13.	*Lucia*	*Krajčoviechová*	0	GJHroncaBA	–	9	5	**14,53**	15
14.	*Alexandr*	*Jankov*	2	MatičníGOS	2	3	8	**13,47**	13
15.	*Václav*	*Volhejn*	3	GKepleraPH	7	7	–	**13,38**	13
16.	*Daniel*	*Herman*	3	GŠroKošice	–	6	6	**12,80**	13
17.	*Lenka*	*Kopfová*	1	MendelG OP	12	–	–	**11,58**	171
18.	*Evžen*	*Wybitul*	2		–	10	–	**10,32**	10
19.	*Lucien*	*Šíma*	4	PORG PH	9	–	–	**9,13**	186
20.–21.	*Matěj*	*Doležálek*	1	G Humpolec	9	–	–	**8,51**	9
20.–21.	*Jakub*	*Domes*	1	MendelG OP	9	–	–	**8,51**	9
22.	*Filip*	*Čermák*	2	MendelG OP	8	0	–	**8,40**	15
23.	*Marian*	*Poljak*	4	GJŠkodyPŘ	8	–	–	**8,32**	295
24.	*Slavomír*	*Hanzely*	4	GRaymanaPV	7	–	–	**7,00**	7
25.	*Daniel*	*Kopf*	4	SlezkéG OP	7	–	–	**6,96**	146
26.	*Václav*	*Steinhauser*	2	G Dačice	7	–	–	**6,66**	376
27.	*Tomáš*	*Domes*	3	MendelG OP	7	–	–	**6,51**	172
28.	*Matouš*	*Trnka*	3	GJarošeBO	6	–	–	**6,40**	6
29.	*Kateřina*	*Charvátová*	1	GBNěmcovHK	3	3	–	**5,02**	5
30.	*Tomáš*	*Konečný*	3	GJirsíkaČB	5	–	–	**4,74**	300
31.	*Ondřej*	*Krabec*	1	G KomHavíř	4	–	–	**4,43**	4
32.	*Denisa*	*Chytilová*	2	GJŠkodyPŘ	3	–	–	**3,14**	111
33.	*Dominik*	*Krasula*	3	G Krnov	–	3	–	**2,93**	458
34.	*Daniel*	*Pišťák*	4	GZborovPH	3	–	–	**2,67**	587
35.–36.	*Viktória*	*Brezinová*	1	GAlejKošic	3	–	–	**2,51**	3
35.–36.	*Lucie*	*Kundratová*	1	G TGM Zlín	3	–	–	**2,51**	3
37.	*Jaromír*	*Mielec*	3	GVolgogrOS	2	–	–	**2,17**	446
38.–39.	*Ondřej*	*Motlíček*	3	G Šumperk	1	–	–	**1,45**	1
38.–39.	*Filip*	*Pastierovič*	3	G ĽŠtúraZV	1	–	–	**1,45**	1
40.	*Michal*	*Töpfer*	3	GJPekařeMB	1	–	–	**1,19**	141
41.	*Veronika*	*Hladíková*	3	GMikul23PL	1	–	–	**1,15**	160

42.	*Adéla*	*Kostelecká*	4	GLesníZlín	1	–	–	**0,76**	150
43.–49.	*Ondřej*	*Bursa*	1	GTNovákBO	–	–	0	**0,00**	0
43.–49.	*Marie*	*Dohnalová*	3	GNadKavaPH	0	–	–	**0,00**	174
43.–49.	*Vojtech*	*Filipi*	1	GDašickáPA	0	–	–	**0,00**	0
43.–49.	*Samuel*	*Krajči*	1	GAlejKošic	0	–	–	**0,00**	0
43.–49.	*Aleš*	*Krčil*	3	G Humpolec	0	–	–	**0,00**	141
43.–49.	*Kateřina*	*Vaňková*	4	GJarošeBO	0	0	–	**0,00**	0
43.–49.	*Martin*	*Zimen*	1	GJMasar JI	0	0	–	**0,00**	0

Výsledky 35. ročníku

Podrobné výsledky jednotlivých sérií nalezneš na našem webu.[10]

1.	*Danil*	*Koževnikov*	2	GKepleraPH	24	25	24	24	24	25	24	31	15	12	15	**240,81**	474
2.	*Pavel*	*Turek*	3	GTomkovaOL	23	25	25	25	25	25	22	35	15	9	8	**236,58**	864
3.	*Jakub*	*Löwit*	4	GČeskoliPH	25	25	20	23	20	25	20	28	8	15	15	**225,26**	859
4.	*Petr*	*Gebauer*	2	G Mělník	24	22	24	24	23	22	23	24	12	11	15	**223,68**	391
5.	*Filip*	*Bialas*	3	GOpatovPH	25	25	25	25	25	25	25	–	15	14	15	**219,32**	669
6.	*Pavel*	*Hudec*	2	GJarkovPH	23	22	24	23	22	22	24	30	7	7	4	**207,49**	361
7.	*Radek*	*Olšák*	1	GMensaPH	18	22	23	23	23	21	23	20	12	12	8	**206,49**	317
8.	*Lucia*	*Krajčoviechová*	0	GJHroncaBA	22	23	22	24	23	24	25	28	–	9	5	**205,01**	205
