

Máme za sebou podzimní část letošního ročníku. Po pohádkovém začátku jsme se přes všemožné poměry dostali až na šachovnici. A v závěru každý mohl zkombinovat své jazykové a matematické znalosti v anglické sérii. Ti nejdůležitější se nezalekli ani seriálu a statečně pronikli o něco blíže k tajům nekonečna. Beze ztráty jediného bodu podzimní částí prošel *Filip Bialas*, který tak drží první místo, těsně následován *Pavlem Turkem* a *Danilem Koževníkovem*.

Odměnou pro 24 nejúspěšnějších řešitelů je tradiční jarní soustředění, které se bude konat 12. až 20. března tentokrát na Šumavě. Ve hře jsou ovšem už nyní místa na soustředění podzimním. Na to jsou zváni řešitelé z nematuritních ročníků na základě výsledků jarní části. Naskytá se tak skvělá šance i pro mladší, méně zkušené, ale pilné řešitele. Proto neváhej a pusť se do řešení další série. Tentokrát Ti přinášíme kromě sedmé série zabývající se průsečíky a posledního dílu seriálu i příležitost znovu si oživit a zúročit nabrané zkušenosti ze všech předešlých sérií v podobě závěrečného myšmaše.

Hodně zábavy a dobrých nápadů při řešení posledních letošních sérií Ti přeje

Kája Kuchyňová

Co je dále v komentářích?

- Vzorová řešení 4. podzimní a 1. jarní série
- Vzorové řešení 2. seriálové série
- Poslední díl seriálu – Do nekonečna a ještě dál III.
- Výsledkové listiny
- Příloha: Zadání 3. a 4. jarní série a 3. seriálové série
- Příloha: Pozvánka na jarní výlet

Náboj

Jestli znáš týmovou matematickou soutěž Náboj, stačí Ti vědět, že se letos uskuteční v **pátek 15. dubna** a že registrace začíná už v **pondělí 14. března**. Pokud ne, tak jen stručně – potřebuješ k sobě další čtyři matematické nadšence, abyste spolu mohli dvě hodiny řešit zajímavé úlohy, přičemž se soutěží ve dvou kategoriích (Junioři a Senioři) a hned v šesti státech – České republice, Slovensku, Rakousku, Polsku, Maďarsku a Německu. U nás se týmy schází v Praze a Opavě, a pokud se chceš přihlásit, co nejrychleji registruj svůj tým na www.naboj.org, kde také najdeš více informací. Míst je jenom konečně a o soutěž bývá zájem!

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1



Jarní výlet

Jak už bylo řečeno v minulých komentářích, i letos se uskuteční tradiční jarní výlet, o kterém se dozvíš více v přiložené pozvánce. V **sobotu 9. dubna** už budeš mít určitě vyřešené všechny úlohy o průsečících i nekonečnu, a tak si před myšmašem přijed' provětrat hlavu na čerstvém vzduchu ve středočeských lesích. Kromě přírody potkáš i spoustu milých PraSátek, což už je opravdu dobrý důvod k výletu.

Areas and perimeters

4TH AUTUMN SERIES

MODEL SOLUTIONS

Problem 1.

(102; 102; 2,98; 3,0)

There are two unit squares. In the first one a circle is inscribed. The second one is divided into 49 congruent squares and in each of them a circle is inscribed. Decide what is bigger: the area of the circle in the first square, or the sum of the areas of all circles in the second one?

(Marta Kossaczká)

SOLUTION:

Let r be the ratio of the area of a square to the area of its inscribed circle. The second square is divided into 49 small squares, which are similar to the first unit square. In each of them, the ratio of the area of the square to the area of the inscribed circle is r . Therefore the ratio of the area of the second square to the sum of the areas of all circles is also r . Since both unit squares have the same area, the area of the large circle is equal to the sum of the areas of the small circles.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů jen spočítala obsahy kruhů, objevilo se ale i několik řešení podobných vzorovému, což mě potěšilo. Výhoda vzorového řešení je kromě elegance i to, že by takový přístup fungoval pro složitější útvary než je kruh, u kterých bychom třeba ani nebyli schopni jednoduše vypočítat jejich obsah.

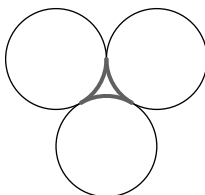
Část řešení počítala s obecnou délkou hrany čtverců místo jednotkové, která byla zmíněná v zadání. Obecnější řešení samozřejmě také funguje. V této úloze to nevadilo, ale u složitějších úloh by určitě nebylo od věci si pořádně přečíst zadání, i když je anglicky.

(Martin Töpfer)

Problem 2.

(105; 105; 2,94; 3,0)

Three circles with perimeter 36 are given. Each two of them touch as shown in the picture. What is the perimeter of the area between the circles (grey in the picture)?



(Rado Švarc)

SOLUTION:

First, note that the perimeters of the three circles are equal, and so are their radii (let us denote them by r). Therefore, the centers of the circles are vertices of an equilateral triangle. The endpoints of

each of the three arcs forming the grey area clearly lie on the sides of the triangle because the tangent point of two circles lies on the line segment joining their centers. Thus, the angle corresponding to each arc is 60° . Since 60° is $1/6$ of 360° , the length of each arc is $\frac{1}{6}$ of the perimeter of the circle. So the length of each arc is 6, and because the grey area is bounded by three such arcs, the perimeter we are trying to determine is 18.

POZNÁMKY:

Téměř všichni řešitelé sepsali úlohu tak, že jsem se rozhodl dát jim plný počet bodů. Na druhou stranu téměř v polovině všech řešení chybělo jakékoliv vysvětlení, proč je trojúhelník vytvořený středy kružnic rovnostranný. Angličtina byla v drtivé většině případů srozumitelná, rád bych ale upozornil na dvě nejčastější chyby. Za prvé, rovnostranný trojúhelník je „equilateral triangle“, velmi často jsem místo toho viděl v řešení napsáno „isosceles“, což znamená trojúhelník rovnoramenný. Za druhé, poloměr, tj. „radius“, má dvě možná množná čísla, „radiuses“ a „radii“. Druhá uvedená možnost je však mnohem běžnější a též vhodnější. (Viki Němeček)

Problem 3.

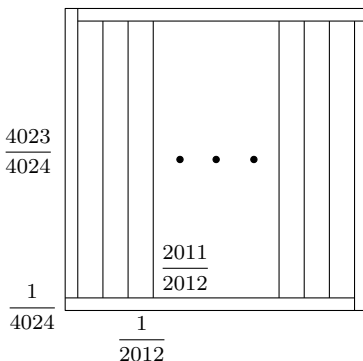
(54; 41; 2,26; 3,0)

Divide a unit square into 2015 (not necessarily congruent) rectangles with perimeter 2.

(Rado Švarc)

SOLUTION:

Along the perimeter of the unit square we place four rectangles with sides $\frac{1}{4024}$ and $\frac{4023}{4024}$ (thus with perimeter $2 \cdot (\frac{1}{4023} + \frac{4023}{4024}) = 2$)—see the picture. The remaining space forms a smaller square with side $1 - 2 \cdot \frac{1}{4024} = \frac{2011}{2012}$. This square can be divided into 2011 rectangles with sides $\frac{1}{2012}$ and $\frac{2011}{2012}$. All of them have perimeter 2, so we divided the unit square into 2015 rectangles with perimeter 2.



POZNÁMKY:

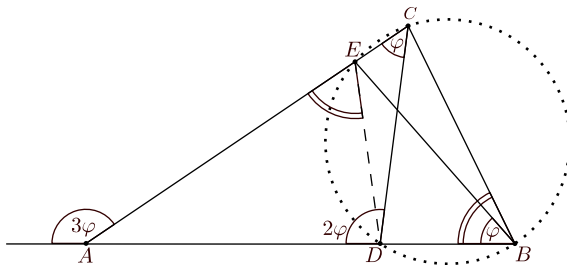
Zhruba tři čtvrtiny řešení byly správné a všechna dospěla ke stejnému obrázku. Většina řešitelů také komentovala, jak došla k délkám stran. To není nutné – stačí dokázat, že nalezené řešení opravdu funguje, což může třeba v olympiádě ušetřit čas. Jak se na to teda přijde? Po zjištění, že 2015 obdélníků vedle sebe nefunguje, dostaneme nápad, že dáme čtyři obdélníky okolo a zbytek rovnoměrně nakrájíme. Pak kratší stranu obdélníka na obvodu označíme jako x a znalost obvodů a strany rozdělovaného čtverce už nám dají rovnice pro x které mají jednoznačné řešení $1/4024$. U neúspěšných řešení bylo nejčastějším problémem nepochopení pojmu „unit square“, což znamená jednotkový čtverec neboli čtverec o délce strany 1. Rozdělení obecného čtverce je ale o dost jednodušší úloha. (Josef Svoboda)

Problem 4.

(58; 53; 4,41; 5,0)

The exterior angle at the vertex A of a triangle ABC equals 3φ . Let D, E be points on its sides AB and CA respectively, such that $|\angle ADC| = 2|\angle ABE| = 2\varphi$. Prove that the ratio of perimeters of triangles ADE and ABC is equal to $\frac{|AE|}{|AB|}$. (Martin „E.T.“ Šýkora)

SOLUTION:



The interior angles of the triangle ADC have to sum up to 180° , therefore $|\angle DCA| = \varphi$. We notice that $|\angle ECD| = \varphi = |\angle EBD|$ and this is sufficient for the quadrilateral $DBCE$ to be cyclic. Thus

$$|\angle CBA| = |\angle CBD| = 180^\circ - |\angle DEC| = |\angle DEA|.$$

Furthermore, triangles AED and ABC share the angle by vertex A , and so they are similar by AA. Let k denote the scale factor of those similar triangles, that means

$$k = \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|ED|}{|BC|}.$$

Hence we get

$$\frac{\text{perimeter}(ADE)}{\text{perimeter}(ABC)} = \frac{|AD| + |DE| + |EA|}{|AB| + |BC| + |CA|} = \frac{k \cdot |AC| + k \cdot |BC| + k \cdot |AB|}{|AB| + |BC| + |CA|} = k = \frac{|AE|}{|AB|}.$$

POZNÁMKY:

Úlohu šlo též vyřešit zcela bez použití tětiového čtyřúhelníku. Všimneme-li si, že trojúhelníky AEB a ADC jsou podobné podle *uu*, dostaneme $|AE|/|AD| = |AB|/|AC|$. Navíc trojúhelníky AED a ABC sdílejí úhel při vrcholu A , tudíž jsou podobné dle *sus*.

Někteří řešitelé použili několikrát sinovou, popřípadě kosinovou větu, čímž ale získali výrazně delší řešení náročnější na výpočty.

Jazyková poznámka na závěr – slovo *sentence* znamená *gramatická věta*, nikoli matematická. Doporučuji si osvojit slova *theorem*, *claim*. (Míša Hubatová)

Problem 5.

(48; 44; 4,60; 5,0)

A convex quadrilateral $ABCD$ is given. Let M and N denote the midpoints of AB and CD respectively. Furthermore, let the intersection of AN and DM be X and the intersection of BN and CM be Y . Prove that the sum of the areas of triangles ADX and BCY is equal to the area of quadrilateral $MXNY$. (Rado Švarc)

SOLUTION:

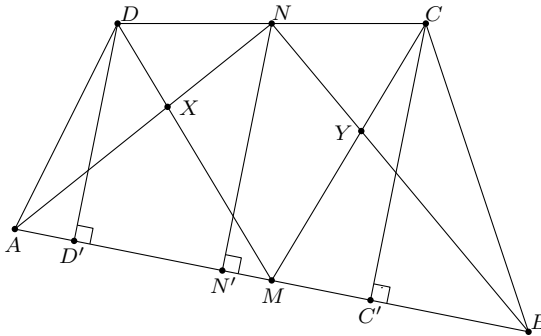
The quadrilateral $ABCD$ is convex so the points X and Y lie inside it. Let $[X_1X_2 \dots X_n]$ denote the area of the polygon $X_1X_2 \dots X_n$. We seek to prove that $[ADX] + [BCY] = [MXNY]$. Add $[AXM] + [BYM]$ to the both sides of the equation to get an equivalent statement

$$[ADM] + [BCM] = [ABN].$$

Let D' , N' and C' be the perpendicular projections of D , N and C respectively onto the line AB .¹ Note that $DD'C'C$ is a trapezoid, where $CN = ND$ and $NN' \parallel CC' \parallel DD'$. So NN' is the bimedian of the trapezoid and $NN' = (CC' + DD')/2$. Now we can compute $[ABN]$ and $[ADM] + [BCM]$:

$$\begin{aligned} [ABN] &= \frac{1}{2} AB \cdot NN' = \frac{1}{2} AB \frac{CC' + DD'}{2} \\ [ADM] + [BCM] &= \frac{1}{2} AM \cdot DD' + \frac{1}{2} BM \cdot CC' = \frac{1}{2} \frac{AB}{2} DD' + \frac{1}{2} \frac{AB}{2} CC' \end{aligned}$$

Therefore $[ABN] = [ADM] + [BCM]$.



POZNÁMKY:

Úloha byla poměrně jednoduchá, čemuž odpovídá veliký počet řešení za plný počet bodů. Mnoho řešitelů zdůvodnilo rovnost $NN' = (CC' + DD')/2$ jen velmi vágně (N je střed CD , proto ...). Body jsem za to nestrhával (pokud bylo zdůvodnění alespoň nějaké), ale pozor na to, podle mě to úplně zřejmé není. Přitom existuje mnoho různých důkazů, od těch méně elegantních (dokreslení průsečíku AB a CD či trigonometrie) přes úvahy o linearitě kolmé projekce až po velmi elegantní pozorování se střední příčkou lichoběžníku.

V podstatě všichni řešitelé také zapomněli zdůvodnit, proč X a Y leží uvnitř $ABCD$, přestože s tím pracovali (rozkládali obsahy větších trojúhelníků na součty obsahů menších).

(Matěj Konečný)

Problem 6.

(40; 34; 4,00; 5,0)

A triangle with heights h_1, h_2, h_3 and perimeter p is given. Prove that the inradius of the triangle with sides $1/h_1, 1/h_2, 1/h_3$ is equal to $1/p$.

(Rado Švarc)

SOLUTION:

Let a_1, a_2 and a_3 be the sides of the original triangle so that h_i is the height corresponding to a_i and let ρ be its inradius. By combining various formulae for the area of a triangle, we get $\frac{a_i h_i}{2} = \frac{p \rho}{2}$, which implies $\frac{1}{h_i} = \frac{a_i}{p \rho}$. This means that the new triangle is similar to the original one with coefficient $\frac{1}{p \rho}$. Therefore, the inradius of the new triangle is equal to $\frac{\rho}{p \rho} = \frac{1}{p}$.

¹ D' is the foot of the D -altitude in the triangle AMD and N' and C' are defined similarly.

POZNÁMKY:

Úloha nebyla příliš obtížná a mnoho řešitelů ji udolalo – někteří pěkně, někteří méně. Krátká a/nebo úhledná řešení, ve kterých se neobjevovaly odmocniny, jsem odměňoval imaginárním bodem.

Rád bych upozornil na to, že někteří psali „sentence *sss*“, což je čechismus, který se do angličtiny správně překládá jako „*SSS theorem*“. (Pokud by se objevila např. věta *sus*, překládala by se jako „*SAS theorem*“.) Dále platí, že přestože se pro Héróna Alexandrijského v angličtině používá jméno Hero of Alexandria častěji než Heron of Alexandria, jeho vzorec se stále překládá jako Heron's formula.

Nakonec bych rád do budoucna účastníky poprosil, aby si dávali pozor na to, co považují za známé. V řešení této úlohy se často objevil vzorec $1/\rho = 1/h_1 + 1/h_2 + 1/h_3$ a tvrzení o tom, že převrácená hodnota obsahu trojúhelníka je rovna

$$4 \cdot \sqrt{H \left(H - \frac{1}{h_1} \right) \left(H - \frac{1}{h_2} \right) \left(H - \frac{1}{h_3} \right)}, \text{ kde } H = \frac{1}{2h_1} + \frac{1}{2h_2} + \frac{1}{2h_3}.$$

Já jsem ani jedno z těchto tvrzení neznal, a přestože jejich důkaz není složitý, rozhodně není ani triviální. Víím, že není jasné, co vše se dá prohlašovat za známé, ale v našem semináři obecně platí, že pokud si nejste jistí, že je to opravdu hodně známé, a není to uvedené v úvodním textu, tak bychom byli rádi, kdybyste alespoň ocitovali zdroj, ze kterého čerpáte. To udělali jen sourozenci *Kopfovi*, které tímto veřejně chválím. Ovšem pokud jste skutečně citovanou větu použili správně, body jsem nestrhával. (Rado Švarc)

Problem 7.

(23; 16; 3,22; 4,0)

Matěj drew a convex 2016-gon. Rado is curious about its area. They agreed Rado can choose two points on its perimeter and draw a line passing through them which splits the 2016-gon in two parts. Then Matěj tells Rado the smaller one of the areas of these parts. Is it enough for Rado to repeat this 2013 times to determine the area of the 2016-gon? To choose a point X on the perimeter means to choose two adjacent vertices A and B of the 2016-gon and the ratio $r \in (0, 1)$ such that $r = |AX|/|AB|$.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

SOLUTION:

Suppose the vertices of the polygon are $A_1, A_2, \dots, A_{2016}$ in clockwise order; let the midpoint of segment $A_i A_{i+1}$ be S_i for $i = 1, \dots, 2016$ (where $A_{2017} = A_1$). Suppose X is a point on the perimeter of the 2016-gon but not on the sides $A_1 A_2$ and $A_{2016} A_1$. We will use $[X]$ to mean Matěj's answer if Rado chooses the line $A_1 X$. Line $A_1 X$ divides the 2016-gon into two polygons, let X_L be the one that contains A_{2016} and X_R the one that contains A_2 . Also, let $[X_L]$ and $[X_R]$ be their areas respectively. Write $[ABC]$ for the area of a triangle ABC .

From the problem statement we have $[X] = \min([X_L], [X_R])$. Next, note that

$$[A_1 A_i S_i] = [A_1 A_{i+1} S_i] = \frac{1}{2} [A_1 A_i A_{i+1}]$$

because median divides a triangle into two parts with the same area (the two triangles have the same length of one side and of the respective height).

Now we will prove one auxiliary lemma.