9.	*Jáchym*	*Solecký*	3	PORG PH	21	25	24	21	22	21	22	24	11	–	11	**200,68**	201
10.	*Lenka*	*Kopfová*	1	MendelG OP	22	23	24	23	22	20	22	24	12	–	–	**192,44**	351
11.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	2	GZborovPH	20	22	18	21	21	21	21	22	8	10	6	**190,38**	414
12.	*Samuel*	*Krajči*	1	GAlejKošic	23	22	24	24	23	22	24	26	0	–	–	**188,39**	188
13.	*Lucien*	*Šíma*	4	PORG PH	20	25	22	23	21	20	23	25	9	–	–	**186,92**	364
14.	*Richard*	*Hladík*	3	GaOA MarLáz	22	20	24	22	20	22	18	20	11	–	4	**182,25**	253
15.	*Filip*	*Čermák*	2	MendelG OP	20	23	23	22	19	19	22	23	8	0	–	**179,17**	186
16.	*Lucie*	*Kundratová*	1	G TGM Zlín	22	22	22	19	22	19	22	29	3	–	–	**179,09**	179
17.	*Václav*	*Steinhauser*	2	G Dačice	20	22	23	21	21	20	22	21	7	–	–	**175,79**	545
18.	*Veronika*	*Hladíková*	3	GMikul23PL	21	21	23	22	22	19	22	22	1	–	–	**173,28**	332
19.	*Matěj*	*Doležálek*	1	G Humpolec	19	21	21	21	14	19	22	27	9	–	–	**172,68**	173
20.	*Hedvika*	*Ranošová*	2	GBudějovPH	16	22	18	22	10	21	21	20	10	6	6	**172,56**	379
21.	*Daniele*	*Venier*	3	LSciARoiti	17	21	21	21	14	22	18	19	1	5	9	**169,71**	170
22.	*Tomáš*	*Domes*	3	MendelG OP	20	20	23	20	19	17	22	18	7	–	–	**165,12**	330
23.	*František*	*Couf*	3	EKO GPraha	20	25	22	21	16	13	22	23	–	–	–	**163,87**	701
24.	*Alexandr*	*Jankov*	2	MatičníGOS	17	22	20	22	16	16	19	16	2	3	8	**161,97**	162
25.	*Tomáš*	*Konečný*	3	GJirsíkaČB	16	21	23	23	18	20	20	15	5	–	–	**160,97**	456
26.	*Jana*	*Pallová*	1	GJŠkodyPŘ	19	20	22	21	17	18	23	19	–	–	–	**157,84**	158
27.	*Ondřej*	*Motlíček*	3	G Šumperk	19	22	24	21	15	19	21	14	1	–	–	**156,92**	157
28.	*Vojtěch*	*Lanz*	2	GZborovPH	20	20	19	20	20	22	21	10	–	–	–	**153,04**	432
29.	*Vendula*	*Kuchyňová*	2	GMLerchaBO	17	22	17	23	20	18	22	14	–	–	–	**152,55**	153
30.	*Martin*	*Zimen*	1	GJMasar JI	14	11	15	19	22	19	22	27	0	0	–	**148,74**	149
31.	*Václav*	*Volhejn*	3	GKepleraPH	22	–	24	22	22	22	22	–	7	7	–	**147,31**	147
32.	*Petr*	*Ježek*	2	GBNěmcovHK	15	18	20	13	17	21	22	22	–	–	–	**147,10**	147
33.	*Vojtěch*	*Lengál*	2	GZborovPH	15	22	22	–	24	22	22	19	–	–	–	**143,95**	144
34.	*Adam*	*Mendl*	0	GCoubTábor	18	21	21	15	18	7	22	23	–	–	–	**143,85**	252
35.	*Šimon*	*Chvátil*	1	GBNěmcovHK	16	13	22	11	22	17	22	18	–	–	–	**141,42**	141
36.	*Matúš*	*Komora*	2	GLettMart	17	22	20	18	15	14	17	19	–	–	–	**140,94**	141
37.	*Kateřina*	*Nová*	3	G Vimperk	19	19	19	14	21	12	19	15	–	–	–	**140,11**	353
38.	*Michal*	*Töpfer*	3	GJPekařeMB	14	17	22	20	14	12	20	18	1	–	–	**137,58**	278

[10] *http://mks.mff.cuni.cz/vysledky/*

39.	*Ondřej*	*Krabec*	1	G KomHavíř	21	22	22	19	16	13	19	–	4	–	–	**137,22**	137
40.	*Tomáš*	*Čelko*	2	GPBystrica	19	19	17	13	18	18	17	15	–	–	–	**136,33**	136
41.	*Denisa*	*Chytilová*	2	GJŠkodyPŘ	19	20	16	19	13	13	19	12	3	–	–	**135,03**	243
42.	*Pavel*	*Havlín*	1	NPorg	16	22	21	21	17	14	7	15	–	–	–	**132,11**	132