Lemma. *If X and Y are points on the perimeter such that $[X] \leq [Y]$ then the polygon among X_L, X_R that does not contain Y has area $[X]$.*

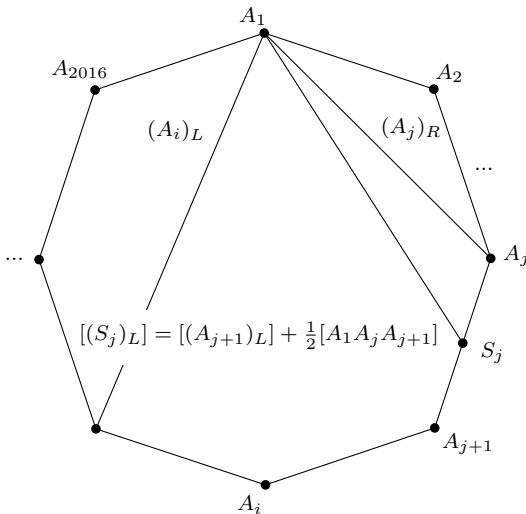
Proof. WLOG² assume that X_L does not contain Y . Because X_R contains Y_R we have

$$\min([X_L], [X_R]) = [X] \leq [Y] = \min([Y_L], [Y_R]) \leq [Y_R] < [X_R],$$

²Without Loss Of Generality

so really $[X] = \min([X_L], [X_R]) = [X_L]$. □

Now, let us describe a strategy that Rado can use. First we can ask about lines A_1A_{1008} and A_1A_{1009} . By the lemma above, in the case of $[A_{1008}] \leq [A_{1009}]$ we know that $[A_{1008}]$ represents the area of $(A_{1008})_R$ and otherwise $[A_{1009}]$ represents the area of $(A_{1009})_L$. Because $[(A_2)_R] = [(A_{2016})_L] = 0$, in both cases we are in the situation where we know the area of $(A_i)_L$ and $(A_j)_R$ for some i, j that satisfy $i - j \leq 1008$ (either $i = 2016$ and $j = 1008$ or $i = 1009$ and $j = 2$).



Suppose we know the area of $(A_i)_L$ and of $(A_j)_R$ and first assume that $[(A_j)_R] \leq [(A_i)_L]$. If we ask about the line A_1S_j we get

$$[S_j] = \min([(A_j)_R] + \frac{1}{2}[A_1A_jA_{j+1}], [(A_{j+1})_L] + \frac{1}{2}[A_1A_jA_{j+1}]).$$

Because

$$[(A_{j+1})_L] + \frac{1}{2}[A_1A_jA_{j+1}] \geq [(A_i)_L] + \frac{1}{2}[A_1A_jA_{j+1}] \geq [(A_j)_R] + \frac{1}{2}[A_1A_jA_{j+1}],$$

we know

$$[S_j] = [(A_j)_R] + \frac{1}{2}[A_1A_jA_{j+1}].$$

From this we can compute $[(A_{j+1})_R] = [(A_j)_R] + 2 \cdot ([S_j] - [(A_j)_R])$. If $[(A_j)_R] > [(A_i)_L]$ we can ask about the line A_1S_{i-1} and analogically compute the area $[(A_{i-1})_L]$. In any case, the difference between i and j decreases by one with this step so after at most 1008 steps we will have $i = j$ and we will know the area of the 2016-gon is $[(A_i)_L] + [(A_i)_R]$.

We have used at most $2 + 1008$ questions so the answer is yes, Rado can determine the area of the 2016-gon in 2013 questions.

POZNÁMKY:

Několik lidí bohužel pochopilo úlohu špatně a například nechali Rada dělat geometrické konstrukce, aby našli správnou dvojici bodů, na které se má zeptat. Ale jediný způsob, jak Rado může vybrat příslušné body, je popsán v zadání. Nemalé části těch, kteří úlohu vyřešili správně, trochu pokulhávala argumentace, ale rozhodl jsem se strhávat body až za větší pochybení.

Většina správných řešení byla více méně podobná tomu vzorovému. Další část řešení také zafixovala A_1 , ale pak se snažila najít takovou stranu $A_i A_{i+1}$, uvnitř které leží bod X takový, že $A_1 X$ půlí obsah zadaného 2016-úhelníku. V tomto trojúhelníku jde zjistit obsah celého mnohoúhelníku třemi dotazy $A_1 A_i$, $A_1 S_i$, $A_1 A_{i+1}$. Za elegantní řešení si vysloužil imaginární bod *Václav Steinhäuser*, který si naopak zafixoval stranu a hledal takový správný třetí vrchol, aby z výsledného trojúhelníku mohl dopočítat obsah celého mnohoúhelníku.

Několik řešitelů si všimlo, že otázek stačí položit mnohem méně (rekord drží *František Couf* s 18 otázkami), například s využitím ternárního vyhledávání³ – otázkami ale nebylo potřeba šetřit a takovéto snahy často jen zkomplikovaly sepisování. (Štěpán Šimsa)

Problem 8.

(14; 3; 1,07; 0,0)

A unit square is cut into rectangles. Each of them is coloured by either yellow or blue and inside it a number is written. If the color of the rectangle is blue then its number is equal to rectangle's width divided by its height. If the color is yellow, the number is rectangle's height divided by its width. Let x be the sum of the numbers in all rectangles. Assuming the blue area is equal to the yellow one, what is the smallest possible x ? (Rado Švarc)

SOLUTION (BY FILIP BIALAS):

First, we will prove that sides of each rectangle must be parallel to the sides of the unit square. Let G be a graph, whose vertices are the rectangles. Two rectangles are connected if their sides intersect at more than one point. If a rectangle is not adjacent to the lower side of the unit square then there is a neighbour below it. Eventually we will reach the lower side which is parallel to the sides of the initial rectangle.

Consider the unit square described in the problem. Let's say that there are r yellow and s blue rectangles. Denote the heights and widths of yellow rectangles by $a_1, a_2, \dots, a_r$ and $b_1, b_2, \dots, b_r$ and the heights and width of blue rectangles by $c_1, c_2, \dots, c_s$ and $d_1, d_2, \dots, d_s$, respectively. Then

$$\sum_{i=1}^r a_i b_i = \frac{1}{2}, \quad \sum_{i=1}^s d_i c_i = \frac{1}{2},$$

$$x = \sum_{i=1}^r \frac{a_i}{b_i} + \sum_{i=1}^s \frac{d_i}{c_i}.$$

By the Cauchy-Schwarz inequality in the fractional form:

$$\sum_{i=1}^r \frac{a_i}{b_i} = \sum_{i=1}^r \frac{a_i^2}{a_i b_i} \geq \frac{(\sum_{i=1}^r a_i)^2}{\sum_{i=1}^r a_i b_i} = 2 \left(\sum_{i=1}^r a_i \right)^2.$$

And therefore

$$\sum_{i=1}^s \frac{d_i}{c_i} \geq 2 \left(\sum_{i=1}^s d_i \right)^2.$$

Which yields a lower bound

$$x \geq 2 \left(\sum_{i=1}^r a_i \right)^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^s d_i \right)^2.$$

Now we will show that at least one of the sums $\sum_{i=1}^r a_i$ and $\sum_{i=1}^s d_i$ is greater or equal to 1. Suppose not. Consider the projection of the yellow rectangles onto the right side of the unit square. It does not cover the whole side because the sum of the heights of the yellow rectangles is less

³https://en.wikipedia.org/wiki/Ternary_search

than 1. So there is a horizontal strip which does not contain any yellow point. Similarly, there is a vertical strip which does not contain any blue point. The intersection of these two strips is not coloured, contradiction. Without loss of generality assume $\sum_{i=1}^r a_i \geq 1$.

$$\sum_{i=1}^s d_i \geq \sum_{i=1}^s c_i d_i = \frac{1}{2}$$

$$x \geq 2 \left(\sum_{i=1}^r a_i \right)^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^s d_i \right)^2 \geq \frac{5}{2}$$

The value $\frac{5}{2}$ is attained if we cut the unit square horizontally in the middle, so the minimum is indeed $\frac{5}{2}$.

POZNÁMKY:

Došla tři správná řešení, přičemž všechna jsou podobná vzorovému. Ostatní se mě pokusili přesvědčit, že x je menší, pokud jednotkový čtverec rozdělíme na méně obdélníků, což je sice intuitivní, ale dokázat se to nikomu nepodařilo. Chtěl bych pochválit Filipa Bialase za pěkně napsané řešení i elegantní zdůvodnění rovnoběžnosti, čímž si zasloužil $+i$.

Nevím proč, ale nemálo řešitelů použilo termín „weight“ pro šířku, přestože jsme přímo v zadání uvedli „width“.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Cestování a bloudění

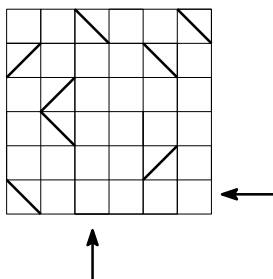
1. JARNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(106; 103; 2,90; 3,0)

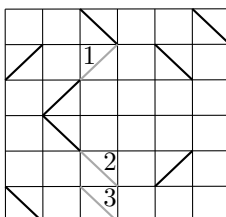
Hloupý Honza bloudil světem, když tu náhle našel podivnou čtvercovou šachovnici. K několika políčkům byla po úhlopříčce připevněna oboustranná zrcátka. Navíc z boku svítily do šachovnice dva lasery. Opodál se válelo další oboustranné zrcátko a Honza se jej rozhodl na šachovnici umístit podobně jako ostatní tak, aby po připevnění zrcátka první paprsek vycházel z šachovnice v políčku, kterým předtím vycházel druhý, a naopak. Kolika způsoby to mohl udělat?



(Martin „E.T.“ Sýkora)

ŘEŠENÍ:

Nejprve se podíváme, jak paprsky procházejí šachovnicí bez přidání zrcátka. Protože máme k dispozici pouze jedno zrcátko a potřebujeme změnit trasu obou paprsků, musíme zrcátko umístit na pole, kterým procházejí oba paprsky. Taková pole jsou na šachovnici tři a u každého máme dvě možnosti, jak na něj zrcadlo umístit. Když projdeme všech šest možností, tak snadno zjistíme, že na každém ze tří polí existuje právě jedno vhodné natočení zrcátka (zakreslené na obrázku dole), při kterém si paprsky vymění výstupní pole. Opačné natočení zrcátka způsobí, že jeden paprsek bude vycházet tam, kde druhý paprsek vchází. Honza tak má tři způsoby, jak zrcátko na šachovnici umístit.



POZNÁMKY:

Téměř třetina řešitelů si zadání trochu „poupravila“ a zrcátka umísťovala tak, aby jeden paprsek vycházel tam, kde druhý původně vcházel, a nikoli vycházel. Jelikož si touto změnou úlohu nijak nezjednodušili a našli totéž rozestavení zrcátek, pouze opačně natočených, žádné body jsem za tuto drobnou nepozornost nestrhávala. Pochvalu zasluhuji všichni ti, kteří krom nalezení správného umístění zrcátek také odůvodnili, že více možností již neexistuje. (Kája Kuchyňová)

Úloha 2.

(98; 90; 2,72; 3,0)

V Dračím království je patnáct měst. Mezi některými z nich létá přímá obousměrná dračí linka. Z každého města vede alespoň sedm takových linek. Dokažte, že je možné se s jejich pomocí přemístit mezi každými dvěma městy v království.

ŘEŠENÍ:

Postupujeme sporem. Předpokládejme, že existuje dvojice měst a , b , mezi kterými se nelze s pomocí dračích linek přepravit. Skupinu měst, do kterých se lze dostat z a , označme A (samotné město a do ní také počítáme), skupinu měst B definujeme analogicky. Kdyby nějaké město leželo zároveň v A i B , dalo by se s jeho pomocí zřejmě přepravit mezi a a b , čili žádné takové není. Dále A obsahuje alespoň osm měst – a a dalších alespoň sedm měst. Podobně je na tom B . V obou skupinách dohromady jsme tedy napočítali alespoň šestnáct měst, což je ovšem spor se zadáním. Náš předpoklad vede ke sporu, takže dokazované tvrzení skutečně platí.

POZNÁMKY:

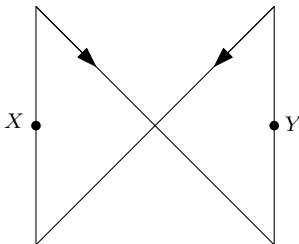
S úlohou nebyly velké problémy, většina řešitelů si s ní poradila na plný počet bodů. Pozor na správné obrácení (negaci) dokazovaného tvrzení při důkazu sporem – někteří řešitelé měli tendenci psát: „Aby tvrzení neplatilo, stačilo by, aby existovaly alespoň dvě oddělené skupiny měst . . .“, což je sice pravda, ale pro nás je podstatné, že je to (za předpokladu neplatnosti dokazovaného tvrzení) dokonce *nutné*. Jedině tak lze z nalezeného sporu oprávněně usoudit, že původní tvrzení skutečně platí. Většinou mě však tito řešitelé přesvědčili, že tentokrát šlo spíš o nešikovné vyjádření, než o logickou chybu.

Nejčastější chybou, za kterou se už body strhávaly, bylo uvedení jednoho příkladu rozmístění dračích linek, ve kterém dokazované tvrzení platí. To ovšem není *důkaz*, o který nám šlo. Přestože se správná řešení výrazněji nelišila, rozhodl jsem se dávat kladný imaginární bod za zcela správná řešení, která nějakým způsobem zobecnila zadání nebo si všimla, že se mezi každými dvěma městy dá přepravit s použitím nejvýše dvou dračích linek. (David Hruška)

Úloha 3.

(85; 60; 2,13; 2,0)

Bára a Kuba chodí dokola po trase, která je tvořena dvojicí rovnoběžných stran čtverce a jeho úhlopříčkami (jako na obrázku). Bára začíná uprostřed levé strany čtverce v bodě X a Kuba uprostřed pravé v bodě Y . Bára obejde celou trasu rovnoměrnou chůzí za 2015 vteřin, Kuba za 2016. Oba zároveň vyrazí po trase směrem nahoru a zastaví se za 2015 · 2016 vteřin. Spočítejte, kolikrát se mezitím na trase potkají.



(Matěj Konečný)

ŘEŠENÍ:

Bára jde stejným směrem a o něco větší rychlostí než Kuba. Můžeme si tedy představit, že Bára začíná na trase za Kubou a postupně ho dohání. Potkat se pak mohou dvěma různými způsoby: buď Bára Kubu dojde, nebo na sebe narazí „na křižovatce“ v průsečíku úhlopříček.

Snadno vypočítáme, že Bára za $2015 \cdot 2016$ vteřin obejde trasu přesně $2015 \cdot 2016 / 2015 = 2016$ -krát a Kuba $2015 \cdot 2016 / 2016 = 2015$ -krát. Bára se tedy za celou dobu posune vůči Kubovi přesně o jednu délku trasy vpřed. Protože začíná polovinu trasy za Kubou, na konci bude polovinu trasy před ním, a předejde ho tedy právě jednou.

Nyní už jen nahlédneme, že na křižovatce se nikdy nepotkají. Stačí se zřejmě zabývat případem, kdy každý z nich přijde po jiné úhlopříčce. V takovém případě by mezi sebou museli mít přesně polovinu trasy, takže rozdíl jejich uražených drah by musel být lichým násobkem poloviny délky trasy. Jak jsme ale viděli, toto nastane pouze na začátku a na konci, kdy jsou oba chodci na svých výchozích pozicích. Kuba s Bárou se tedy potkají právě jednou.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů měla o úloze dobrou představu a řešení uviděla, ale řada z nich měla problém ho správně zdůvodnit. Sešlo se relativně dost různých přístupů. Často se objevovaly formulace jako „v každém kole získá Bára náskok jednu vteřinu“, ze kterých nebylo jasné, co přesně mají znamenat. (Ve svém, nebo Kubově kole? Bářinu, nebo Kubovu vteřinu?) Většinou se mi ale nakonec podařilo je rozluštit a body jsem za ně strhávat nemusel. Nejvíce bodů asi dohromady ztratili řešitelé, kteří zapomněli vyřešit jeden nebo druhý způsob, jak se Bára s Kubou mohou potkat. (Ondra Cífkla)

Úloha 4.

(77; 72; 3,66; 4,0)

V bludišti je 2016 místností a k chodeb. Každá chodba spojuje právě dvě místnosti a každá dvojice místností je spojena nejvýše jednou chodbou. Tom do jedné místnosti vhodí Jerryho a do jiné umístí kus sýra. Jerry se snaží dostat k sýru. Pokaždé, když Jerry projde nějakou chodbou, uzamkne Tom chodbu, kterou si sám vybere, a Jerry jí už nikdy nemůže projít. Určete největší k takové, aby se pro jakékoli bludiště s 2016 místnostmi a k chodbami povedlo Tomovi zabránit Jerrymu v získání sýra. (Matěj Konečný)

ŘEŠENÍ:

Uvažme nejprve bludiště, ve kterém je každá dvojice místností spojená právě jednou chodbou. Pak počet chodeb v bludišti je roven počtu všech různých dvojic, které můžeme utvořit z 2016 místností, tj. $\binom{2016}{2} = 1008 \cdot 2015$. V tomto bludišti je ale každá z místností spojená s každou jinou, tudíž ať Tom umístí kus sýra a Jerryho jakkoli, Jerry prvním pohybem získá sýr.

Pro $K = 1008 \cdot 2015 - 1$ platí, že pro jakékoli bludiště s 2016 místnostmi a K chodbami Tom zabrání Jerrymu v získání sýra následujícím postupem. Na začátku umístí Tom Jerryho a sýr do dvou různých místností nespojených chodbou. Kdykoli Jerry dojde do místnosti, ze které vede neuzamčená chodba k sýru, Tom tuto chodbu uzamkne. Jinak Tom uzamkne jakoukoli jinou chodbu. Proto Jerry nezíská sýr. Tedy největší k takové, aby se pro jakékoli bludiště s 2016 místnostmi a k chodbami povedlo Tomovi zabránit v získání sýra, je $K = 2031119$.

POZNÁMKY:

Chceme-li ukázat, že Tom má vyhrávající strategii, pak je třeba popsat, jak má Tom reagovat na libovolný pohyb Jerryho. Tedy nestačí říci, že Tom vždy uzamkne chodbu spojující Jerryho a sýr, neboť Jerry mohl navštívit místnost, kde se právě nachází, již dříve, a chodba k sýru tak již mohla být uzamknuta.

Pokud chceme dokázat, že 2031119 je největší k takové, aby se pro jakékoli bludiště s 2016 místnostmi a k chodbami povedlo Tomovi zabránit v získání sýra, je podstatnou (a přitom snadnou) částí správného řešení vysvětlit, proč pro větší k Jerry vyhraje. Pokud zdůvodnění tohoto v řešení chybělo, nehodnotila jsem je plným počtem bodů. (Miša Hubatová)

Úloha 5.

(51; 39; 3,73; 5,0)

Labyrint sestává z několika místností spojených chodbami tak, že se z každé místnosti dá dojít do kterékoliv jiné.⁴ Během dlouhého pobytu v labyrintu Vašek z nudy napsal do každé místnosti délku nejkratší trasy, která začíná v této místnosti a navštíví všechny ostatní místnosti. Ukažte, že poměr čísel z libovolných dvou místností je maximálně 1,5.

(Rado Švarc)

ŘEŠENÍ:

Úlohu dokážeme sporem. Nechť existují dvě místnosti A, B s čísly a, b takové, že $a/b > 1,5$. Uvažme trasu X délky b , která vychází z bodu B , prochází všechny místnosti a končí v bodu C (podle zadání taková trasa existuje). Bod A se na této trase zřejmě alespoň jednou (ale možná vícekrát) vyskytuje. Označme BA část X od začátku do prvního výskytu bodu A na trase. Dále označme AC zbytek trasy X , čili část od prvního výskytu A až do konce trasy (uvědomme si, že AC může být prázdná). Potom zřejmě $|BA| + |AC| = b$.

Opacné trasy budeme značit $^{-1}$. Uvažme trasu BA^{-1} spojenou s X (její délka je tedy $|BA| + b$) a trasu AC spojenou s X^{-1} (její délka je tedy $|AC| + b$). Obě začínají v A a zřejmě projdou všechny místnosti (obsahují totiž X nebo X^{-1}), tudíž a musí být menší nebo rovno délkám těchto tras (uvědomme si, že a může popisovat nějakou úplně jinou trasu, jen s kratší délkou). Proto

$$a \leq |BA| + b,$$

$$a \leq |AC| + b.$$

Po sečtení nerovností dostaneme

$$2a \leq |BA| + b + |AC| + b.$$

Protože platí $|BA| + |AC| = b$, po úpravě máme $a \leq 1,5b$. Tímto dostáváme spor, a proto je poměr čísel z libovolných dvou místností maximálně 1,5.

POZNÁMKY:

Na úlohu šla většina lidí uvedeným způsobem, ať už důkazem sporem, nebo přímým. Druhá možnost byla využít úplně nejkratší trasu procházející všechny místnosti, nicméně hlavní myšlenka důkazu zůstává pořád stejná. Většina řešení byla správná, ale některá řešila pouze speciální bludiště, typicky bludiště v přímce, a ta tedy nemohla dostat plný počet bodů.

(Honza Soukup)

Úloha 6.

(30; 16; 2,67; 3,0)

V království jsou čtyři vesnice A, B, C a D , které v tomto pořadí tvoří konvexní čtyřúhelník. Štěpán v poledne vyrazí ze vsi A do vsi C , Filip v jednu hodinu vyrazí ze vsi B do vsi D . Viki prochází všechny obce postupně v pořadí A, B, C, D . V poledne vyjde z A , v jednu projde B , do C dorazí ve stejnou dobu jako Štěpán a do D ve stejnou dobu jako Filip. Viki se v žádné vesnici nezdržuje a vždy hned vyrazí do další. Každý z cestovatelů se pohybuje stálou rychlostí a mezi dvěma vesnicemi jde vždy po přímce. Je možné, aby se Štěpán s Filipem po cestě potkali?

(Rado Švarc)

ŘEŠENÍ:

Setkat se nemohou. Pro spor předpokládejme opak. Je jen jedno místo, kde mají možnost se setkat, a to v průsečíku X úseček AC a BD . Z trojúhelníkové nerovnosti plyne $|AB| + |BC| > |AC|$. Štěpán i Viki vyrazí z A ve stejnou dobu, oba přicházejí do C ve stejnou dobu a Viki má delší cestu než Štěpán; z toho plyne, že Viki je rychlejší než Štěpán. Analogicky ukážeme, že Viki je rychlejší než Filip.

Představme si, že místo aby Viki šel v jednu hodinu z B přímo do C , půjde nejprve z B do X a odtud teprve do C . Z B vyrazí ve stejnou dobu jako Filip a protože je rychlejší, bude v X

⁴Chodby spojují vždy právě dvě místnosti a mohou mít různé délky.

dříve než Filip. Protože Filip a Štěpán procházejí X ve stejnou chvíli, bude Viki v X také dříve než Štěpán. Protože je rychlejší než Štěpán a je blíže C než Štěpán, dojde do C dříve než Štěpán. Protože ale původně přicházel do C ve stejnou dobu jako Štěpán, musel jít kratší trasu. Ovšem z trojúhelníkové nerovnosti je $|BX| + |XC| > |BC|$, takže naopak šel delší trasu, což je spor.

POZNÁMKY:

Úloha šla vyřešit více způsoby. Pěkná řešení, která nepoužívala algebru, jsem odměňoval imaginárním bodem. Pravděpodobně nejčastější chyba, které se řešitelé dopouštěli, bylo používání ženského rodu pro Vikiho. Jedná se o našeho organizátora a je to vskutku muž. (Rado Švarc)

Úloha 7.

(33; 22; 3,30; 5,0)

Skupinka organizátorů vyrazila na jarní PraSečí výlet. Po cestě se občas ke skupince nějaký další org přidal nebo se odpojil. Kdo se od skupinky odpojil, už se znova nepřidal. Ve skupince šel vždy alespoň jeden člověk. Ukažte, že existuje množina orgů taková, že dohromady ušli alespoň polovinu cesty a přitom žádní dva z nich spolu nešli zároveň. (Rado Švarc)

ŘEŠENÍ:

Předpokládejme, že organizátoři nesou zlaté PraSe. Nést zlaté PraSe je velká čest; ten, kdo PraSe dostane, jej potom nese do té doby, než se musí z výletu odpojit. Když se z výletu odpojuje, předá PraSe jinému organizátorovi – takovému, který v daný okamžik je ve skupince a přitom dojde nejdál (pokud je jich více, tak libovolného z nich).

Nejprve si rozmyslíme, že zlaté PraSe přejde celou cestu. To je jasné, jelikož v každém okamžiku jde ve skupince alespoň jeden organizátor, takže má PraSe vždy kdo nést. Každý lichý nosič předá PraSe sudému, a ten ho nese nejdál, kam až to jde. Když PraSe už musí předávat, není ve skupince nikdo z těch, kdo v ní byli v té době, když PraSe dostal. Proto se nemůže stát, že by ho předal někomu, kdo šel s předchozím lichým organizátorem. Žádní liší nosiči proto nikdy nejdou spolu. Totéž platí pro sudé.

PraSe ušlo délku celého výletu, přičemž část cesty ho nesli sudí a zbytek cesty liší orgové. Když tedy vybereme větší z délek těchto dvou částí, dostaneme alespoň polovinu délky výletu.

POZNÁMKY:

S úlohou nebyly větší problémy. Pavlu Turkovi děkuji za nápad se zlatým PraSetem.

(Kuba Svoboda)

Úloha 8.

(; ; ;)

David a Honza jedou autem. Neshodli se, kdo bude řídit, a tak si zvolili nesoudělná čísla d a h . David po každých d kilometrech zahne o 90 stupňů doprava a Honza každých h kilometrů zahne o 90 stupňů doleva. Pokud by měli oba zahrnout najednou, tak budou pokračovat rovně. Na začátku míří ke svému cíli. Dokažte, že se k němu dostanou nezávisle na jeho vzdálenosti od startu, právě když d a h dávají stejný zbytek po dělení čtyřmi.⁵

(Rado Švarc)

ŘEŠENÍ:

Představíme si kartézskou soustavu souřadnic takovou, že auto vyráží z počátku po kladné části osy x , tj. v prvním kroku jede z $(0, 0)$ do $(1, 0)$. V podstatě tedy zkoumáme, kdy projede celou kladnou část osy. V řešení budeme předpokládat, že $d \geq h$. V opačném případě postupujeme obdobně.

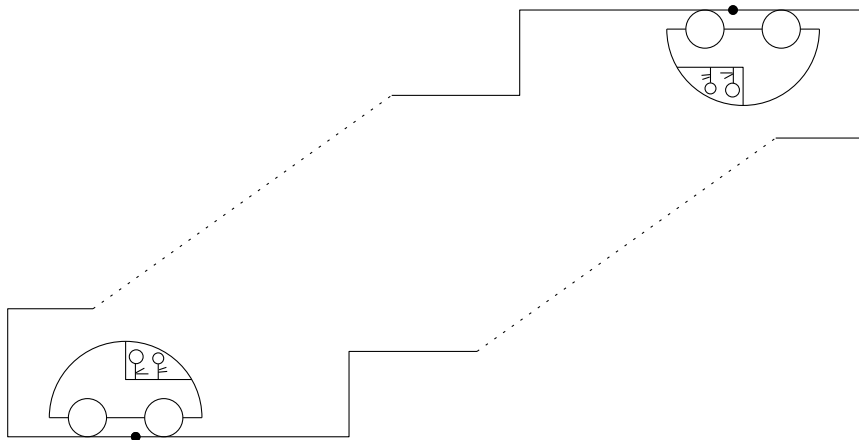
Prvně ukážeme, že pokud d a h dávají různé zbytky modulo 4, pak bude pohyb auta periodický s periodou $4dh$. To znamená, že po $4dh$ kilometrech se auto znovu ocitne na startu. Nikdy se proto od počátku nevzdálí na více než $4dh$ kilometrů od počátku, a tak nemůže projet celou kladnou část

⁵Počáteční vzdálenost do cíle může být i neceločíselná.

osy x . Všimněme si, že změny pohybu auta jsou periodické s periodou dh , protože $d \mid k$, právě když $d \mid k + dh$, a analogicky pro h .

Nejprve nechť $d - h$ je liché. Během prvních $2dh$ kilometrů se auto otočilo $2h$ -krát doprava a $2d$ -krát doleva. Protože čtyřnásobné otočení stejným směrem se vynuluje a otáčení nezávisí na pořadí, pak $2h$ otočení doprava a $2d$ otočení doleva je ve výsledku stejné jako $2(d - h)$ otočení doleva, což je stejné jako jedno otočení o 180° (protože $2(d - h) \equiv 2 \pmod{4}$). Proto je po $2dh$ kilometrech auto otočené opačně než na začátku. Nechť auto po ujetí $2dh$ kilometrů skončilo na souřadnicích (a, b) . To znamená, že vystoupalo o b kilometrů nahoru a posunulo se o a kilometrů doprava. Protože zatáčení se opakuje s periodou dh a auto je natočené obráceně než na začátku, přesune se během dalších $2dh$ kilometrů o a kilometrů doleva a o b kilometrů dolů, takže bude opět v počátku. Celkem ujede $4dh$ kilometrů. Otočí se $4d$ -krát doleva a $4h$ -krát doprava, takže bude natočené stejně jako na začátku. A protože zatáčení je periodické s periodou dh , bude nyní auto zatáčet stejným způsobem jako na začátku. Takže se skutečně zacyklí.

Pro $d - h$ dávající zbytek 2 modulo 4 je postup analogický, pouze namísto prvních $2dh$ kilometrů zkoumáme prvních dh kilometrů. Úplně stejným přístupem dostaneme, že se zacyklí s periodou $2dh$ (a tudíž i $4dh$). Tím jsme dokázali jednu implikaci.



Nyní nechť d a h jsou nesoudělná přirozená čísla dávající stejný zbytek modulo 4. Ukážeme, že po dh kilometrech se bude auto nacházet v bodě $(1, 0)$ a bude natočené stejně jako na začátku. Protože je pohyb auta periodický po dh kilometrech a v následujícím kroku auto pojedje do $(2, 0)$, plyne z toho (indukcí podle $\lfloor \lambda \rfloor$), že v bodě $(\lambda, 0)$, kde λ je kladné reálné číslo, bude auto po $\lfloor \lambda \rfloor \cdot dh + (\lambda - \lfloor \lambda \rfloor)$ kilometrech. Jinými slovy, auto se po $\lfloor \lambda \rfloor \cdot dh$ kilometrech posune do $(\lfloor \lambda \rfloor, 0)$ a následně bude přejíždět po ose x dopředu, během čehož narazí na cíl.

To, že auto bude po dh kilometrech natočeno původním směrem, ukážeme jednoduše: Po dh kilometrech se otočí d -krát doleva a h -krát doprava. To je to samé, jako by se otočilo $(h - d)$ -krát doprava. Ovšem $4 \mid h - d$ čtyřnásobné otočení stejným směrem nemá žádný účinek, takže po dh kilometrech bude skutečně nasměrované stejně jako na začátku.

Víme, že d a h jsou nesoudělná. To znamená, že po dělení čtyřmi nemohou dávat zbytek 0 ani 2, protože jinak by byla obě sudá, a proto by nebyla nesoudělná. Budeme předpokládat, že dávají zbytek 1, zbytek 3 se vyřeší obdobně.

Uvažujme tabulku $h \times d$ vyplněnou šipkami mířícími doprava, doleva, nahoru a dolů tak, že v levém horním rohu je šipka ukazující doprava, v řádce se při průchodu zleva doprava šipky postupně otáčí proti směru hodinových ručiček a ve sloupci se při průchodu shora dolů otáčejí po

políčko, které navštívíme v i -tém kroku, je určeno zbytky po dělení i čísly d a h . Takže pozice po dh krocích je určená „součtem“ všech šipek v tabulce. Protože v každých čtyřech po sobě jdoucích políčkách v jednom řádku i sloupci jsou všechny čtyři šipky, které se „vykrátí“, zůstane „součet“ všech šipek v tabulce stejný po smazání čtyř spodních řádků nebo čtyř pravých sloupců. Protože tabulka je tvaru $(4m + 1) \times (4n + 1)$, dostaneme jednoduchou indukci, že „součet“ je stejný jako v tabulce 1×1 , která má „součet“ roven jedné šipce mířící doprava. (V případě $d \equiv h \equiv 3 \pmod{4}$ bychom dostali, že „součet“ je stejný jako v tabulce 3×3 , kde je ovšem roven jedné šipce mířící doprava.) To znamená, že po dh krocích skutečně skončíme na pozici $(1, 0)$, což jsme chtěli dokázat.

POZNÁMKY:

Řešení přišlo nemnoho. Některá vyřešila jen první, jednodušší část. Kdo vyřešil druhou část, obvykle tak učinil „v principu stejným“ způsobem jako vzorák. Nikdo ovšem nepoužil tabulku, ze které to bylo nejlépe vidět. Jeden z řešitelů ji dokonce zamaskoval komplexními čísly. (Rado Švarc)

Do nekonečna a ještě dál 2

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(17; 12; 3,29; 5,0)

Dokažte z axiomů teorie množin platnost formule

$$(\forall a)(\exists b)(\forall c)((c \in b) \Leftrightarrow (\exists d \in a)(c \subset d)).$$

(Mirek Olšák)

ŘEŠENÍ:

Nejprve převedeme formuli do běžné řeči, abychom věděli, co vlastně dokazujeme. Pro každou zadanou množinu a máme nalézt nějakou množinu b . Tato množina přitom bude složena právě z těch množin c , které jsou podmnožinami některého prvku $d \in a$. Jinými slovy se snažíme sestrojit množinu

$$b = \bigcup \{\mathcal{P}(d) : d \in a\}.$$

Použitím axiomů ukážeme, že taková množina opravdu existuje, tedy že se nejedná o vlastní třídu. Existují dva základní způsoby, jak to udělat:

POMOCÍ SCHÉMATU AXIOMŮ NAHRAZENÍ:

Využijeme axiom nahrazení podobně jako v příkladu na straně 31, když jsme dokazovali existenci kartézského součinu. Naším cílem bude vytvořit z množiny a , kterou lze zapsat také jako $\{d : d \in a\}$, množinu $\{\mathcal{P}(d) : d \in a\}$ tím, že každý prvek nahradíme jeho potenci. To, že potencia každého prvku existuje, víme díky axiomu potence. Příslušným třídivým zobrazením bude formule $\psi(x, y)$ definovaná jako $y = \mathcal{P}(x)$. Jsou splněny předpoklady axiomu nahrazení, tj. jedná se skutečně o zobrazení? Ano, protože potencia množiny je určena jednoznačně – to plyne z axiomu extensionality.

Díky schématu axiomů nahrazení použitého s formulí $y = \mathcal{P}(x)$ tedy vytvoříme z množiny a množinu $\{\mathcal{P}(d) : d \in a\}$. Na ni už stačí jen aplikovat axiom sjednocení.

POMOCÍ SCHÉMATU AXIOMŮ VYDĚLENÍ:

Také můžeme ke konstrukci přistoupit tak, že nejprve vytvoříme nějakou množinu, která b obsahuje, a na závěr použijeme axiom vydělení. Díky axiomům sjednocení a potence lze vytvořit množinu $B = \mathcal{P}(\bigcup a)$. Z jakých množin je vzniklá množina B složena? Tvrzení $c \in B$ platí právě tehdy, když je $c \subset \bigcup a$, tedy když je tvořena z prvků prvků a . My ale nechceme, aby byla složena z libovolných prvků prvků a ; každá množina c má obsahovat prvky pouze jediného prvku množiny a (tento prvek je v dokazované formuli označován jako d).

Je nicméně vidět, že každý prvek b leží rovněž v B . Je proto možné použít axiom vydělení s formulí $\varphi(x)$ definovanou jako $(\exists d \in a)(x \subset d)$. Ten zjevně ve výsledné množině nechá pouze prvky, které v ní chceme.

POZNÁMKY:

Došlá řešení byla většinou víceméně správná a oba přístupy se vyskytovaly zhruba stejně často. U prvního mnoho z Vás opomnělo zdůvodnit jednoznačnost pomocí axiomu extensionality, za což jsem ovšem nakonec body nestrhával. Výraznějším prohřeškem byla snaha zkonstruovat množinu pomocí „postupného sjednocování“ – někteří výslovně zmínili axiom dvojice. Takový přístup by fungoval v případě, že by množina a byla konečná, ale co když bude dokonce nespočetná? V takovém případě je nutné použít axiom nahrazení místo postupného přidávání prvků.

Řešením, která byla sepsána bezchybně a nezvykle přehledně, jsem uděloval imaginární bod.

(Kuba Krásenský)

Úloha 2.

(14; 10; 3,64; 5,0)

Je dána funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Kdykoli zvolíme reálná čísla $a < b$ a množina $\{f(x) : a < x < b\}$ má největší prvek, nazveme tento prvek *lokálním maximem* funkce f . Dokažte, že množina všech lokálních maxim funkce f je spočetná.

(Mirek Olšák)

ŘEŠENÍ:

Nejprve si uvědomíme jednu pomocnou skutečnost – že množina $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, tj. množina dvojic racionálních čísel, je spočetná. V prvním díle seriálu jsme totiž dokázali jak spočetnost $\mathbb{Q}$, tak spočetnost spočetného sjednocení spočetných množin. Kdyby se nám tedy podařilo sestavit prosté zobrazení z množiny všech lokálních maxim do $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, máme vyhráno.

Vezmeme proto nějaké lokální maximum y funkce f . Víme, že k němu existuje nějaký interval (a, b) takový, že je y největším prvkem množiny $\{f(x) : a < x < b\}$. Zvolme tedy nějaký takovýto interval. V něm nalezneme alespoň jedno x_0 takové, že $f(x_0) = y$. Díky hustotě racionálních čísel umíme nalézt taková racionální čísla p, q , aby $a < p < x_0 < q < b$. Zjevně je y i největším prvkem množiny $\{f(x) : p < x < q\}$, protože se jedná o podmnožinu původní množiny, která navíc obsahuje $f(x_0)$.

Každému lokálnímu maximu tedy umíme přiřadit nějaký interval s racionálními krajními body. Toto přiřazení je přitom prosté, jelikož interval (p, q) nemůže mít více lokálních maxim. Podařilo se nám tedy ukázat, že existuje prosté zobrazení množiny všech lokálních maxim do spočetné množiny $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

POZNÁMKY:

Většina došlých řešení obsahovala onu klíčovou myšlenku, že každé lokální maximum musí být maximem i na nějakém intervalu s racionálními okraji. Dost mě ale mrzelo, že si většina z Vás pořádně nepřčetla zadání. Podle trochu nečekané definice v zadání je totiž lokálním maximem funkční hodnota, ne bod definičního oboru – například funkce sinus tedy má jediné lokální maximum, a to $+1$. A podobně toto maximum nemusí být ostré; když si například vezmeme libovolnou konstantní funkci a kterýkoliv interval, bude množina $\{f(x) : a < x < b\}$ obsahovat jediný prvek, ten tedy bude automaticky největším prvkem, a tudíž lokálním maximem. Podle toho, jak moc jste si svoji špatnou interpretaci zadání zjednodušili práci, jsem strhával body. Naopak řešení, která byla stručná a zároveň nic neopomněla, jsem odměnil kladným imaginárním bodem.