43.	*Jakub*	*Domes*	1	MendelG OP	19	19	21	15	–	14	23	11	9	–	–	**131,38**	131
44.	*Veronika*	*Roubínová*	2	G Kadaň	18	17	19	9	15	18	20	15	–	–	–	**131,14**	131
45.	*Matěj*	*Kraft*	1	GMikul23PL	14	21	19	13	16	17	16	14	–	–	–	**129,01**	129
46.	*Kateřina*	*Charvátová*	1	GBNěmcovHK	15	18	18	14	17	11	15	15	3	3	–	**127,62**	128
47.	*Marco*	*Souza de Joode*	0		11	17	18	13	17	14	8	27	–	–	–	**126,14**	126
48.	*Kamila*	*Kyzlíková*	2	GZborovPH	20	21	15	21	16	14	9	9	–	–	–	**125,95**	244
49.	*Martin*	*Spišák*	2	GAlejKošic	17	18	13	–	14	21	22	20	–	–	–	**123,75**	124
50.	*Marie*	*Dohnalová*	3	GNadKavaPH	22	19	19	15	12	15	9	14	0	–	–	**122,72**	297
51.	*Evžen*	*Wybitul*	2		18	14	0	15	16	15	14	19	–	10	–	**120,92**	121
52.	*Tomáš*	*Drobil*	1	G Dačice	11	19	16	11	14	14	19	15	–	–	–	**119,47**	119
53.	*Eleonora*	*Krůtová*	1	GJarošeBO	19	23	13	16	8	17	–	19	–	–	–	**114,89**	115
54.	*Jáchym*	*Bareš*	2	GTomkovaOL	15	13	17	–	19	19	14	16	–	–	–	**114,16**	114
55.	*Aleš*	*Krčil*	3	G Humpolec	13	15	15	14	18	13	11	14	0	–	–	**113,35**	254
56.	*Kristýna*	*Lhoťanová*	1	G RožnRadh	13	14	17	15	17	16	11	11	–	–	–	**113,16**	113
57.	*Ondřej*	*Dušek*	2	PORG PH	14	18	19	9	19	16	4	11	–	–	–	**110,34**	110
58.	*Dominika*	*Mokroszová*	1	G FrýdČTěš	13	15	21	11	19	17	7	5	–	–	–	**107,61**	108
59.	*Jiří*	*Češka*	3	CMGProstěj	13	13	12	11	11	19	17	8	–	–	–	**106,70**	107
60.	*Martin*	*Pašen*	3	GRaymanaPV	20	16	15	17	18	–	20	–	–	–	–	**106,45**	106
61.	*Jan*	*Hrůza*	3	G Kadaň	8	16	8	11	15	12	16	17	–	–	–	**105,42**	105
62.	*Timur*	*Sibgatullin*	1	PČGKarVary	7	16	21	19	10	15	–	11	–	–	–	**99,04**	99
63.	*Ondřej*	*Bursa*	1	GTNovákBO	15	17	17	17	11	15	7	–	–	–	0	**98,44**	98
64.	*Vít*	*Kalisz*	4	FSG Pirna	17	13	17	17	18	11	–	–	–	–	–	**94,02**	280
65.	*Pavel*	*Čácha*	1	GMikul23PL	14	15	11	–	13	14	14	12	–	–	–	**92,42**	92
66.	*Filip*	*Chudoba*	2	PORG PH	9	14	18	12	16	12	–	9	–	–	–	**91,55**	166
67.	*Minh Duc*	*Pham*	1	NPorg	22	23	22	24	–	–	–	–	–	–	–	**90,72**	91
68.	*Martin*	*Bakoš*	2	GPBystrica	19	19	–	–	20	16	15	–	–	–	–	**88,40**	88
69.	*Marian*	*Poljak*	4	GJŠkodyPŘ	19	19	22	19	–	–	–	–	8	–	–	**88,38**	375
70.	*Slavomír*	*Hanzely*	4	GRaymanaPV	21	16	24	20	–	–	–	–	7	–	–	**88,27**	88
71.	*Adéla*	*Kostelecká*	4	GLesníZlín	18	20	20	21	–	–	–	8	1	–	–	**87,64**	237
72.	*Viktória*	*Brezinová*	1	GAlejKošic	21	22	19	22	–	–	–	–	3	–	–	**87,32**	87
73.	*Michal*	*Chudoba*	1	GLitoměřPH	11	17	13	15	15	10	–	5	–	–	–	**86,04**	86
74.	*Ondřej*	*Buček*	2	GJarošeBO	15	22	19	16	13	–	–	–	–	–	–	**84,16**	84
75.	*Ondřej*	*Svoboda*	3	GJarošeBO	10	20	20	–	14	–	20	–	–	–	–	**84,09**	164
76.	*Alžběta*	*Neubauerová*	2	GNadKavaPH	13	18	20	9	13	10	–	–	–	–	–	**83,38**	131
77.	*Jaroslav*	*Paidar*	2	SPŠMasarLI	20	17	12	15	–	19	–	–	–	–	–	**82,76**	193
78.	*Marek*	*Pospíšil*	3	GJatečníÚL	14	17	16	9	14	11	–	–	–	–	–	**82,45**	82