Opakovaně jsem se setkal s dvěma nepravdivými tvrzeními. První z nich říkalo, že funkce na každém intervalu (a, b) nabývá nějakého maxima. To není pravda hned ze dvou důvodů. Zaprvé funkce nemusí na daném intervalu být omezená – příkladem je $f(x) = 1/x$ na $(0, 1)$. A zadruhé sice omezená být může, ale příslušná množina nemusí obsahovat největší prvek – například $f(x) = x$ má nejvyšší hodnotu na pravém okraji intervalu, jenže ten do intervalu nepatří.

Druhým omylem bylo tvrzení, že množina lokálních maxim je diskrétní (z čehož by pak už hned plynila její spočetnost). Snadno totiž popíšu funkci, která má za množinu lokálních maxim celé $\mathbb{Q}^+$, tj. všechna kladná racionální čísla. Stačí vzít libovolnou bijekci $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}^+$ a tu následně dodefinovat nulami ve všech neceločíslných bodech. Komu se chce, může si podobným způsobem zkonstruovat funkci, která naopak nabývá lokálního maxima v každém racionálním bodě.

Na závěr tohoto dlouhého komentáře ještě chci upozornit, že reálná čísla sice jsou uspořádanou množinou a toto uspořádání má mnohé dobré vlastnosti, ale *nejedná se o dobré uspořádání*. Vlastností dobrého uspořádání umožňují k danému prvku nalézt prvek bezprostředně následující, což pro reálné číslo provést nelze!

(Kuba Krásenský)

Úloha 3.

(6; 2; 1,67; 0,0)

O množině $X \subset \omega_1$ řekneme, že je *šikovná*, pokud

- (i) X je nespočetná,
- (ii) pro každou spočetnou množinu $Y \subset X$ je $\bigcup Y$ prvkem X .

Dokažte, že průnik dvou šikovných množin je opět šikovná množina.

(Mirek Olšák)

ŘEŠENÍ:

Nejprve dokážeme jedno pomocné tvrzení.

Tvrzení. Podmnožina $X \subset \omega_1$ je nespočetná právě tehdy, když pro každý ordinál $\alpha \in \omega_1$ existuje $\beta \in X$ takové, že $\alpha < \beta$.

Důkaz. Podle seriálu je množina $X \subset \omega_1$ spočetná právě tehdy, když $\bigcup X \in \omega_1$, což znamená, že $X \subset \omega_1$ je nespočetná právě tehdy, když $\bigcup X = \omega_1$. Pokud $\bigcup X = \omega_1$, pak pro každý ordinál $\alpha \in \omega_1$ platí $\alpha \in \bigcup X$, neboli existuje $\beta \in X$ větší než α . Naopak pokud pro každý ordinál $\alpha \in \omega_1$ dokážeme najít větší ordinál $\beta \in X$, pak $\alpha \in \bigcup X$, tudíž $\bigcup X = \omega_1$, tedy X je nespočetný. $\square$

Mějme dvě libovolné šikovné množiny X, Y a necht' $Z = X \cap Y$. Napřed ověříme, že Z splňuje podmínku (ii) ze zadání. Pokud W je spočetná podmnožina Z , pak W je také podmnožinou X a Y , a proto je $\bigcup W$ prvkem X a Y , tedy i jejich průniku Z . Tím je tvrzení dokázáno.

Zbývá ukázat, že Z splňuje i podmínku (i), tedy že Z je nespočetná. Pro spor předpokládejme, že existuje ordinál $\alpha \in \omega_1$, který je větší než všechny prvky ze Z . Sestrojíme následující posloupnost ordinálů. Nejprve zvolíme $x_0 > \alpha$ z X , dále $y_0 > x_0$ z Y . Pokračujeme výběrem $x_k > y_{k-1}$ z X a $y_k > x_k$ z Y pro všechna přirozená k počínaje jedničkou. Existenci hledaných prvků v každém kroku zaručuje dokázané tvrzení a nespočetnost množin X a Y . Nyní uvažujme $\bigcup_{i=0}^{\infty} x_i$, které podle podmínky (ii) leží v X , a $\bigcup_{i=0}^{\infty} y_i$ ležící v Y . Platí, že $x_k < y_{k+1}$, a proto $x_k < \bigcup_{i=0}^{\infty} y_i$, z čehož plyne $\bigcup_{i=0}^{\infty} x_i \leq \bigcup_{i=0}^{\infty} y_i$. Analogicky se dá ukázat, že $\bigcup_{i=0}^{\infty} y_i \leq \bigcup_{i=0}^{\infty} x_i$, tudíž $\bigcup_{i=0}^{\infty} y_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} x_i$. Tento ordinál je tedy společným prvkem X a Y , a proto leží v Z . Dospěli jsme tedy ke sporu.

POZNÁMKY:

Tato úloha vyžaduje dobré porozumění seriálu a pečlivé zacházení s pojmy a symboly. Neúspěšné byly snahy dokázat, že šikovné množiny musejí obsahovat od jistého ordinálu všechny větší ordinály – nic takového platit nemusí, protipříkladem je třeba množina všech limitních ordinálů. Chtěl bych pochválit *Jakuba Löwita* za hezký sespané řešení s postupem podobným vzorovému a *Filipa Bialase* za originální použití *Pressing down lemmatu* ze seriálu.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Do nekonečna a ještě dál.....

Axiom výběru očividně platí, princip dobrého uspořádání očividně neplatí, a Zornovo lemma – těžko říct. – Jerry Bona

Díl třetí – Síla volby

aneb Nač ten humbuk okolo axiomu výběru

V minulém díle jsme představili sadu deseti axiomů teorie množin, které se v současnosti běžně používají. Jeden z nich, axiom výběru, mezi nimi ale z počátku chyběl. Skutečnost, že se matematikům nedaří dokázat něco tak zřejmého jako „je možné provést nekonečně mnoho nahodilých výběrů najednou“, způsobila pozdvižení. Obzvláště poté, co shledali, že na jednu stranu lze z axiomu výběru odvodit různé pochybné vzhlízející důsledky, ale na druhou stranu jej již mimoděk používají ve svých důkazech. Obava, krátce poté, co se zbavili Russelova paradoxu, byla pochopitelná. Opravdu si můžeme jen tak dovolit přidat nový axiom? Nemůže se s ním teorie zas rozbit? Nakonec problém rozsekl podobně jako hypotézu kontinua⁶ (použitím obdobných pokročilých nástrojů). Axiom výběru není možné pomocí ostatních axiomů dokázat ani vyvrátit.

Rozdíl mezi axiomem výběru a hypotézou kontinua spočívá v tom, jak k této nezávislosti na ostatních axiomech matematici přistoupili. Zatímco u hypotézy kontinua se smířili s tím, že se holt nikdy nezjistí, jak to s ní „doopravdy“ je, axiom výběru uznali za natolik intuitivní a zřejmý, že jej zařadili mezi ostatní axiomy. Tento přístup není povinností – kdokoli si může zvolit svou sadu axiomů, kterou bude uznávat. Jde jen o všeobecně rozšířenou praxi, které se držíme i zde.

V tomto díle seriálu se axiomu výběru podíváme na zoubek. Dozvíš se, k čemu potřeba není, jak vypadá jeho takřka přehlédnutelné použití, jak s ním umravnit porovnávání mohutností, i jaké paradoxy⁷ z něj jdou odvodit.

Co axiom výběru je a co není

Axiom výběru říká

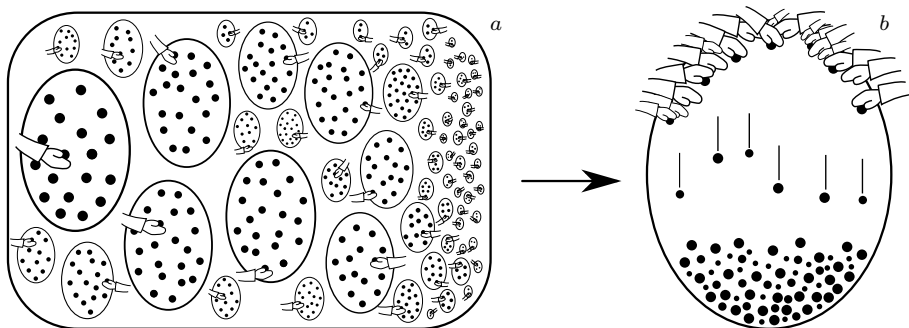
$$(\forall x \in a)(\forall y \in a)(x \neq y \Leftrightarrow x \cap y = \emptyset) \Rightarrow (\exists b)(\forall x \in a)(\exists y)(x \cap b = \{y\}).$$

Slovy: Kdykoli máme množinu a , jejíž prvky jsou navzájem disjunktní (tj. neprotínající se) neprázdné množiny, umíme vybrat z každého prvku x množiny a jednoho reprezentanta $y \in x$ a sestavit množinu reprezentantů b .

Laický, avšak výstižný popis axiomu výběru zní: **Lze provést nekonečně mnoho nahodilých výběrů najednou.** Je dobré si uvědomit, proč jsou v tomto popisu pojmy „nahodilý“ a „nekonečně mnoho“. Důvodem jsou následující dvě tvrzení, z nichž první říká „Nenahodilé výběry lze provádět i bez axiomu výběru.“ a druhé „Konečně mnoho výběrů lze taktéž provést bez axiomu výběru.“.

⁶Připomínáme, že hypotéza kontinua je výrok $|\omega_1| = |\mathbb{R}|$, který nelze dokázat ani vyvrátit. Ví se pouze, že $|\omega_1| \leq |\mathbb{R}|$.

⁷Zde myslíme překvapivá tvrzení, nikoli spor jako v případě Russelova paradoxu.



Tvrzení. Pokud máme předpis (formuli), jak z jednotlivých množin $x \in a$ najít reprezentanta $y \in x$, plyne existence množiny reprezentantů z axiomu nahrazení.

Axiom výběru je tedy potřeba jenom v případě, kdy takový předpis nemáme. Poznamenejme, že předpis máme například v situaci, kdy všechny množiny x obsahují přirozená (či obecněji ordinální) čísla. V takovém případě může předpis znít „vezmi nejmenší číslo z dané množiny“.

Tvrzení. Pokud je množina a konečná, lze najít množinu reprezentantů bez axiomu výběru. Axiom výběru tedy je třeba až v okamžiku, kdy je a nekonečná množina.

Důkaz. Dokážeme to (obyčejnou, nikoli transfinite) indukcí podle velikosti a . V okrajovém případě, kdy je a prázdná množina, je správnou odpovědí prázdná množina reprezentantů. Označme dále n počet prvků množiny a a předpokládejme, že lze najít množinu reprezentantů v každé $(n-1)$ -prvkové množině. Dokážeme, že ji lze najít i v množině a . Uvažme jeden prvek x množiny a (existuje, protože a je neprázdná) a dále prvek $y \in x$ (existuje, protože x je neprázdná množina). Dále z indukčního předpokladu najdeme množinu b reprezentantů z $a \setminus \{x\}$. Kýžená množina reprezentantů pro a pak je například $b \cup \{y\}$. $\square$

Tento důkaz nelze transfinite zobecnit, protože se v něm opíráme o indukční předpoklad na předchozím prvku, který u limitních ordinálů neexistuje. Pro následující tvrzení z minulého dílu již axiom výběru potřeba je.

Tvrzení. Kdykoli máme spočetnou množinu X , jejíž prvky jsou spočetné množiny, tak i množina $\bigcup X$ je spočetná.

Důkaz. Množina X je spočetná, takže existuje prostá funkce $f: X \rightarrow \omega$. Každý prvek $x \in X$ je spočetná množina, takže existuje prostá funkce $g_x: x \rightarrow \omega$. Abychom ukázali, že $Y = \bigcup X$ je spočetná množina, musíme ukázat, že existuje prostá funkce $g: Y \rightarrow \omega$. Pro $y \in Y$ vždy najdeme $x \in X$, které obsahuje prvek y . Pak definujeme

$$g(y) = 2^{f(x)} \cdot 3^{g_x(y)}.$$

Prostota funkce g vyplývá z jednoznačnosti prvočíselného rozkladu: Z hodnoty $g(y)$ jednoznačně určíme exponent u dvojky, a protože je f prostá funkce, můžeme určit i samotné x . Z exponentu u trojky (a na základě prostoty funkce g_x) nakonec určíme samotné y . $\square$

Kde byl potřeba axiom výběru? Jeden náznak vybírání v důkaze je, když si pro prvek y vybereme nějaké $x \in X$, které jej obsahuje. V tomto okamžiku ale axiom výběru nezbytný není – můžeme totiž napsat předpis, který x určí jednoznačně: Zvolíme x takové, pro které je $f(x)$ nejmenší možné. Možnost přiřadit každému $y \in Y$ příslušné $x \in X$ tedy plyne z axiomu nahrazení, jak jsme již uváděli.

Axiom výběru byl však klíčový v jiném momentě – když jsme volili funkce g_x . Možností, jak zobrazit x do ω , je nekonečně (a typicky nespočetně) mnoho. My jsme si však vybrali jen jednu, a

to pro každý z prvků množiny X , kterých mohlo být nekonečně mnoho. Formální použití axiomu výběru by vypadalo třeba takto:

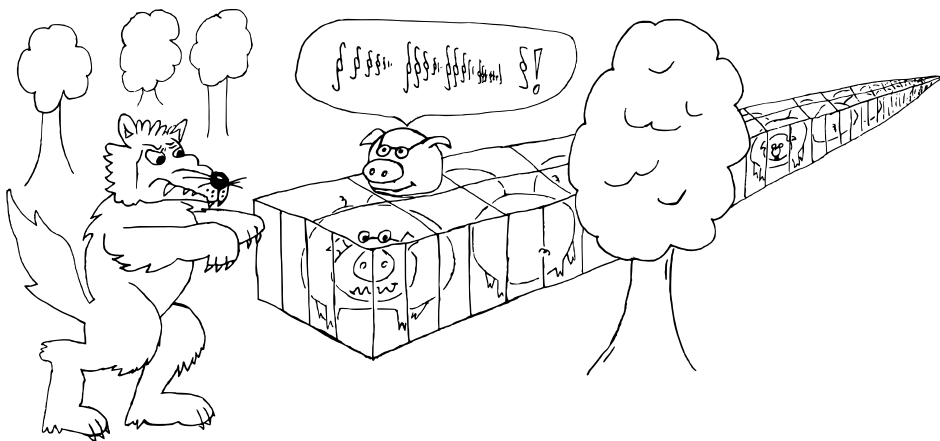
Nechť $G_x \subset \mathcal{P}(x \times \omega)$ je množina všech prostých zobrazení $x \rightarrow \omega$ pro $x \in X$. Jednotlivé množiny G_x jsou jednak neprázdné, protože všechny $x \in X$ jsou spočetné, a jednak disjunktní, protože z funkce lze poznat její definiční obor. Pak na $a = \{G_x : x \in X\}$ aplikujeme axiom výběru, čímž dostaneme množinu reprezentantů b . Nakonec definujeme g_x jako onen jediný prvek průniku $G_x \cap b$.

Opět by ale axiom výběru potřeba nebyl, kdybychom měli daný předpis pro funkce g_x . Popravdě se moc často nestává, že bychom měli spočetnou množinu spočetných množin a neměli při nich i seznam prostých funkcí do ω . Například v důkaze spočetnosti množiny $\mathbb{Q}$ se bez axiomu výběru obejdeme. Někdy se ale může stát, že o prvcích množiny víme, že jsou spočetné, ale nemáme předepsáno, jak – například ve druhém díle, když jsme dokazovali, že sjednocení spočetné množiny prvků ω_1 stále leží v ω_1 .

Především použití axiomu výběru působí neškodně a ukazuje, jak ho mohli matematici snadno přehlédnout. Je to také tím, že jsme axiom výběru použili jen na spočetnou množinu a , kde je ještě konstrukce příslušné množiny reprezentantů docela představitelná. Co je tedy na tom axiomu tak kontroverzního? Následující dva příklady již demonstrují moc axiomu výběru v plné síle.

Dobrodružství nekonečně mnoha prasátek

Před nekonečně mnoha lety, za nekonečně mnoha horami a řekami, potulovala se družinka nekonečně (ale spočetně) mnoha prasátek. Šla poklidně lesem a neměla ponětí, že na ně má spadeno zlý vlk. Na tuhle chvíli čekal už nekonečně dlouho – už dávno měl nachystanou past. Ještě kousek... A klap! Všechna prasátka byla v kleci.



„Tak, a teď vás všechna sním,“ liboval si vlk. Už měl rozpočítáno, jak sežere každý den nekonečně mnoho prasátek, a dokonce mu to vyjde na nekonečně mnoho dní. Ale prasátka nehodlala prodat svou kůži lacino. Jak jich bylo hodně, našlo se mezi nimi prasátko-právník, které dobře vědělo, proč je jezení prasátek nejen nesprávné, ale dokonce ilegální: „Podle paragrafu 58072 královny vyhlášky $\omega \cdot \omega + 5$ sbírky je konzumace sebeuvědomělých bytostí ztotožněna se skutkovou podstatou trestného činu vraždy, jak je uvedena v trestním zákoníku ...“ „Jaké sebeuvědomění?! Jste obyčejná prasata – zvířata!“ čítil se vlk a už přehodnocoval své plány. Radši je všechna sežere už zítra, takovéhle diskuze nemá zapotřebí.

„Podle paragrafu ω téže vyhlášky je sebeuvědomělá bytost taková, která prokáže svou schopnost splnit úkol intelektuální podstaty...“ sypalo ze sebe prasátko-právník. „Jó takhle,“ pomyslel si vlk

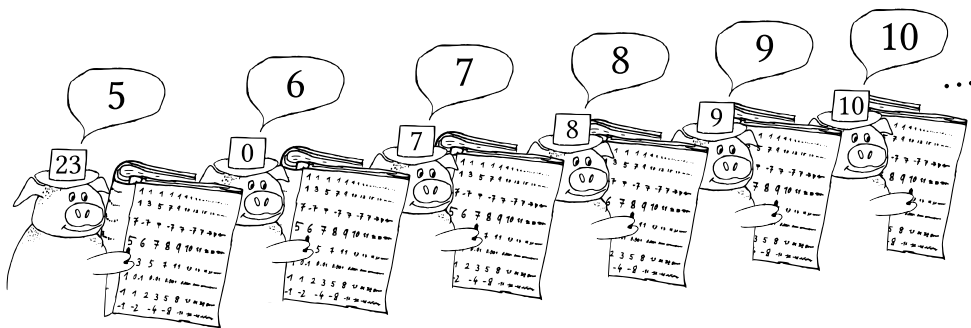
– na vymýšlení nesplnitelných úkolů byli pohádkoví záporáci vždy odborníky (nebo si to o sobě aspoň mysleli). Takto vypadal úkol pro prasátka: Další den se mají seřadit na přirozená čísla. Poté vlk na jejich hlavy posadí klobouky a každý klobouk bude mít barvu nějakého odstínu šedi (reálné číslo). Prasátka neuvidí barvu svého klobouku, jen barvy klobouků prasátek před sebou (stojících na vyšších přirozených číslech). Pak každé prasátko pošeptá vlkovi tip na barvu svého klobouku. Pokud se splete jen konečně mnoho prasátek, vlk je všechna pustí na svobodu. Jakkmile se jich však zmýlí nekonečně mnoho, vlk všechna prasátka sežere. „Po právní stránce je vše v pořádku,“ vypísklo prasátko-právnick a schoulilo se do kouta klece.