79.	*Viola*	*Vavryčuková*	3	G Dobříš	–	–	–	–	21	17	24	19	–	–	–	**81,78**	82
80.	*Daniel*	*Kopf*	4	SlezkéG OP	12	20	20	20	–	–	–	–	7	–	–	**79,14**	218
81.	*Barbora*	*Lišková*	3	GJPekařeMB	10	12	11	15	8	11	4	6	–	–	–	**78,85**	79
82.	*Jaromír*	*Mielec*	3	GVolgogrOS	17	17	18	7	16	–	–	–	2	–	–	**77,26**	521
83.	*Daniel*	*Pišťák*	4	GZborovPH	15	16	21	21	–	–	–	–	3	–	–	**75,02**	659
84.	*Erik*	*Kočandrle*	1	GMikul23PL	11	20	7	–	–	21	0	15	–	–	–	**74,24**	74
85.	*Jiří*	*Vala*	2	G Mikulov	–	–	–	–	18	20	20	16	–	–	–	**74,16**	235
86.	*Anna*	*Šírová*	2	GJilemnice	14	18	19	9	5	5	–	–	–	–	–	**70,43**	70
87.	*Martina*	*Šmehylová*	2	GHlinŽilina	7	12	11	9	14	7	5	5	–	–	–	**70,38**	70
88.	*David*	*Neugebauer*	3	SlezkéG OP	12	12	20	–	21	4	–	–	–	–	–	**70,37**	70
89.	*Dominika*	*Zumrová*	2	SPŠ PansPH	16	18	14	9	13	–	–	–	–	–	–	**70,30**	70
90.	*Zuzana*	*Tréglová*	3	G Žatec	17	13	13	7	21	–	–	–	–	–	–	**70,24**	220

91.	*Marek*	*Malý*	3	G Neratov	11	13	14	7	7	–	13	6	–	–	–	**69,87**	172
92.	*Zdeněk*	*Vostřel*	1		14	18	11	11	15	–	–	–	–	–	–	**69,16**	69
93.	*Anna*	*Musilová*	0	PORG PH	13	13	13	13	8	8	–	–	–	–	–	**68,80**	69
94.	*Filip*	*Strakoš*	3	G TGM Zlín	8	16	4	18	9	7	6	–	–	–	–	**68,23**	68
95.	*Jan*	*Petr*	3	GKepleraPH	21	21	24	–	–	–	–	–	–	–	–	**65,86**	66
96.	*Zuzana*	*Urbanová*	3	GUBalvanJN	18	8	–	–	8	9	22	–	–	–	–	**64,94**	65
97.	*Daniel*	*Herman*	3	GŠroKošice	–	–	–	–	12	15	9	15	–	6	6	**64,84**	65
98.	*Alžběta*	*Manová*	1	G UherBrod	13	13	8	8	11	7	–	–	–	–	–	**60,41**	60
99.	*Filip*	*Matějka*	2	GZborovPH	17	21	12	–	–	9	–	–	–	–	–	**59,61**	68
100.	*Daniel*	*Borák*	1	GŠpitálsPH	17	22	19	–	–	–	–	–	–	–	–	**58,54**	59
101.	*Adam*	*Doubrava*	0	GMasarykKM	12	13	12	–	7	7	–	6	–	–	–	**58,16**	115
102.	*Matej*	*Kvorka*	2	GŠkolDubni	16	16	9	–	11	–	5	–	–	–	–	**57,47**	57
103.	*Martina*	*Kalašová*	1	GJHroncaBA	19	20	17	–	–	–	–	–	–	–	–	**56,31**	56
104.	*Jan*	*Šorm*	4	GJarošeBO	18	17	22	–	–	–	–	–	–	–	–	**56,30**	541
105.	*Barbora*	*Mouleová*	2	G Plasy	5	9	10	12	5	5	0	10	–	–	–	**56,20**	96
106.	*David*	*Królikowski*	2	G Karviná	–	21	19	–	15	–	–	–	–	–	–	**54,48**	54
107.	*Matěj*	*Konvalinka*	2	GOA Sedlča	–	–	–	–	17	5	9	22	–	–	–	**53,88**	67
108.	*Hana*	*Jirovská*	2	NPorg	15	11	4	9	14	–	–	–	–	–	–	**52,95**	53
109.	*Kristína*	*Szabová*	2	GVarŽilina	20	19	13	–	–	–	–	–	–	–	–	**51,74**	97
110.	*Lenka*	*Vincenová*	2	GTomkovaOL	13	22	17	–	–	–	–	–	–	–	–	**51,66**	52
111.	*Adéla*	*Seidelmannová*	2	VOŠRychnovKn	12	18	11	–	–	5	5	–	–	–	–	**50,92**	51
112.	*Vojtěch*	*Jílek*	3	VOŠKutHora	10	11	13	8	7	–	–	–	–	–	–	**49,95**	50
113.	*Jan Antonín*	*Musil*	0	PORG PH	–	8	8	13	8	8	–	–	–	–	–	**46,39**	46
114.	*Filip*	*Oplt*	3	GBudějovPH	15	15	7	8	–	–	–	–	–	–	–	**45,65**	46
115.	*Adam*	*Španěl*	4		18	6	21	–	–	–	–	–	–	–	–	**45,27**	45
116.	*David*	*Krajíček*	2	BG Ostrava	14	17	5	–	8	–	–	–	–	–	–	**44,39**	44
117.	*Dan*	*Raffl*	3	GVoděraPH	11	11	13	8	–	–	–	–	–	–	–	**44,25**	44
118.	*Matouš*	*Trnka*	3	GJarošeBO	15	–	21	–	–	–	–	–	6	–	–	**43,24**	43
119.	*Vít*	*Gaďurek*	1	PORG PH	11	7	8	–	11	–	–	5	–	–	–	**43,16**	43
120.	*Nikola*	*Kalábová*	2	FSG Pirna	13	15	13	–	–	–	–	–	–	–	–	**41,05**	41
121.	*Jan*	*Klásek*	3	SlovanG OL	10	13	9	8	–	–	–	–	–	–	–	**40,94**	41
122.	*Anna*	*Šebestíková*	1	GCON ČesBuď	–	–	14	–	8	7	–	11	–	–	–	**39,97**	40
123.	*Anna*	*Jandová*	1	G Leg PB	–	16	–	–	14	10	–	–	–	–	–	**39,70**	40
124.	*Dominik*	*Krasula*	3	G Krnov	14	–	–	–	11	11	–	–	–	3	–	**39,48**	494
125.	*Peter*	*Súkeník*	4	GOkrŽilina	21	18	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**39,00**	39
126.	*Krystyna*	*Waniová*	2	G HavlČTěš	7	9	11	–	7	5	–	–	–	–	–	**38,99**	39
127.	*Tereza*	*Vlčková*	2	GJarošeBO	22	17	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**38,42**	38
128.	*Ondřej*	*Meduna*	1	GMikul23PL	–	11	13	7	–	–	7	–	–	–	–	**37,60**	38
129.	*Martin*	*Simet*	1	GMikul23PL	–	–	15	–	13	10	0	–	–	–	–	**37,53**	38
130.	*Andrej*	*Horník*	2	GAnMeTr	14	11	12	–	–	–	–	–	–	–	–	**36,66**	37
131.	*Jakub*	*Ucháč*	0	ZŠVranéNVl	13	10	13	–	–	–	–	–	–	–	–	**36,17**	36
132.	*Filip*	*Müller*	1	GMikul23PL	11	13	7	5	–	–	0	–	–	–	–	**35,70**	36
133.	*Anna*	*Mírková*	1	G LPika PL	7	15	13	–	–	–	–	–	–	–	–	**34,32**	34
134.	*Monika*	*Machalová*	1	GJHroncaBA	15	19	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**34,17**	34
135.	*Alexander*	*Csizmár*	1	GMikul23PL	7	15	11	–	–	–	0	–	–	–	–	**33,06**	33
136.	*Šárka*	*Míchalová*	1	G Kralupy	15	18	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**32,59**	33
137.	*Kateřina*	*Žáková*	1	SlovanG OL	11	8	13	–	0	–	–	–	–	–	–	**32,50**	33
138.	*Leoš*	*Smetana*	3	G Jaroměř	8	8	–	8	8	–	–	–	–	–	–	**32,00**	32
139.	*Samuel*	*Hrubý*	3	GFraŽilina	10	11	10	–	–	–	–	–	–	–	–	**31,99**	32
140.	*Miroslav*	*Hrabal*	2	GTomkovaOL	–	–	–	–	17	15	–	–	–	–	–	**31,95**	32
141.	*Josef*	*Král*	1	MendelG OP	–	15	17	–	–	–	–	–	–	–	–	**31,72**	32
142.	*Linh Giang*	*Tran*	1	GMikul23PL	10	15	7	–	–	–	–	–	–	–	–	**31,68**	32

143.–144.	*Vojtěch*	*Janků*	4	CMGPgBrno	13	9	–	9	–	–	–	–	–	–	–	**31,00**	31
143.–144.	*Valerie*	*Skopalová*	4	G VysMýto	12	11	8	–	–	–	–	–	–	–	–	**31,00**	31
145.	*Duc Long*	*Hoang*	1	GMikul23PL	–	–	13	11	–	–	7	–	–	–	–	**30,81**	31
146.	*John Richard*	*Ritter*	2	G MasNámTŘ	18	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**30,77**	31
147.	*Jana*	*Menšíková*	3		4	12	9	4	–	–	–	–	–	–	–	**29,91**	37
148.	*Tereza*	*Lukášová*	1	GMikul23PL	11	11	7	–	–	–	–	–	–	–	–	**29,55**	30
149.	*Vladimír*	*Lukačko*	2	GVarŽilina	14	16	0	–	–	–	–	–	–	–	–	**29,23**	90
150.	*Aneta*	*Němcová*	2	GBoskovice	–	9	0	9	–	9	–	–	–	–	–	**28,44**	28
151.	*Jakub*	*Čurda*	1	PORG PH	11	10	–	–	7	–	–	–	–	–	–	**28,17**	28
152.	*Jan*	*Dittrich*	4	GJarošeBO	3	5	5	5	4	3	3	–	–	–	–	**27,77**	106