Každé jednotlivé prasátko v duchu uvažovalo: „Pokud vlk nasadí každému z nás klobouk náhodné barvy, nebude žádná cesta, jak by mi informace o barvách klobouků přede mnou mohla prozradit něco o tom, co mám já. Takže šance, že se strefím do náhodného reálného čísla bez sebemenší nápovědy, je nulová. Stejně tak mají nulovou šanci ostatní prasátka, tedy je mizivá pravděpodobnost, že se vůbec někdo strefí. A že bychom se měla strefit všechna s výjimkou konečně mnoha z nás? Tady už pomůže jedině zázrak...“

Někdo tomu říká zázrak, jiný axiom výběru. A protože bylo prasátek dohromady docela hodně, našlo se mezi nimi jedno, které na to přišlo. Za pomoci axiomu výběru se totiž v jakkoli náhodném rozestavení klobouků dá najít „pravidelnost“, přesněji řečeno reprezentant.

Vlkovo rozdání klobouků interpretujeme jako funkci $f: \omega \rightarrow \mathbb{R}$, kde hodnota $f(n)$ určuje barvu klobouku prasátka stojícího na čísle n . Uvažme množinu M všech možných takových funkcí f . Dále řekneme, že dvě funkce $f, g \in M$ si jsou podobné (značíme $f \sim g$), pokud se liší jen na konečně mnoha pozicích. Nakonec pro $f \in M$ nazveme *ocasem funkce* f množinu $[f] = \{g \in M : g \sim f\}$.

Všimneme si, že kdykoli $g \in [f]$, tak je $[g] = [f]$. Z toho plyne, že jednotlivé ocasy funkcí jsou vždy buď stejné, nebo disjunktní. Na množinu $\alpha = \{[f] : f \in M\}$ tak můžeme použít axiom výběru a získat množinu reprezentantů R . Množina R bude tvořit základ strategie prasátek – jednu takovou množinu reprezentantů R si prasátka vyberou a každé si ji napíše do notýsku.



Když vlk posadí klobouky podle funkce f , nebude sice žádné prasátko znát f , ale každému prasátku do znalosti f chybí jen konečně mnoho hodnot, takže každé prasátko bude znát její ocas $[f]$. V notýsku pak najde jediného reprezentanta $g \in [f] \cap R$, a stojí-li na přirozeném čísle n , pošeptá vlkovi $g(n)$. Takto se zmýlí jen konečně mnoho prasátek, protože $g \sim f$. Všimneme si, že kdyby bylo prasátek jen konečně mnoho, skutečně by se s největší pravděpodobností spletla všechna. Když jich ale je nekonečně mnoho, už se jich většina strefí. Barvu, kterou mají říct, určují pomocí klobouků, které vidí před sebou – i když je jasné, že „barvy jednotlivých klobouků spolu nijak nesouvisí“. To je první ze slibovaných paradoxů.

Neměřitelná množina

Další příklad použití axiomu výběru již není pohádkový, ale takový, na který matematici skutečně narazili. Přáli si zobecnit pojem obsahu a objemu a tento zobecněný obsah nazvali *míra*. Pro jednoduchost si to ukážeme na reálných číslech. Míra by měla být zobrazení, které podmnožině reálných

čísel přiřadí číslo $z \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ udávající, „jak je tato množina dohromady dlouhá“. Matematici si umysleli, že by po míře chtěli následující vlastnosti:

- (i) Míra (neprázdného) otevřeného intervalu (a, b) je jeho délka $b - a$.
- (ii) Pokud $A \subset B \subset \mathbb{R}$, tak je míra A menší nebo rovna míře B (prvek ∞ zde pokládáme za vyšší než všechna reálná čísla).
- (iii) Pokud posuneme množinu $A \subset \mathbb{R}$ po reálné ose, neměla by se změnit její míra. Formálně řečeno je pro každé (pevné) reálné číslo r míra množiny $\{a + r : a \in A\}$ stejná jako míra množiny A .
- (iv) Jsou-li $A, B \subset \mathbb{R}$ disjunktní množiny, dostaneme míru $A \cup B$ jako součet měr A a B .
- (v) Sjednocení spočetné mnoha množin nulové míry je stále množina nulové míry.

Jsou tyto požadavky přirozené, či přehnané? Přinejmenším s axiomem výběru lze ukázat, že není možné je všechny splnit a definovat míru všem podmnožinám $\mathbb{R}$.

Pro reálné číslo x definujeme jeho *iracionální část* coby množinu $S_x = \{x + q : q \in \mathbb{Q}\}$. Všimněme si, že $x \in S_x$ a jakmile $y \in S_x$, tak $S_y = S_x$. Z toho plyne, že jednotlivé množiny S_x jsou vždy buď stejné, nebo disjunktní. Na množinu $S = \{S_x : x \in \mathbb{R}\}$ tak můžeme použít axiom výběru. Ještě předtím ale každou z nich pronikneme s intervalem $(0, 1)$ – axiom výběru nám tak dá množinu reprezentantů $R \subset (0, 1)$. Množina R má tu vlastnost, že pokud ji posuneme o racionální číslo, získáme množinu disjunktní s původní. Na druhou stranu, pokud ji posuneme o všechna možná racionální čísla, pokryjeme celou reálnou osu. (Prvek x posunutý o všechna racionální čísla totiž pokryje celou množinu S_x .)

Jakou by ale množina R měla mít míru? Je podmnožinou intervalu $(0, 1)$, míra tedy bude rovna nejvýše jedné. Kdyby měla nulovou míru, pak by i každé její posunutí o racionální číslo mělo nulovou míru. Všech možných posunutí o racionální číslo je spočetně mnoho, takže i jejich sjednocení by mělo mít nulovou míru. To je ale spor – celá reálná osa nulovou míru jistě nemá (musí mít míru ∞).

Míra R tak musí být kladné číslo r . V intervalu $(0, 1)$ existuje nekonečně mnoho racionálních čísel – nám jich bude stačit konečně mnoho, víc než $\frac{2}{r}$. Posunutí množiny R o tato racionální čísla jsou navzájem disjunktními podmnožinami intervalu $(0, 2)$. Jejich sjednocení tak je také podmnožinou intervalu $(0, 2)$, ale míra tohoto sjednocení je větší než $r \cdot \frac{2}{r} = 2$. Opět jsme dostali spor, proto nemůžeme množině R přiřadit žádnou míru.

Poznámka. Když jsme popsali problém, tak i nastíníme, jak z něho ven. Matematici po míře stále požadují všechny zmíněné vlastnosti, ale již nepožadují, aby byla míra definovaná na všech podmnožinách $\mathbb{R}$. Musí být ale definovaná pro všechny „měřitelné množiny“, což jsou skoro jakékoli konstruktivně popsané množiny. Například je měřitelná i množina těch reálných čísel, která v desítkovém zápisu neobsahují číslici 2 na žádné prvočíselné pozici za desetinnou čárkou. Přesná definice měřitelných množin však přesahuje rámec tohoto seriálu.

Poznámka. Ve třírozměrném prostoru (formálně $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) lze jít ještě dál a rozdělit kouli na jen konečně mnoho (čtyři základní a několik pomocných pro doladění detailů) disjunktních množin, tyto množiny otočit a posunout a poskládat z nich dvě nové koule, obě stejně velké jako ta původní. Tento jev se nazývá Banach–Tarského paradoxem a demonstduje nemožnost zavedení objemu všech třírozměrných množin ještě silněji, než jsme předvedli zde pro míru na $\mathbb{R}$.

Tato použití axiomu výběru byla víceméně přímočará. Další zajímavosti se budou dít, když si budeme vybírat „postupně“. Napřed ale musíme umět takové postupné vybírání formálně uchopit.

Postupné vybírání

Postupné vybírání není nic nového, ostatně bylo použito již v prvním díle. Coby příklad ukážeme dvě jednoduchá tvrzení, která nejprve dokážeme ne zcela formálně, a následně se zamyslíme, jak by bylo možné tyto důkazy formalizovat. V další kapitole pak tato tvrzení rozšíříme do překvapivější podoby.

Tvrzení. (kritérium pro dobré uspořádání) *Nechť lineárně uspořádaná množina A je neprázdná a nelze v ní najít nekonečnou klesající posloupnost jejích prvků $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$. Pak má množina A nejmenší prvek.*

Důkaz. Pro spor předpokládáme, že A nemá nejmenší prvek, a najdeme v A nekonečnou klesající posloupnost. Zvolme první prvek x_0 . Ten nemůže být nejmenší, najdeme tedy menší prvek $x_1 < x_0$. Ani x_1 nemůže být nejmenší, takže najdeme $x_2 < x_1$. Takto můžeme pokračovat stále, takže nakonec získáme nekonečnou klesající posloupnost $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$. $\square$

Tvrzení. (minimalita ω mezi nekonečnými mohutnostmi) *Uvažme množinu X . Pak buď existuje bijekce mezi X a některým přirozeným číslem, nebo existuje nekonečná posloupnost různých prvků $x_0, x_1, \dots$.*

Důkaz. Budeme postupně volit x_n coby různé prvky množiny X . Nejprve zvolíme $x_0 \in X$, pak $x_1 \in X \setminus \{x_0\}$, $x_2 \in X \setminus \{x_0, x_1\}$, a tak dále. Pokud se v průběhu X vyprázdní, neboli nemůžeme zvolit $x_n \in X \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$, tak jsme právě popsali bijekci $n \rightarrow X$ a X je n -prvková konečná množina. V opačném případě se povede sestrojit celou nekonečnou posloupnost různých prvků $x_0, x_1, x_2, \dots$. $\square$

V obou případech jsme postupně sestrojili posloupnost prvků $x_0, x_1, \dots$. Posloupnost coby objekt teorie množin by měla být množina (nebo přinejhorším třída). V tomto případě nazveme *posloupností* (prvků z Y délky X) zobrazení $X \rightarrow Y$, jehož definičním oborem je ordinál (nebo $\mathbb{O}n$,⁸ v předešlých příkladech byla definičním oborem ω). Hodnoty posloupnosti značíme indexem x_n na rozdíl od běžného zobrazení, kde se značí závorkami $x(n)$.

Již v minulém díle jsme se setkali s posloupností ω_α délky $\mathbb{O}n$. Technicky jde téměř o třetí synonymum ke slovům zobrazení a funkce, rozdíl spočívá hlavně v intuitivním vnímání – zatímco funkci si člověk představí jako proces, jak z x vzniká $f(x)$, posloupnost si představí jako za sebou jdoucí prvky $x_0, x_1, x_2, \dots$.

Postupné definování jsme se už naučili provádět rekurzí. Jenže v předešlých dvou důkazech nemáme exaktní pravidlo pro výběr následujícího členu, a (transfinitní) rekurze stojí na tom, že známe následující prvek přesně. Jinak totiž není funkce daná rekurzivním předpisem jednoznačná. Tato jednoznačnost je navíc potřeba i pro důkaz existence – v limitním kroku. Opět není problém ukázat, že existuje odpovídající posloupnost délky n pro libovolné přirozené číslo n . Pokud si však začátky těchto posloupností neodpovídají, nedokážeme je skloubit do jedné nekonečné posloupnosti. V některých případech to ani nejde – například v přirozených číslech najdeme libovolně dlouhou konečnou klesající posloupnost, avšak nikoli nekonečnou.

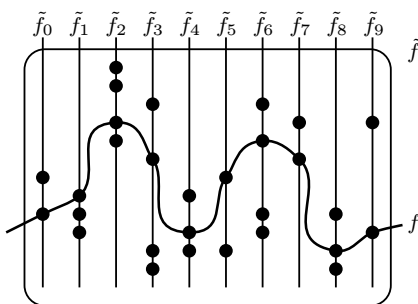
Řešením bude sestrojit ještě před spuštěním rekurze pomocnou funkci, se kterou již bude rekurzivní předpis jednoznačný.

Definice. Necht X, Y jsou množiny. *Víceznačná funkce z X do Y* je množina $\tilde{f} \subset X \times Y$ taková, že $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)((x, y) \in \tilde{f})$. Od obyčejné funkce se tedy liší tím, že jednomu x může odpovídat více y .

Tvrzení. *Necht $\tilde{f}$ je víceznačná funkce z X do Y . Pak existuje funkce $f: X \rightarrow Y$ taková, že $f \subset \tilde{f}$. Tento proces nazýváme vybráním funkce f z víceznačné funkce $\tilde{f}$.*

Důkaz. Pro $x \in X$ označme $\tilde{f}_x = \tilde{f} \cap (\{x\} \times Y)$ a dále $a = \{\tilde{f}_x : x \in X\}$. Protože je $\tilde{f}$ víceznačná funkce, je každá $\tilde{f}_x$ neprázdná, a proto můžeme na množinu a použít axiom výběru. Výsledkem bude funkce $f: X \rightarrow Y$ splňující $f \subset \tilde{f}$. $\square$

⁸Připomínáme, že symbolem $\mathbb{O}n$ myslíme (vlastní) třídu všech ordinálů.



Cvičení 1. Necht' existuje (ne nutně prosté) zobrazení $f: A \rightarrow B$ takové, že každé $b \in B$ lze dostat jako nějaké $f(a)$ (říkáme, že f je *surjektivní* nebo *těž na B*). Dokaž, že existuje prosté zobrazení $g: B \rightarrow A$.

Poznámka. Analogicky by bylo možné zavést i třídovou víceznačnou funkci, avšak v takovém okamžiku již axiom výběru nepostačuje k tomu, aby se z třídové víceznačné funkce vybrala třídová funkce. Pro takový výběr by byl potřeba tzv. *axiom silného výběru*, kterým se v tomto textu nebudeme zabývat.

Nyní můžeme důkaz obou tvrzení formalizovat.

Důkaz. (kritérium pro dobré uspořádání) Předpokládáme, že žádný prvek A není nejmenší. To znamená, že máme víceznačnou funkci $\tilde{f}$ z A do A , která každému $a \in A$ přiřadí menší prvky. Formálně

$$\tilde{f} = \{(x, y) : x \in A, y \in A, y < x\}.$$

Z víceznačné funkce $\tilde{f}$ vybereme funkci f , která každému prvku přiřadí nějaký menší prvek. Nakonec si zvolme jeden prvek $s \in A$ pro začátek a rekurzivně definujeme nekonečnou klesající posloupnost předpisem $x_0 = s, x_{n+1} = f(x_n)$. $\square$

Důkaz. (minimalita ω mezi nekonečnými mohutnostmi) Necht' STOP je prvek různý od všech prvků množiny X . Dále uvažme víceznačnou funkci $\tilde{f}$ z $\mathcal{P}(X)$ do $X \cup \{\text{STOP}\}$, která každé neprázdné množině přiřadí její prvky a prázdné množině přiřadí STOP. Formálně

$$\tilde{f} = \{(x, y) : x \in \mathcal{P}(X), y \in x\} \cup \{(\emptyset, \text{STOP})\}.$$

Vybereme z ní funkci f , ta každé neprázdné podmnožině množiny X přiřadí jeden její prvek a prázdné množině přiřadí STOP. Pak definujeme rekurzivně posloupnost $x_n = f(X \setminus \{x_i : i < n\})$. Speciálně vyjde $x_0 = f(X)$. Z vlastností funkce f budou x_n nejprve různé prvky množiny X a následně už jen samá STOP.

Mohou nastat dvě možnosti. Pokud je nějaké $x_n = \text{STOP}$, zvolme nejmenší takové n . Zúžení x na n je pak bijekce $n \rightarrow X$, takže je X konečná množina. V opačném případě jsme sestrojili nekonečnou posloupnost různých prvků. $\square$

Kombo axiomu výběru a transfinite rekurze

Zatímco z formálního hlediska je mezi rekurzí a transfinite rekurzí minimální rozdíl, jinak je tomu z pohledu lidské intuíce. Možná sis u minulé kapitoly říkal(a), proč se už zase plápe s dokazováním něčeho zřejmého, a kvůli formalismům to dělám malinko nešikovně a složitě. V této kapitole provedeme takřka stejné úvahy, jen namísto rekurze na přirozených číslech použijeme rekurzi na všech ordinálech.

Tím najednou místo banálních tvrzeníček získáme silné nástroje teorie množin – Zornovo⁹ lemma a princip dobrého uspořádání. Jestli Ti budou jejich důkazy připadat aspoň zpola tak intuitivní jako v předchozí kapitole, seriál splnil své poslání ;-).

⁹Čti [cornovo]; taktéž je známé pod pojmem *princip maximality*.

Tvrzení. (Zornovo lemma) Mějme množinu X . O množině $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ řekneme, že se jedná o řetězec, pokud pro každé dvě množiny $A, B \in \mathcal{R}$ platí $A \subset B$ nebo $B \subset A$.

Nechť $S \subset \mathcal{P}(X)$ je neprázdná množina splňující následující podmínku: Pro každý řetězec $\mathcal{R} \subset S$ platí $\bigcup \mathcal{R} \in S$. Pak existuje maximální množina $M \in S$. (Maximální množinou rozumíme takovou, že pro žádnou jinou množinu $A \in S$ neplatí $M \subset A$.)

Navíc můžeme volit $M \supset Y$ pro předem zvolenou $Y \in S$.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že taková maximální množina neexistuje. To znamená, že kdykoli uvážíme množinu $M \in S$, najdeme její vlastní¹⁰ nadmnožinu $A \in S$. Z víceznačné funkce vybereme funkci $f: S \rightarrow S$, která každé množině $z S$ přiřadí nějakou vlastní nadmnožinu $z S$. Dále víme, že S je neprázdná, vezměme si tedy prvek $Y \in S$ a definujme posloupnost S_α délky $\aleph_n$ rekurzivním předpisem:

- (i) $S_0 = Y$,
- (ii) $S_{\alpha+1} = f(S_\alpha)$,
- (iii) $S_\alpha = \bigcup \{S_\beta : \beta \in \alpha\}$ pro α limitní.