153.	*Nodari*	*Gogatishvili*	2	GZborovPH	5	14	–	–	–	–	9	–	–	–	–	**27,52**	98
154.	*Anh Minh*	*Tran*	4	GJarošeBO	10	17	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**27,27**	27
155.	*Šimon*	*Hutař*	1	PORG PH	7	7	–	–	8	–	–	5	–	–	–	**27,19**	27
156.	*Daniel*	*Ridzoň*	2	GKepleraPH	14	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**27,05**	27
157.	*Ha Mi*	*Dao*	1	GŠmejkalÚL	8	–	–	12	7	0	0	–	–	–	–	**27,00**	27
158.	*Antonín*	*Štrpka*	1	G Šumperk	11	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**26,27**	26
159.	*Kateřina*	*Čížková*	2	G Rokycany	16	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**25,48**	25
160.	*Jakub*	*Zápotocký*	2	GOpatovPH	9	11	5	–	–	–	–	–	–	–	–	**25,47**	25
161.	*Denisa*	*Jandová*	1	GMikul23PL	11	11	3	–	–	–	–	–	–	–	–	**25,43**	25
162.	*Marián*	*Okál*	2	SŠNvh	15	–	–	–	11	–	–	–	–	–	–	**25,41**	51
163.–164.	*Jakub*	*Kropš*	1		11	–	–	–	14	–	–	–	–	–	–	**25,19**	25
163.–164.	*Lubomír*	*Smrček*	1		11	14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**25,19**	25
165.	*Radim*	*Novotný*	1	GMikul23PL	11	7	–	7	–	–	–	–	–	–	–	**24,96**	25
166.	*Marek*	*Murin*	4	GJHroncaBA	16	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**24,91**	65
167.	*Vojtech*	*Filipi*	1	GDašickáPA	–	–	15	10	–	–	–	–	0	–	–	**24,89**	25
168.	*Matěj*	*Coufal*	3	G HavlBrod	11	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**24,86**	25
169.	*Jana*	*Řežábková*	4	PORG PH	17	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**24,52**	133
170.	*Adam*	*Dobrovič*	3	GTajBanBys	16	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**24,36**	24
171.	*Johana*	*Dvořáková*	1	G Trutnov	–	14	–	–	10	–	–	–	–	–	–	**23,51**	24
172.	*Monika*	*Suchá*	1	GMikul23PL	11	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**22,76**	23
173.	*Andrej*	*Židek*	1	GJKTyla HK	7	16	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**22,68**	23
174.	*Petr*	*Zahradník*	1	GŠmejkalÚL	10	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**22,64**	23
175.	*Peter*	*Macko*	4	GJHroncaBA	13	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**22,46**	22
176.	*Matthew*	*Dupraz*	1	NPorg	–	22	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**22,43**	22
177.	*Zuzana*	*Svobodová*	4	G FrýdlNOs	4	18	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**22,13**	428
178.	*Jan*	*Česnek*	1	GJarošeBO	8	7	7	–	–	–	–	–	–	–	–	**22,06**	22
179.	*Tomáš*	*Hampl*	3	GDukelBR	10	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**21,69**	22
180.	*Ľubica*	*Hladká*	3	GTajBanBys	13	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**21,47**	21
181.	*Kateřina*	*Pařízková*	1	MatičníGOS	11	–	10	–	–	–	–	–	–	–	–	**21,38**	21
182.	*Radek*	*Wágner*	2	GMikul23PL	12	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**21,37**	21
183.	*Bára*	*Tížková*	2	G Bílovec	–	–	–	–	–	–	21	–	–	–	–	**21,02**	21