Slovy řečeno vystartujeme na Y a na izolovaných ordinálech skáčeeme na nadmnožiny pomocí funkce f . Na limitním ordinálu si všimneme, že jsme dosud prošli řetězec prvků $z S$, můžeme tedy použít jeho sjednocení. Takto jsme definovali rostoucí posloupnost S_α různých prvků $z S$. Představíme si inverzní zobrazení k posloupnosti S_α – takové, které prvek S_α pošle na ordinál α . Pomocí něj a axiomu nahrazení z množiny S sestrojíme množinu všech ordinálních čísel, což je spor, protože $\aleph_n$ tvoří vlastní třídu. $\square$

Poznámka. Důkaz je v pořádku, ale protože jsme se v seriálu příliš nevěnovali transfinální rekurzi na všech ordinálech, předvedeme ještě, jak by bylo možné využít třídy všech ordinálů obejít. Zvolme množinu γ všech typů dobře uspořádaných řetězců $v S$ (uspořádání stále chápeme tak, že větší prvek znamená nadmnožinu). To je množina ordinálních čísel, která s každým ordinálním číslem obsahuje i všechna menší, tedy je to ordinál. Nyní namísto rekurze na $\aleph_n$ spustíme rekurzi jen na ordinálu γ . Posloupnost S_α nám dá rostoucí bijekci mezi γ a řetězcem $v S$. Z toho plyne, že typ tohoto řetězce je γ , z čehož plyne spor $\gamma \in \gamma$.

Příklad. Nechtě A, B jsou disjunktní množiny. Pak existuje prostá funkce $A \rightarrow B$ nebo $B \rightarrow A$.

Důkaz. Označme S množinu všech takových množin S , které obsahují navzájem disjunktní dvojice tvaru $\{a, b\}$, kde $a \in A, b \in B$. Ukážeme, že S splňuje podmínku Zornova lemmatu. Je třeba ověřit, že když uvážíme řetězec $\mathcal{R} \subset S$ a sjednotíme jej $R = \bigcup \mathcal{R}$, budou stále všechny dvojice $z R$ navzájem disjunktní. Pro spor předpokládejme, že $v R$ leží dvě dvojice $d_0 = \{a_0, b_0\}, d_1 = \{a_1, b_1\}$, které se protínají. Protože je R sjednocením řetězce $\mathcal{R}$, musí $v \mathcal{R}$ ležet množiny R_0, R_1 takové, že $d_0 \in R_0, d_1 \in R_1$. Protože je $\mathcal{R}$ řetězec, nastane $R_0 \subset R_1$ nebo $R_1 \subset R_0$. Větší z těchto množin tak musí obsahovat obě dvojice d_0, d_1 , což je spor s tím, že tato větší množina leží $v S$. Tím je podmínka Zornova lemmatu ověřena.

Proto z Zornova lemmatu najdeme maximální množinu $M \in S$. Pak musí $\bigcup M$ pokrýt celou A nebo celou B . V opačném případě bychom totiž mohli vzít $a \in A \setminus \bigcup M, b \in B \setminus \bigcup M$ a zvětšit M přidáním dvojice $\{a, b\}$. Pokud pokryje celou A , definujeme prostou funkci $f: A \rightarrow B$ tak, že každému $a \in A$ přiřadíme to $b \in B$, které je s ním ve dvojici. Pokud nastane druhá možnost, definujeme analogicky $f: B \rightarrow A$.

V kapitole o kardinálních číslech dostaneme předešlý výsledek znovu a v silnější podobě. Na následujících cvičeních si můžeš podobné použití Zornova lemmatu samostatně vyzkoušet.

Cvičení 2. Dokaž, že existuje systém množin $S \subset \mathcal{P}(\omega)$ splňující následující dvě podmínky:

- (i) Pro každou nekonečnou množinu $X \subset \omega$ existuje $S \in S$ taková, že $X \cap S$ je nekonečný.
- (ii) Průnik každých dvou různých množin $z S$ je konečný.

¹⁰Vlastní nadmnožinou myslíme jen to, že má být různá od původní M .

Cvičení 3. Dokaž axiom výběru zpětně z Zornova lemmatu.

Poznámka. Na základě předešlého cvičení se někdy označuje Zornovo lemma (stejně jako následující princip dobrého uspořádání) za ekvivalent axiomu výběru. Zornovo lemma je sice netriviální věta, ale je shodou okolností natolik obecná, že z ní vyplývá nějaký axiom.

Tvrzení. (Princip dobrého uspořádání) *Pro každou množinu X lze najít uspořádání $U \subset X \times X$ takové, aby (X, U) tvořila DUMu.*

Poznámka. V důkaze použijeme stejný argument se třídou všech ordinálních čísel jako v důkaze Zornova lemmatu. Stejně jako předtím lze tento argument obejít – místo $\mathbb{O}n$ by stačila množina typů všech DUM (Y, U') , kde $Y \subset X$ a U' tvoří na Y dobré uspořádání.

Důkaz. Stačí ukázat, že existuje posloupnost x_α (nějaké délky), která obsahuje každý prvek množiny X právě jednou. Uspořádání pak vyčteme z ordinálů skrze bijektivní posloupnost x_α , tedy stanovíme $x_\alpha < x_\beta$ pro $\alpha < \beta$. Zbývá najít takovou posloupnost.

To provedeme tak, že se pokusíme definovat posloupnost délky $\mathbb{O}n$ předpisem: „Vezmi libovolný dosud nepoužitý prvek $x_\alpha \in X$.“ Formálně to provedeme úplně stejně jako v důkaze minimality ω . Pomocí axiomu výběru sestrojíme funkci $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow X \cup \{\text{STOP}\}$, která pro všechny neprázdné množiny $Y \subset X$ splňuje $f(Y) \in Y$ a $f(\emptyset) = \text{STOP}$, přičemž STOP je prvek neležící v X . Následně rekurzivně definujeme posloupnost $x_\alpha = f(X \setminus \{x_\beta : \beta \in \alpha\})$. Jen se nezastavíme na ω , ale pokračujeme přes všechny ordinály. Pokud jsme někdy dostali $f(\alpha) = \text{STOP}$, stačí zvolit nejmenší takové α a dostáváme po zúžení na α kýženou bijektivní posloupnost.

Zbývá ukázat, proč se nemohlo stát, že bychom každému ordinálnímu číslu přiřadili nějaký prvek X . V takovém případě bychom totiž měli posloupnost délky $\mathbb{O}n$, jejíž prvky jsou různé a všechny leží v jedné množině. To je stejně jako v důkaze Zornova lemmatu ve sporu s tím, že $\mathbb{O}n$ tvoří vlastní třídu. $\square$

Cvičení 4. Dokaž axiom výběru zpětně z principu dobrého uspořádání.

Poznámka. Tímto cvičením máme trojici ekvivalentních podmínek kompletní. Je tedy jedno, jestli si k původním axiomům (0) až (8) přidáme axiom výběru, Zornovo lemma, či princip dobrého uspořádání, výsledek bude stejný. Za axiom ale běžně považujeme axiom výběru ze dvou důvodů. Zaprvé k jeho vysvětlení stačí ty nejzákladnější pojmy a mohli jsme jej formulovat už mezi axiomy, kdy jsme ještě ani neměli formálně definovanou funkci, natožpak řetězec či dobré uspořádání.

Druhým důvodem je, že axiom výběru vypadá jako něco, co by podle intuice vážně mělo platit. Zato princip dobrého uspořádání působí spíše opačným dojmem – už na těch nejjednodušších nespočetných množinách, například $\mathbb{R}$ nebo $\mathcal{P}(\omega)$, je dobré uspořádání nepředstavitelné. Drobné vodítko sice dávají nespočetné ordinály $\omega_1, \omega_2, \dots$, je ale zrada, že se ani nedá dokázat (a dokonce se dá dokázat, že se nedá dokázat), jestli má $\mathbb{R}$ mohutnost stejnou jako ω_1 , nebo ω_2 , nebo dokonce mnohem větší než všechna takhle sestrojitelná ordinální čísla.

A co se týče Zornova lemmatu, jak naznačuje úvodní motto, jedná se o příliš abstraktní nástroj na to, aby se dalo na základě intuice říci, zda by mělo, nebo nemělo platit. V jednoduchých případech působí celkem uvěřitelně, ve složitějších (jako v následujícím cvičení či v příští kapitole) už to zdaleka tak jasně není.

Cvičení 5. Dokaž princip dobrého uspořádání pomocí Zornova lemmatu místo transfinitní rekurze s axiomem výběru.

Ve zbytku seriálu si předvedeme, k čemu všemu se uvedené dva nástroje dají použít.

Netriviální řešení Cauchyho rovnice

Jako příklad použití Zornova lemmatu si předvedeme skutečné řešení následující slavné funkcionální rovnice.

Úloha. (Cauchyho rovnice) Nalezněte všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující pro každou dvojici čísel $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$

Zřejmě tuto rovnici splňují funkce $f(x) = 0$, $f(x) = x$ a obecně $f(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Ale jsou všechny funkce splňující zadanou rovnici takového tvaru?

Dosazováním různých hodnot za x a y můžeš dospět k tomuto výsledku:

Cvičení 6. Ukaž, že každá funkce f , která vyhovuje Cauchyho rovnici, splňuje pro každou dvojici čísel $q \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$ rovnost $f(qx) = qf(x)$.

Pro reálná čísla q už taková rovnost platit nemusí. Při sebeckytřejším dosazování za x , y do Cauchyho rovnice se například nepovede odvodit žádný vztah mezi hodnotami $f(1)$ a $f(\sqrt{2})$. Tyto hodnoty jsou totiž na sobě skutečně nezávislé – když zvolíme libovolně hodnoty $f(1)$ a $f(\sqrt{2})$, stále půjde najít příslušné řešení Cauchyho rovnice.

Není ale snadné takové řešení sestavit. Abychom to dokázali, musíme umět tuto nezávislost formálně uchopit. K tomu použijeme aparát lineární algebry. Lineární algebra pracuje s vektory x_i , s jejich násobky $\alpha_i x_i$ a s jejich konečnými součty, které jsou obecně ve tvaru

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Koeficienty α_i se berou z množiny skalárů, což bude v našem příkladě množina $\mathbb{Q}$. Vektory budou v našem příkladě (poněkud neobvykle) prvky množiny $\mathbb{R}$. Výše uvedený vzorec se (zhruba) nazývá lineární kombinace vektorů. Přesněji chápeme *lineární kombinaci* jako přiřazení koeficientů α_i konečně mnoha reálným číslům (vektorům). Přitom si můžeme představovat, že všem ostatním reálným číslům přidělíme nulový koeficient. *Vyhodnocení* lineární kombinace pak spočteme pomocí vzorce uvedeného výše. Nyní zavedeme přesné definice.

Definice. Mějme množinu $X \subset \mathbb{R}$.

- (i) *Lineární kombinace* prvků množiny $X \subset \mathbb{R}$ je zobrazení $k: X \rightarrow \mathbb{Q}$, které je nenulové jen v konečně mnoha bodech.
- (ii) Dvě lineární kombinace k_0, k_1 můžeme sčítat nebo odčítat. Součtem / rozdílem $k = k_0 \pm k_1$, rozumíme lineární kombinaci danou předpisem $k(x) = k_0(x) \pm k_1(x)$. Povšimneme si, že stačí vykonat tuto práci jen v konečně mnoha bodech, ostatní hodnoty zůstávají nulové.
- (iii) *Vyhodnocení* lineární kombinace k značíme $k(X)$ a spočteme jej coby součet všech konečně mnoha $k(x) \cdot x$, kde $x \in X$ a $k(x) \neq 0$.
- (iv) O lineární kombinaci k řekneme, že je *triviální*, pokud je $k(x) = 0$ pro všechna $x \in X$. Všechny ostatní lineární kombinace nazýváme *netriviální*. Triviální lineární kombinace se vždy vyhodnotí na nulu.
- (v) O množině $X \subset \mathbb{R}$ řekneme, že je *lineárně závislá*, pokud se některé dvě různé lineární kombinace jejich prvků vyhodnotí stejně. V opačném případě říkáme, že je *X lineárně nezávislá*.

Příklad. Jednoprvková množina je lineárně závislá právě tehdy, když je její prvek nulový. Dvoupvková množina je lineárně závislá právě tehdy, když je podíl jejích prvků racionální číslo.

Příklad. Množina $X = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{8} - 1\}$ je lineárně závislá, protože lineární kombinace k_0 daná předpisem $k_0(\sqrt{8} - 1) = 1$ (a na zbytku nula) se vyhodnotí stejně jako lineární kombinace daná předpisem $k_1(1) = -1$, $k_1(\sqrt{2}) = 2$ (a jinak nula):

$$k_0(X) = 1 \cdot (\sqrt{8} - 1) = 2\sqrt{2} - 1 = -1 \cdot (1) + 2 \cdot (\sqrt{2}) = k_1(X).$$

Na druhou stranu například nekonečné množiny $\{\sqrt{n} : n \text{ je bezčtvercové}^{11} \text{ číslo}\}$ nebo $\{e^n : n \in \omega\}$ lineárně nezávislé jsou.

¹¹Bezčtvercová jsou ta přirozená čísla, která nejsou dělitelná žádnou druhou mocninou celého čísla vyšší než 1.

Důkazy, že uvedené dvě množiny jsou lineárně nezávislé, by vyžadovaly nemalé množství další teorie. Pro následující jednodušší verzi stačí vědět, že $\sqrt{n}$ je za předpokladu, že n není druhou mocninou přirozeného čísla, iracionální číslo.

Cvičení 7. Dokaž, že množiny $\{1, \sqrt{2}\}$ a $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ jsou lineárně nezávislé.

Učiníme ještě jedno pozorování: Pokud existují dvě různé lineární kombinace k_0, k_1 se stejným vyhodnocením, jejich odečtením sestrojíme jinou než triviální lineární kombinaci $k = k_0 - k_1$, která se vyhodnotí na nulu. Lineární závislost tedy lze popsat výrokem: „I některá netriviální lineární kombinace se vyhodnotí na nulu.“

Příklad. Aplikujeme-li toto pozorování na předchozí příklad lineárně závislé množiny, dostáváme netriviální lineární kombinaci k s předpisem $k(1) = 1, k(\sqrt{2}) = -2, k(\sqrt{8} - 1) = 1$. Ta se vyhodnotí na nulu:

$$1 \cdot 1 - 2 \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot (\sqrt{8} - 1) = 0.$$

Nechť $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ je množina všech lineárně nezávislých množin. Ukážeme, že $\mathcal{S}$ splňuje podmínku Zornova lemmatu: Uvažme řetězec $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ lineárně nezávislých množin. Předpokládejme pro spor, že $\bigcup \mathcal{R}$ je lineárně závislá množina, existuje tedy netriviální lineární kombinace $k: \bigcup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{Q}$, která se vyhodnotí na nulu. Funkce k smí být nenulová jen v konečně mnoha bodech, označme je $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$. Tyto prvky leží v množině $\bigcup \mathcal{R}$, proto najdeme množiny $R_0, R_1, \dots, R_{n-1} \in \mathcal{R}$ tak, aby $x_i \in R_i$. Vezmeme největší z množin R_i , a ta již musí obsahovat všechny $x_0, \dots, x_{n-1}$. To ale znamená, že ani tato $R_i \in \mathcal{R}$ nebyla lineárně nezávislá. Dostáváme spor, takže podmínka Zornova lemmatu platí.

Nyní použijeme Zornovo lemma a najdeme maximální lineárně nezávislou množinu M . Prozkoumejíme její vlastnosti. Ukážeme, že každé reálné číslo lze získat vyhodnocením právě jedné lineární kombinace prvků M . Protože je M lineárně nezávislá, nebude existovat více kombinací, které se vyhodnotí stejně. Zbývá ukázat, že pro každé číslo $t \in \mathbb{R}$ najdeme odpovídající lineární kombinaci. Kdyby t již leželo v M , stačí lineární kombinace, která t přiřadí jedničku a zbytku nuly. Dále předpokládáme $t \notin M$. Protože je M maximální, nemůže být $M \cup \{t\}$ lineárně nezávislá, existuje tedy netriviální lineární kombinace k , která se vyhodnotí na nulu. Musí ale $k(t) \neq 0$, jinak by ani M nebyla lineárně nezávislá. Pak i lineární kombinace $k_1(x) = -k(x)/k(t)$ se vyhodnotí na nulu a $k_1(t) = -1$. Tedy lineární kombinace¹² $k_1 \upharpoonright M$ prvků množiny M se vyhodnotí na t .

Množině M s vlastností „každé reálné číslo lze reprezentovat právě jedním způsobem jako vyhodnocení lineární kombinace prvků množiny M “ budeme říkat *báze*. Zatím jsme pomocí Zornova lemmatu ukázali, že lze najít nějakou bázi.

Cvičení 8.

- (i) Ukaž, že žádná báze neobsahuje nulu.
- (ii) Ukaž, že každá báze může obsahovat nejvýše jedno racionální číslo.
- (iii) Ukaž, že existuje báze, která neobsahuje žádné racionální číslo.

Cvičení 9.

- (i) Ukaž, že báze musí mít alespoň dva prvky.
- (ii) Ukaž, že báze musí být nespočetná.

Konečně se dostáváme k řešení Cauchyho rovnice.

Tvrzení. Mějme bázi M a funkci $f_0: M \rightarrow \mathbb{R}$. Pak f_0 lze právě jedním způsobem rozšířit na funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tak, aby f splňovala Cauchyho rovnici.

Důkaz. Pro lineární kombinaci k prvků M označme jako $k \cdot f_0$ součet všech $k(x)f_0(x)$, kde $x \in M$ a $k(x) \neq 0$. To si lze představovat jako „vyhodnocení k až poté, co X upravíme funkcí f_0 “. Dále

¹²Značením $k_1 \upharpoonright M$ rozumíme zúžení funkce k_1 na množinu M . V tomto případě tedy jen zahodíme hodnotu -1 v bodě t .

pro $x \in \mathbb{R}$ označme k_x tu jedinou lineární kombinaci, která splňuje $k_x(M) = x$. Ukážeme, že jednoznačné rozšíření funkce f je

$$f(x) = k_x \cdot f_0. \quad (*)$$

Rovnost $(*)$ musí platit pro $x \in M$ – pak je totiž k_x definována předpisem $k_x(x) = 1$ a na zbytku nula, tedy $k_x \cdot f_0 = f_0(x)$. Protože každá funkce splňující Cauchyho rovnici musí splňovat $f(qx) = qf(x)$ pro $q \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}$, musí rovnost $(*)$ platit i pro $x = mq$, kde $m \in M, q \in \mathbb{Q}$. Nakonec díky vztahu $f(x+y) = f(x) + f(y)$ musí být rovnice $(*)$ splněna pro vyhodnocení všech lineárních kombinací prvků M , tedy pro všechna reálná čísla.

Zbývá ověřit, že funkce daná předpisem $(*)$ splňuje Cauchyho rovnici. K tomu si uvědomíme, že lineární kombinace se dají roznásobovat a vytýkat. Uvážíme-li $x, y \in \mathbb{R}$, platí $k_x(M) = x$ a $k_y(M) = y$, a tak i $(k_x + k_y)(M) = x + y$. Z toho plyne $k_{x+y} = (k_x + k_y)$. Obdobně také platí $(k_x + k_y) \cdot f_0 = k_x \cdot f_0 + k_y \cdot f_0$. Dohromady dostáváme

$$f(x+y) = k_{x+y} \cdot f_0 = (k_x + k_y) \cdot f_0 = k_x \cdot f_0 + k_y \cdot f_0 = f(x) + f(y). \quad \square$$

Právě dokázané tvrzení odpovídá na otázku, jak vypadají všechna řešení Cauchyho rovnice. Mějme pevně zvolenou bázi M . Pak každé řešení Cauchyho rovnice je jednoznačně určeno svými hodnotami na M , přičemž tyto hodnoty lze volit libovolně. S tímto pohledem již není těžké sestrojit jiné řešení než $f(x) = cx$, stačí, aby hodnoty v prvcích báze nespĺňovaly tento předpis.

Předvedeme ještě trochu konkrétnější příklad takového řešení Cauchyho rovnice. Při použití Zornova lematu jsme mohli začít s libovolnou lineárně nezávislou množinou, tedy například $\{1, \sqrt{2}\}$. Získáme tedy bázi obsahující tato dvě čísla. Pak definujeme $f_0(1) = 1$ a $f_0(x) = 0$ pro $x \in M \setminus \{1\}$. Když takovou f_0 rozšíříme na řešení f , bude platit $f(1) = 1$ a $f(\sqrt{2}) = 0$, tedy určitě toto řešení není tvaru $f(x) = cx$. Můžeme se ještě zeptat, jakou hodnotu má $f(\sqrt{3})$. Sice víme, že všechny ostatní prvky báze mají nulovou hodnotu, ale nevíme (dosud jsme si to nezvolili, protože nám to bylo jedno), jestli $\sqrt{3}$ leží v bázi. Pokud ano, tak $f(\sqrt{3}) = 0$. Pokud ale místo $\sqrt{3}$ leží v bázi například číslo $\sqrt{3} - 1$, máme hodnotu $f(\sqrt{3}) = f(1) + f(\sqrt{3} - 1) = 1 + 0 = 1$.

Vidíme, že při konstrukci netriviálního řešení Cauchyho rovnice máme ohromnou volnost, co si lze zvolit. Rozhodně se nedá říct, že by bylo těžké najít netriviální řešení, protože by byla příliš vzácná. Spíše naopak – je jich příliš mnoho a volnost je příliš velká na to, aby se do nich dalo systematicky proniknout. A to jsou přesně ty chvíle, kdy pomáhá axiom výběru.

Cvičení 10.

- (i) Najdi alespoň tři řešení Cauchyho rovnice splňující navíc $f(f(x)) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
- (ii) Najdi nějaké řešení Cauchyho rovnice splňující navíc $f(f(1)) = -1$.
- (iii) Ukaž, že bázi lze popárovat, tedy rozložit na množinu disjunktních dvojic.
- (iv) Najdi nějaké řešení Cauchyho rovnice splňující navíc $f(f(x)) = -x$ pro všechna reálná x .
- (v) Najdi nějaké řešení Cauchyho rovnice, které je prosté, ale není bijekce $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Kardinální čísla – mohutnosti množin

Při definici ordinálního čísla jsme z obecné DUMy sestrojili množinu stejného typu, která nezávisle na nosné množině původní DUMy. Podobně bychom chtěli popsat nějaké množiny, které budou reprezentovat mohutnosti obecných množin. Jenže jaké si vymyslet „obecné prvky“ množiny?

Snadno se obecné prvky popsat nedají, a proto se na mohutnosti jde malinko oklikou – přes ordinální čísla. Díky principu dobrého uspořádání dokážeme na jakékoli množině X najít dobré uspořádání U . To znamená, že X má stejnou mohutnost jako $\text{typ}(X, U)$. Jenže různá ordinální čísla mohou mít stejnou mohutnost – například $|\omega| = |\omega \cdot \omega + 5|$. Vybereme proto jen některá ordinální čísla.

Definice. *Kardinální číslo* (stručně kardinál) je nejmenší ordinální číslo své mohutnosti. Jde tedy o takové ordinální číslo α , že pro žádné $\beta < \alpha$ neplatí $|\beta| = |\alpha|$.

Kardinální číslo vypadá jako nový pojem, ale ve skutečnosti jsi „všechna“ kardinální čísla už potkal(a) v minulém díle. Za prvé jde o přirozená čísla, která udávají mohutnosti konečných množin, a za druhé jde o ordinály ω_α pro $\alpha \in \mathbb{O}n$, což jsou všechny nekonečné kardinály. Dokážeme si jejich základní vlastnosti.

Tvrzení. *Nechť α je kardinál a $\beta < \alpha$ je ordinál. Pak $|\beta| < |\alpha|$.*

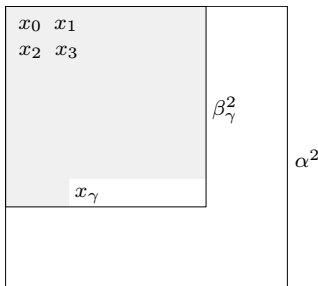
Důkaz. Na základě definice porovnávání mohutností potřebujeme ověřit dvě podmínky. Jednak, že $|\beta| \leq |\alpha|$, a za druhé, že neexistuje prosté zobrazení $\alpha \rightarrow \beta$. První část snadno plyne z toho, že $\beta \subset \alpha$. Ve druhé pro spor předpokládejme prostou funkci $f: \alpha \rightarrow \beta$. Množina $X = \{f(x) : x \in \alpha\}$ je pak podmnožinou ordinálu β , takže $\text{typ}(X, \in) \leq \beta < \alpha$. Jenže $|\text{typ}(X, \in)| = |X| = |\alpha|$, což je ve sporu s tím, že α je nejmenší ordinální číslo své mohutnosti. $\square$

Tvrzení. *Pro každé nekonečné ordinální číslo α platí $|\alpha| = |\alpha \times \alpha|$.*

Důkaz. Množinu $X \times X$ budeme stručně značit X^2 . Tvrzení dokážeme indukcí přes nekonečné ordinální číslo α . Pokud není α kardinální číslo, tak existuje menší ordinál $\beta < \alpha$ stejné mohutnosti, pro který platí $|\beta| = |\beta^2|$. Proto i $|\alpha| = |\alpha^2|$.

Když α je kardinálem, ukážeme napřed $|\beta^2| < |\alpha|$ pro všechna $\beta < \alpha$. Pro konečná β je tomu tak proto, že i β^2 je konečná množina. Je-li β nekonečné ordinální číslo, plyne z indukčního předpokladu $|\beta^2| = |\beta|$ a z předchozího tvrzení $|\beta| < |\alpha|$, celkem $|\beta^2| < |\alpha|$. Ještě si uvědomíme, že kvůli tomu musí být α limitní ordinál – pro $\beta < \alpha$ a větší než jedna totiž $|\beta^2| \geq |\beta + 1|$, a tak $\beta + 1 < \alpha$.

Nyní pro kardinál α dokážeme $|\alpha^2| = |\alpha|$. Postupně budeme vybírat z množiny α^2 vzájemně různé prvky a sestavíme z nich posloupnost délky α . Budeme ji značit x_γ a vybírání bude založeno na následujícím předpisu. Uvažme $\gamma \in \alpha$. Protože $|\gamma| < |\alpha| \leq |\alpha^2|$, nejsou dosud v posloupnosti všechny prvky α^2 . Protože je navíc α limitní, najdeme $\beta_\gamma < \alpha$ takové, že v posloupnosti dosud chybí některý prvek množiny β_γ^2 , přičemž volíme β_γ nejmenší možné. Prvek x_γ pak volíme z množiny β_γ^2 .



Takto popsaná posloupnost musí projít všechny prvky α^2 . Kdyby ne, neprošla by ani všechny prvky součinu β^2 pro nějaké $\beta < \alpha$. Tím bychom dostali prosté zobrazení $\alpha \rightarrow \beta \times \beta$, které nemůže existovat. Posloupnost x_γ tak tvoří bijekci $\alpha \rightarrow \alpha^2$. $\square$

Poznámka. V důkaze jsme nepopsali přesně, v jakém pořadí prvky α^2 bereme, takže se může zdát, že jsme potřebovali použít axiom výběru. V tomto případě však není nutný, protože na α^2 máme dobré uspořádání, které může s vybíráním dalšího prvku pomoci.

Definice. Nechť X je množina. Pak díky principu dobrého uspořádání existuje alespoň jedno ordinální číslo stejné mohutnosti jako X . Protože je třída ordinálních čísel dobře uspořádaná, najdeme mezi nimi to nejmenší – jediné kardinální číslo této mohutnosti. Toto kardinální číslo nazýváme *mohutností* X a značíme $|X|$. Kardinální číslo $|\mathcal{P}(\omega)|$ budeme nazývat *kontinuum* a značit $\mathfrak{c}$. Tento kardinál je významný i proto, že udává mohutnost množiny $\mathbb{R}$.

Poznámka. Definice výrazů $|X| < |Y|$ a $|X| \leq |Y|$ nyní vypadá na první pohled nejednoznačně – jednak se může jednat o dosud používané porovnávání mohutností zavedené v prvním díle, současně může jít o porovnání odpovídajících kardinálů coby ordinálních čísel. První tvrzení v této

kapitole ale přímo říká, že v případě, když X, Y jsou kardinály, je porovnávání přes ordinály i přes mohutnosti totožné. Následně lze tuto skutečnost rozšířit na obecné množiny, protože množiny X a $|X|$ mají stejnou mohutnost (ve smyslu původní definice).

Když jsme převedli porovnávání mohutností na porovnávání ordinálů, snadno již pro libovolné množiny X, Y dostáváme:

- (i) Pokud $|X| \leq |Y|$ a $|Y| \leq |X|$, tak $|X| = |Y|$.
- (ii) Platí $|X| \leq |Y|$ nebo $|Y| \leq |X|$.
- (iii) Jsou-li X, Y nekonečné množiny, platí $|X \times X| = |X|$. Obecněji $|X \times Y| = \max(|X|, |Y|)$.

Díky tomu skoro všechny „normální“ geometrické objekty – křivka, obdélník, sféra, apod. – obsahují kontinuum bodů. Každý z nich je totiž podmnožinou $\mathbb{R}^2$ resp. $\mathbb{R}^3$, takže má mohutnost nejvýše kontinuum. Současně do takového objektu lze zobrazit prostou funkci interval, takže má mohutnost alespoň kontinuum.

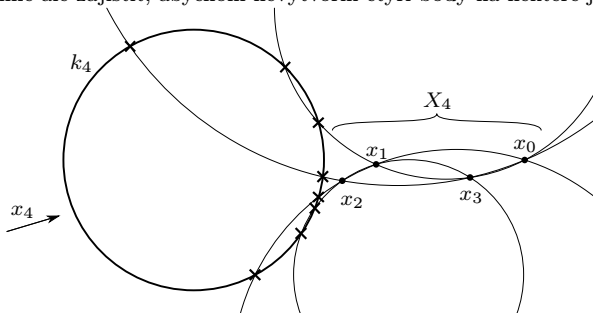
Pomocí kardinálů můžeme provést transfinite rekursi silnějším způsobem než rekurzí na všech ordinálních číslech. Pokud projdeme prvky množiny X transfinite rekurzí na kardinálu $|X|$, máme v průběhu rekurze navíc jistotu, že dosud prošlých kroků je v každém okamžiku ostře méně než $|X|$.

Příklad. Existuje množina bodů v rovině¹³, kterou každá kružnice protne právě ve třech bodech.

Důkaz. Každá kružnice je určena svým středem (prvek množiny $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) a poloměrem (prvek $\mathbb{R}^+$). Počet všech kružnic tedy je $|\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Očíslujeme si všechny kružnice prvky kontinua – to znamená, že sestrojíme posloupnost k_α délky $\mathfrak{c}$, která obsahuje všechny kružnice. Navíc to provedeme tak, aby každá kružnice byla v této posloupnosti právě třikrát (to lze, protože $|\mathfrak{c} \times \mathfrak{c}| = \mathfrak{c}$).

Kýženou množinu sestrojíme postupně transfinite rekurzí coby posloupnost bodů x_α . Tato posloupnost bude délky $\mathfrak{c}$ a body volíme tak, aby vždy $x_\alpha \in k_\alpha$. Rekursivní předpis probíhá následovně.

Chceme popsat x_α . Označme množinu dosud vybraných bodů $X_\alpha = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ a její průnik s kružnicí jako $P_\alpha = X_\alpha \cap k_\alpha$. Pokud již $|P_\alpha| = 3$, je kružnice k_α uspokojená; nechceme přidat nový bod, a volíme tedy $k_\alpha \in P_\alpha$. V opačném případě máme $|P_\alpha| < 3$, takže najdeme nový bod $x_\alpha \in k_\alpha \setminus P_\alpha$. Musíme ale zajistit, abychom nevytvořili čtyři body na některé jiné kružnici.



Jak je to možné zajistit? Jediné, čemu je třeba se vyhnout, je položení bodu x_α na kružnici, která již prochází třemi body z X_α . Množina X_α má mohutnost maximálně $|\alpha| < \mathfrak{c}$. I množina všech trojic bodů z X_α má tedy mohutnost menší než kontinuum. Každé takové trojici lze opsat nanejvýš jednu kružnici, takže všech kružnic, které prochází třemi body z X_α , je méně než kontinuum. Každá taková kružnice protne k_α nanejvýš ve dvou bodech, takže zakázaných bodů je méně než kontinuum. Kružnice k_α (i po odebrání konečného P_α) obsahuje kontinuum bodů, takže zbývá bod, který můžeme zvolit.

¹³Rovinu formálně považujeme za množinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, kde bod je určený svými souřadnicemi.

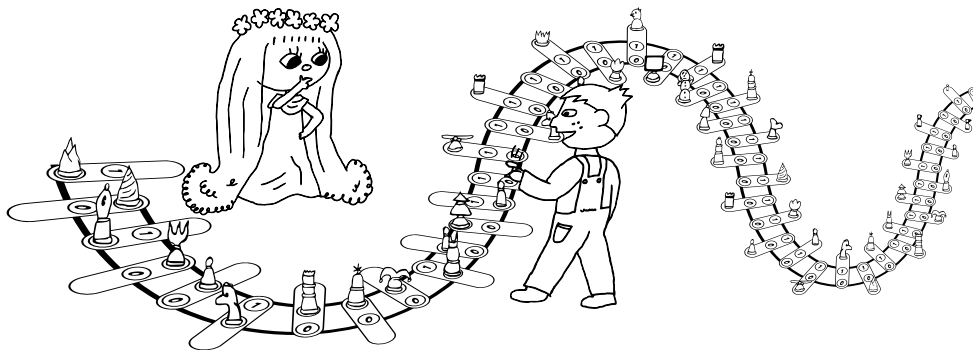
Takto zajistíme, že na každé kružnici budou ve finální množině $X = \{x_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ nejvýše tři body. Současně na každé budou alespoň tři body, protože jsme v průběhu rekurze každou kružnici potkali třikrát a vždy, když na ní ještě nebyly tři body, jsme na ni bod přidali. Množina X tak každou kružnici protíná právě ve třech bodech. $\square$

Skutečnost, že jsme v transfinite rekurzi probíhali kardinál $\aleph_1$ a ne něco většího, byla klíčová. Při volbě kružnic a bodů se totiž opíráme o axiom výběru, a tak nemáme příliš kontrolu nad tím, které body bereme. Kdybychom nepoužili kardinál, mohlo by se během rekurze náhodou stát, že jsou v některém okamžiku vybrány přesně všechny body z jedné přímky a ještě jeden mimo ni. Pak sice na každé kružnici leží nejvýše tři body, ale nelze přidat žádný další bod tak, aby tato vlastnost zůstala splněna. Přitom přímka s bodem zjevně není řešením úlohy. Tím, že jsme použili kardinál $\aleph_1$, jsme takové situaci zabránili – v průběhu se nikdy nemohlo stát, že bychom měli vybrány všechny body některé přímky, protože je v každém okamžiku vybráno méně než kontinuum bodů.

Pro lepší pochopení, co se v předchozím důkaze dělo, si můžeš představit pouze spočetnou verzi tohoto tvrzení – „existuje množina racionálních bodů $S \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, která má tříprvkový průnik s každou kružnicí s racionálním středem a poloměrem“ – a projít důkaz znovu. V takové verzi bychom použili namísto $\aleph_1$ jen ω . „Méně než kontinuum“ by pak znamenalo jednoduše „konečně mnoho“ a přiřazování bodů x_n by probíhalo obyčejnou (netransfinite) rekurzí. Na druhou stranu je pak v důkaze navíc potřeba znalost faktu, že každá kružnice s racionálním středem i poloměrem obsahuje nekonečně mnoho racionálních bodů.

Hra bez neprohrávající strategie

V této kapitole předvedeme další kuriózní objekt sestrojitelný pomocí transfinite rekurze na kardinálu: Hru dvou hráčů, kteří se střídají v tazích, oba mají úplnou informaci, a přitom ani jeden z nich nemá neprohrávající strategii. Možná ses setkal(a) s tvrzením, že „v každé konečné hře dvou hráčů s úplnou informací má alespoň jeden z nich neprohrávající strategii“. Pro nekonečné hry to již platit nemusí. Sestrojit takovou hru není snadné, ale s dosavadní teorií již toho příliš nechybí.



Ve hře budou hrát dva hráči – Amálka (A) a Budulínek (B). Oba postupně plní posloupnost $a_0, a_1, \dots \in \{0, 1\}$ délky ω . Amálka rozhodne hodnotu a_0 , Budulínek rozhodne hodnotu a_1 , Amálka hodnotu a_2 atd. Po sestrojení této posloupnosti se na základě pravidel (která popíšeme později) určí, kdo vyhrál.

Závěrečným stavem hry tedy rozumíme posloupnost nul a jedniček délky ω . Nechť Z je množina všech závěrečných stavů hry. Pravidly pak rozumíme zobrazení $p: Z \rightarrow \{A, B\}$. Pravidla se podívají na závěrečný stav hry $z \in Z$ a odpovědí, zda vyhrála Amálka ($p(z) = A$), či Budulínek ($p(z) = B$).

Protože tato hra nikdy nedopadne remízou, znamená neprohrávající strategie totéž co vítězná strategie. Budeme proto raději mluvit o vítězné strategii. Abychom mohli najít pravidla, pro něž nemá ani jeden z hráčů vítěznou strategii, musíme ještě přesně popsat, co to vůbec je strategie.

Definice. Částečným stavem hry pro Amálku nazveme posloupnost nul a jedniček sudé (konečné) délky. Strategií pro Amálku rozumíme zobrazení $C_A \rightarrow \{0, 1\}$, kde C_A je množina všech částečných stavů hry pro Amálku. Na základě stavu hry tedy strategie vždy řekne, zda má Amálka napsat nulu, nebo jedničku. Vítězná strategie pro Amálku je taková, že hraje-li Amálka přesně podle této strategie, vyhraje, ať hraje Budulínek jakkoli. Analogicky definujeme množinu C_B částečných stavů hry pro Budulínka jako množinu posloupností nul a jedniček liché délky, a vítěznou strategii pro Budulínka.

Tvrzení. Existují pravidla, se kterými ani jeden z hráčů nemá vítěznou strategii.

Důkaz. Všech částečných stavů hry je nekonečně, ale jen spočetně mnoho. Strategie tak jsou zobrazeny ze spočetné množiny do dvouprvkové množiny. Proto když označíme S množinu všech strategií (pro oba hráče), máme $|S| = \mathfrak{c}$. Očíslujeme tedy množinu $S = \{s_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$. Rekurzivně definujeme posloupnost délky kontinua $p_\alpha = (z_\alpha, h_\alpha)$, kde z_α je závěrečný stav hry a $h_\alpha \in \{A, B\}$. Přitom všechna z_α budou navzájem různá a hráč h_α dokáže dosáhnout závěrečného stavu z_α za předpokladu, že druhý hráč hraje podle strategie s_α . Z toho plyne, že zvolíme-li pravidla $P \supset \{p_\alpha\}$, nebude strategie s_α vítězná.