184.	*Matúš*	*Varhaník*	2	G Bytča	15	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**20,32**	20
185.	*Michal*	*Poft*	1	G Teplice	–	15	–	–	0	3	3	–	–	–	–	**20,23**	20
186.	*Barbora*	*Hálková*	2	SPŠStav LI	9	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**20,20**	20
187.	*Hana*	*Kučerová*	1	GKřenováBO	10	–	–	–	–	–	10	–	–	–	–	**20,00**	20
188.	*Marie*	*Freibergová*	3	G Děčín	11	4	–	4	–	–	–	–	–	–	–	**19,85**	20
189.	*David*	*Šnajdr*	1	GMikul23PL	7	–	13	–	–	–	–	–	–	–	–	**19,43**	19
190.	*Tomáš*	*Jurčo*	1	G Prachati	19	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**19,28**	19
191.	*Samuel*	*Baran*	2	GRaymanaPV	–	19	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**18,59**	19
192.–193.	*Andrea*	*Bínová*	1	G ČesLípa	–	–	–	11	–	–	7	–	–	–	–	**18,17**	18
192.–193.	*Tomáš*	*Pishovaký*	1	RGZS Prost	11	–	–	7	–	–	–	–	–	–	–	**18,17**	18
194.–195.	*Klára*	*Cihlářová*	2	G Klatovy	–	18	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**17,77**	18

194.–195.	*Martin*	*Strnad*	2	G Dobříš	–	18	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**17,77**	18
196.	*Jakub*	*Horyna*	3	GNVPlániPH	–	–	–	–	17	–	–	–	–	–	–	**17,27**	17
197.	*Kateřina*	*Vaňková*	4	GJarošeBO	–	10	1	6	0	0	0	–	0	0	–	**17,00**	17
198.	*Soňa*	*Burešová*	2	GHeyrovPH	17	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**16,90**	17
199.	*David*	*Vojáček*	1	GSOŠ FrMýs	17	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**16,83**	17
200.	*Magdaléna*	*Bártová*	1	GDašickáPA	–	10	7	–	–	–	–	–	–	–	–	**16,79**	17
201.	*Kateřina*	*Škorvánková*	3	G Rokycany	4	8	4	–	–	–	–	–	–	–	–	**16,46**	16
202.	*David*	*Žáček*	3	GZborovPH	16	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**16,36**	16
203.	*Jan*	*Dopita*	3	GBudějovPH	8	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**16,00**	16
204.–206.	*Jaroslav*	*Konečný*	1	G Čelákov	–	16	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**15,89**	16
204.–206.	*Jaroslav*	*Kortus*	1	GMikul23PL	–	16	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**15,89**	16
204.–206.	*Radovan*	*Picek*	1	GBalbínaHK	16	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**15,89**	16
207.–208.	*Jan*	*Lindauer*	2	PČGKarVary	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**15,05**	15
207.–208.	*Pavel*	*Nedělník*	2	GJarošeBO	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**15,05**	15
209.	*Jan*	*Sedlák*	4	GOPavla PH	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**15,00**	15
210.	*Monika*	*Berková*	1	GKepleraPH	–	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,61**	15
211.	*Anh*	*Le Hoang*	4	GJarošeBO	4	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,54**	205
212.–213.	*Veronika*	*Blovská*	2	GMikul23PL	14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,05**	14
212.–213.	*Petra*	*Šnoblová*	2	GJatečníÚL	–	14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,05**	14
214.	*Henrieta*	*Micheľová*	4	GAlejKošic	14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,00**	14
215.–216.	*Zuzana*	*Šraierová*	1	GČeskoliPH	–	–	14	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,81**	14
215.–216.	*Kamila*	*Ženatá*	1	GNeumannŽR	–	14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,81**	14
217.	*Kateřina*	*Šauerová*	1	GPSJazykHK	7	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,58**	14
218.	*Jan*	*Šuta*	3	GJŠkodyPŘ	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,47**	13
219.	*Martin*	*Hubata*	0	GMikul23PL	–	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,03**	13
220.	*Ákos*	*Záhorský*	2	G VJM Šahy	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,00**	13
221.–222.	*Sebastian*	*Hlavatý*	1	GPSJazykHK	–	–	–	–	13	–	–	–	–	–	–	**12,64**	13
221.–222.	*Karel*	*Müller*	1	GMikul23PL	–	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**12,64**	13
223.	*Filip*	*Pastierovič*	3	G ĽŠtúraZV	7	1	3	–	–	–	–	–	1	–	–	**12,59**	13
224.	*Matěj*	*Žídek*	4	G FrýdlNOs	12	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**12,00**	12
225.	*Štefan*	*Hollán*	2	G Bytča	12	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,54**	63
226.	*Oldřich*	*Kos*	3	GKepleraPH	–	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,39**	11
227.–234.	*Vojtěch*	*Breník*	1	GMikul23PL	–	–	–	11	–	–	–	–	–	–	–	**11,38**	11
227.–234.	*Pavlína*	*Čabounová*	1	G Hořovice	–	–	–	11	–	–	–	–	–	–	–	**11,38**	11
227.–234.	*Vítek*	*Dragoun*	1	GMikul23PL	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,38**	11
227.–234.	*Adam*	*Hlas*	1	GMikul23PL	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,38**	11
227.–234.	*Klára*	*Holešovská*	1	GJNerudyPH	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,38**	11
227.–234.	*Dominika*	*Jurčová*	1	G Prachati	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,38**	11
227.–234.	*Magdaléna*	*Sejkorová*	1	GUKlafárŽR	–	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,38**	11
227.–234.	*Veronika*	*Straková*	1	G Benešov	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,38**	11
235.	*Samuel*	*Karaba*	2	SŠNvh	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,31**	95
236.	*Tomáš*	*Dolák*	3	GNovéStraš	–	–	–	–	–	–	4	7	–	–	–	**11,20**	11
237.	*Karolína*	*Slaběňáková*	0	ZŠ ValKlob	–	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**10,11**	10
238.	*Přemysl*	*Kopečný*	4	ČRG ČesBuď	1	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**10,00**	10
239.	*Šárka*	*Altmanová*	2	G Rokycany	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,48**	9

240.–272. *Nevešli se.*

adresa: *Korespondenční seminář*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
web: *http://mks.mff.cuni.cz/*
e-mail: *mks@mff.cuni.cz*