Nutně tak je h_α ten hráč, kterému nepatří strategie s_α . V hledání z_α předpokládáme, že s_α patří Amálce, a tedy $h_\alpha = B$. Opačný případ se ošetří analogicky.

Když Amálka hraje podle strategie s_α , může stále Budulínek libovolně rozhodnout, jaká čísla dá na liché pozice. Hra tedy může v závislosti na hře Budulínka dopadnout kontinuum mnoha způsobů. Dosud jsme ale přiřadili vítěze jen k $|\alpha| < \mathfrak{c}$ závěrečným stavům z_β , kde $\beta < \alpha$. Mezi závěrečnými stavy, kterých může Budulínek dosáhnout, když Amálka hraje podle s_α , tak stále bude nějaký nový. Ten použijeme coby z_α .

Tímto postupem zajistíme, že na základě zobrazení $\{p_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ nebude žádná strategie vítězná. Může se ale stát, že některým závěrečným stavům dosud není přiřazen žádný hráč. Pro zkomplotování pravidel můžeme takové stavy přisoudit třeba Amálce, a máme požadovanou hru. $\square$

Čokoládová výzva

Čokoládovou výzvu z předchozího dílu dosud nikdo nevyřešil. Nezveřejníme tak prozatím její řešení – stále platí: kdo první pošle správné řešení na mail **mirek zavináč olsak tečka net**, dostane velkou čokoládu, případně druhý polovinu, třetí čtvrtinu atd. O nezávislou posloupnost malých čokolád stále mohou soutěžit organizátoři.

A krom minulé čokoládové výzvy přichází poslední, třetí čokoládová výzva. Její pravidla jsou stejná jako v případě té minulé – první, kdo pošle řešení následující úlohy na mail **mirek zavináč olsak tečka net**, dostane velkou čokoládu, druhý půlku, třetí čtvrtku atd.

Poslední čokoládová úloha zobecňuje dobrodružství nekonečně mnoha prasátek na obecnou DUMu. Věříme, že bude schůdnější než ta předchozí ;-).

Úloha. Množina (blíže neurčené velikosti) prasátek nastoupí na všechny prvky předem určené DUMy. Každé ví, na kterém prvku stojí, a vidí jen prasátka na vyšších prvcích. Dále každé dostane na hlavu černý nebo bílý klobouk, a jen na základě klobouků, které vidí před sebou, si tipne barvu svého klobouku. Ukaž, že ať je tato DUM jakákoli, existuje strategie, se kterou se při jakémkoli rozložení klobouků splete jen konečně mnoho prasátek.

Rozloučení

Nekonečno je fascinující, ale ve skutečném světě jej příliš nepotkáš. Z tohoto důvodu končí i náš nekonečný seriál. Doufáme, že se Ti mezi nekonečny líbilo a že se k nim budeš myšlenkami rád(a) vracet. Na druhou stranu doporučujeme se z nich nezbláznit. Přeci jen je pro teorii množin nedotčené lidi nespočetný ordinál mnohem větší nesmysl než růžový vodník a nemá cenu je přesvědčovat, že nespočetné ordinály opravdu existují... Měj se nekonečně!

Mirek Olšák

Seznam symbolů a pojmů

Na této stránce jsou stručně uvedeny všechny důležité pojmy třetího dílu seriálu. U každého pojmu z tohoto dílu je uvedeno, na které stránce byl definován.

str 27. *Posloupnost* $x_0, x_1, \dots$ délky α

str 27. *Víceznačná funkce, vybrání* funkce z víceznačné funkce

str 29. *Řetězec* množin $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ – každé dva prvky $A, B \in \mathcal{R}$ musí splňovat $A \subset B$ nebo $B \subset A$

str 29. Zornovo lemma – když v $\mathcal{S}$ leží sjednocení každého řetězce, tak v $\mathcal{S}$ je maximální prvek

str 30. Princip dobrého uspořádání – každou množinu lze dobře uspořádat

str 31. *Lineární kombinace* prvků množiny $X \subset \mathbb{R}$

str 31. *Vyhodnocení* $k(X)$ lineární kombinace k prvků množiny X – součet všech $k(x) \cdot x$

str 31. *Triviální* lineární kombinace – všude nulová

str 31. *Lineárně nezávislá množina* – různé lineární kombinace dávají různá vyhodnocení

str 32. *Báze* – maximální lineárně nezávislá množina

str 33. *Kardinální číslo* – nejmenší ordinální číslo své mohutnosti

str 34. $|X|$ neboli *mohutnost* X – kardinální číslo, které má stejnou mohutnost jako X

str 34. $\mathfrak{c}$ neboli *kontinuum* – mohutnost množiny reálných čísel

Důležité pojmy z předchozích dílů: zobrazení (funkce), spočetno, nespočetno, porovnávání mohutností $|A| \leq |B|$, $|A| = |B|$, množina, třída, potence $\mathcal{P}(A)$, kartézský součin $A \times B$, ordinální číslo, množina přirozených čísel ω , třída ordinálních čísel $\mathbb{O}_n$, transfinite rekurse.

Návody

1. $\tilde{g} = \{(b, a) : f(a) = b\}$.
2. Pomocí Zornova lemmatu najdi maximální systém množin splňující bod (ii). Z maximality vyplyne bod (i).
3. Za $\mathcal{S}$ vol množinu takových podmnožin $\bigcup a$, které protínají každý prvek a jen v jednom bodě.
4. Uvaž dobré uspořádání na $\bigcup a$ a z něj odvoď předpis pro výběr reprezentantů.
5. Za $\mathcal{S}$ zvol množinu všech prostých zobrazení $\alpha \rightarrow X$, kde α je ordinální číslo. Jedná se o množinu (a ne o vlastní třídu), protože α je vždy typem nějaké podmnožiny množiny X s přidaným uspořádáním.
6. Postupně ukaž $f(0) = 0$, $f(-x) = -f(x)$, $f(nx) = nf(x)$ pro každé x reálné a n celé. Nakonec zjednoduš hodnotu $d \cdot f(qx)$, kde $q = \frac{n}{d}$ a n, d jsou nenulová celá čísla.
7. $\{1, \sqrt{2}\}$: Nechť $p = q\sqrt{2}$ a $q \neq 0$, pak $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$: Když $p + q\sqrt{2} = r\sqrt{3}$, tak umocněním dostaneš $2pq\sqrt{2} = 3r^2 - p^2 - 2q^2$. Protože je $\sqrt{2}$ iracionální, musí být $pq = 0$. Zbytek se rozebere podobně jako v předchozím případě.
8. (i) Kdyby M obsahovala nulu, vyhodnotila by se na nulu netriviální lineární kombinace daná předpisem $k(0) = 1$, $k(x) = 0$ pro $x \neq 0$. M by tak nebyla lineárně nezávislá. (ii) Kdyby M obsahovala racionální čísla p, q , měla by nulové vyhodnocení netriviální lineární kombinace daná předpisem $k(p) = q$, $k(q) = -p$, $k(x) = 0$ pro $x \neq p, q$. (iii) Stačí například doplnit na bázi lineárně nezávislou množinu $\{1 + \sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. Obecně můžeš libovolnou bázi s racionálním číslem q upravit na bázi bez racionálního čísla – vezmi ještě jeden její iracionální prvek x a nahraď q za $q + x$.
9. (i) Kdyby obsahovala jen jeden prvek $x \neq 0$, nebylo by možné vyjádřit $x\sqrt{2}$ jako racionální násobek x . (ii) Kdyby byla báze M spočetná, tak by i počet lineárních kombinací byl spočetný – ze stejného důvodu jako počet polynomů s racionálními koeficienty v kapitole Porovnávání nekonečen prvního dílu seriálu.
10. (i) Klasická řešení jsou $f(x) = x$, $f(x) = -x$. Dále se na takové řešení doplní například tyto dvě funkce definované na bázi: $f_0(x) = x$ s výjimkou $f_0(1) = -1$ nebo $f_1(x) = x$ s výjimkami $f_1(1) = \sqrt{2}$ a $f_1(\sqrt{2}) = 1$. (ii) $f_0(1) = \sqrt{2}$, $f_0(\sqrt{2}) = -1$. (iii) Z Zornova lemmatu existuje maximální množina P disjunktních párů z M . To znamená, že buď $\bigcup P = M$, nebo v $\bigcup P$ chybí jeden prvek. Úpravou spočetně mnoha dvojic se začlení i tento poslední zbývajících prvek. Alternativně lze využít princip dobrého uspořádání a popsat párování na DUMě. (iv) Z párů v (iii) vytvoř uspořádané dvojice a definuj na nich f_0 jako v bodě (ii). (v) Stačí najít pro bázi M libovolné zobrazení $M \rightarrow M$, které je prosté, ale není na.

Výsledky po 1. jarní sérii

Podrobné výsledky jednotlivých sérií nalezneš na našem webu.¹⁴

1. Filip	Bialas	3	GOPatovPH	25 25 25 25 25 --- 15 14 -	154,32	604
2. Danil	Koževnikov	2	GKepleraPH	24 25 24 24 24 --- 15 11 -	146,48	379
3. Pavel	Turek	3	GTomkovaOL	23 25 25 25 22 --- 15 8 -	143,00	770
4. Petr	Gebauer	2	G Mělník	24 22 24 24 23 --- 12 11 -	139,46	306
5. Jakub	Löwit	4	GČeskoliPH	25 25 20 23 20 --- 8 15 -	136,63	771
6. Radek	Olšák	1	GMensaPH	18 22 23 23 23 --- 12 12 -	134,37	245
7. Pavel	Hudec	2	GJarkovPH	23 22 24 23 22 --- 7 7 -	127,41	281
8. Lenka	Kopfová	1	MendelG OP	22 23 24 23 22 --- 12 -	126,00	285
9. Lucia	Krajčoviechová	0	GJHroncaBA	22 23 22 24 23 --- - 9 -	123,17	123
10. Jáchym	Solecký	3	PORG PH	21 25 24 21 22 --- 11 -	122,11	122
11. Victoria María	Nájares Romero	2	GZborovPH	20 22 18 21 21 --- 8 10 -	120,33	344
12. Lucien	Šima	4	PORG PH	20 25 22 23 21 --- 9 -	119,79	297
13. Richard	Hladík	3	GaOA MarLáz	22 20 24 22 20 --- 11 -	119,27	190
14. Samuel	Krajčí	1	GAlejKošic	23 22 24 23 23 --- 0 -	116,67	117
15. Filip	Čermák	2	MendelG OP	20 23 23 22 18 --- 8 0 -	113,91	121
16. Václav	Steinhauser	2	G Dačice	20 22 23 21 21 --- 7 -	113,89	483
17. Veronika	Hladíková	3	GMikul23PL	21 21 23 22 22 --- 1 -	110,57	270
18. Lucie	Kundratová	1	G TGM Zlín	22 22 22 19 22 --- 3 -	110,01	110
19. Tomáš	Domes	3	MendelG OP	20 20 23 20 19 --- 7 -	107,76	273
20. Tomáš	Konečný	3	GJirsíkaČB	16 21 23 23 18 --- 5 -	105,48	400
21. Ondřej	Krabec	1	G KomHavíř	21 22 22 19 16 --- 4 -	105,30	105
22. František	Couf	3	EKO GPraha	20 25 22 21 16 --- -	105,19	642
23. Václav	Volhejn	3	GKepleraPH	22 - 24 22 22 --- 7 7 -	103,72	104
24. Matěj	Doležálek	1	G Humpolec	19 21 21 21 14 --- 9 -	103,48	103
25. Ondřej	Motlíček	3	G Šumperk	19 22 24 21 15 --- 1 -	103,09	103
26. Alexandr	Jankov	2	MatičnickýGOS	17 22 20 22 16 --- 2 3 -	102,03	102
27. Daniele	Venier	3	LSciARoiti	17 21 21 21 14 --- 1 5 -	100,47	100
28. Vojtěch	Lanz	2	GZborovPH	20 20 19 20 20 --- -	99,26	378
29. Vendula	Kuchyňová	2	GMLerchaBO	17 22 17 23 20 --- -	99,05	99
30. Jana	Pallová	1	GJŠkodyPŘ	19 20 22 21 17 --- -	98,46	98
31. Pavel	Havlín	1	NPorg	16 22 21 21 17 --- -	96,11	96
32. Kamila	Kyzlíková	2	GZborovPH	20 21 15 21 16 --- -	93,89	212
33. Kateřina	Nová	3	G Vimperk	19 19 19 14 21 --- -	93,24	306
34. Adam	Mendl	0	GCoubTábor	18 21 21 15 18 --- -	91,84	200
35. Matúš	Komora	2	GLettMart	17 22 20 18 15 --- -	91,36	91
36. Denisa	Chytilová	2	GJŠkodyPŘ	19 20 16 19 13 --- 3 -	90,91	199
37. Minh Duc	Pham	1	NPorg	22 23 22 24 - --- -	90,72	91
38. Marian	Poljak	4	GJŠkodyPŘ	19 19 22 19 - --- 8 -	88,38	375
39. Slavomír	Hanzely	4	GGraymanaPV	21 16 24 20 - --- 7 -	88,27	88
40. Hedvika	Ranošová	2	GBudějovPH	16 22 18 22 - --- 10 -	88,03	294
41. Michal	Töpfer	3	GJPekařeMB	14 17 22 20 14 --- 1 -	87,96	228
42. Viktória	Brezinová	1	GAlejKošic	21 22 19 22 - --- 3 -	87,32	87
43. Tomáš	Čelko	2	GPBystrica	19 19 17 13 18 --- -	86,41	86

¹⁴<http://mks.mff.cuni.cz/vysledky/>

[illegible]

101.	Marek	Malý	3	G Neratov	11 13 14 7 7	----	----	----	51,11	153		
102.	Filip	Matějka	2	GZborovPH	17 21 12	----	----	----	50,18	58		
103.	Vojtěch	Jílek	3	VOŠKutHora	10 11 13 8 7	----	----	----	49,95	50		
104.	Filip	Opit	3	GBudějovPH	15 15 7 8	----	----	----	45,65	46		
105.	Adam	Španěl	4		18 6 21	----	----	----	45,27	45		
106.	Adam	Doubrava	0	GMasarykKM	12 13 12	----	7	----	44,95	102		
107.	David	Krajíček	2	BG Ostrava	14 17 5	----	8	----	44,39	44		
108.	Dan	Raffl	3	GVoděraPH	11 11 13 8	----	----	----	44,25	44		
109.	Matouš	Trnka	3	GJarošeBO	15	----	21	----	6	43,24	43	
110.	Barbora	Mouleová	2	G Plasy	5 9 10 12 5	----	----	----	41,42	81		
111.	Nikola	Kalábová	2	FSG Pirna	13 15 13	----	----	----	41,05	41		
112.	Jan	Klásek	3	SlovanG OL	10 13 9 8	----	----	----	40,94	41		
113.	Adéla	Seidelmannová	2	VOŠRychnovKn	12 18 11	----	----	----	40,38	40		
114.	Peter	Súkeník	4	GOKrŽilina	21 18	----	----	----	39,00	39		
115.	Tereza	Vlčková	2	GJarošeBO	22 17	----	----	----	38,42	38		
116.	Erik	Kočandrlle	1	GMikul23PL	11 20 7	----	----	----	38,17	38		
117.	Jan Antonín	Musil	0	PORG PH	----	8	8	13	8	38,05	38	
118.	Vít	Gaďurek	1	PORG PH	11 7 8	----	11	----	----	38,03	38	
119.	Andrej	Horník	2	GAnMeTr	14 11 12	----	----	----	----	36,66	37	
120.	Jakub	Ucháč	0	ZŠVranéNVI	13 10 13	----	----	----	----	36,17	36	
121.	Filip	Müller	1	GMikul23PL	11 13 7 5	----	----	----	----	35,70	36	
122.	Anna	Mírková	1	G LPika PL	7 15 13	----	----	----	----	34,32	34	
123.	Monika	Machalová	1	GJHroncaBA	15 19	----	----	----	----	34,17	34	
124.	Zuzana	Urbanová	3	GUBalvanJN	18 8	----	----	8	----	34,15	34	
125.	Krystyna	Waniová	2	G HavlČTěš	7 9 11	----	7	----	----	33,72	34	
126.	Alexander	Csizmár	1	GMikul23PL	7 15 11	----	----	----	----	33,06	33	
127.	Šárka	Míchalová	1	G Kralupy	15 18	----	----	----	----	32,59	33	
128.	Kateřina	Žáková	1	SlovanG OL	11 8 13	----	0	----	----	32,50	33	
129.	Leoš	Smetana	3	G Jaroměř	8 8	----	8	8	----	32,00	32	
130.	Samuel	Hrubý	3	GFraŽilina	10 11 10	----	----	----	----	31,99	32	
131.	Josef	Král	1	MendelG OP	----	15	17	----	----	31,72	32	
132.	Linh Giang	Tran	1	GMikul23PL	10 15 7	----	----	----	----	31,68	32	
133.–134.	Vojtěch	Janků	4	CMGPgBrno	13 9	----	9	----	----	31,00	31	
133.–134.	Valerie	Skopalová	4	G VysMýto	12 11 8	----	----	----	----	31,00	31	
135.	Ondřej	Meduna	1	GMikul23PL	----	11	13	7	----	30,81	31	
136.	John Richard	Ritter	2	G MasNámTŘ	18 13	----	----	----	----	30,77	31	
137.	Jana	Menšíková	3		4 12 9 4	----	----	----	----	29,91	37	
138.	Anna	Jandová	1	G Leg PB	----	16	----	14	----	29,70	30	
139.	Tereza	Lukášová	1	GMikul23PL	11 11 7	----	----	----	----	29,55	30	
140.	Vladimír	Lukačko	2	GVarŽilina	14 16 0	----	----	----	----	29,23	90	
141.	Jakub	Čurda	1	PORG PH	11 10	----	7	----	----	28,17	28	
142.	Dominik	Krasula	3	G Krnov	14	----	----	11	----	3	27,99	483
143.	Martin	Simet	1	GMikul23PL	----	15	----	13	----	27,53	28	
144.	Anh Minh	Tran	4	GJarošeBO	10 17	----	----	----	----	27,27	27	
145.	Daniel	Ridzoň	2	GKepleraPH	14 13	----	----	----	----	27,05	27	
146.	Ha Mi	Dao	1	GŠmejkalŮL	8	----	----	12	7	----	27,00	27
147.	Antonín	Štrpka	1	G Šumperk	11 15	----	----	----	----	26,27	26	
148.	Kateřina	Čížková	2	G Rokycany	16 9	----	----	----	----	25,48	25	
149.	Jakub	Zápotocký	2	GOpatovPH	9 11 5	----	----	----	----	25,47	25	
150.	Denisa	Jandová	1	GMikul23PL	11 11 3	----	----	----	----	25,43	25	
151.	Marián	Okál	2	SŠNvh	15	----	----	11	----	25,41	51	
152.–153.	Jakub	Kropš	1		11	----	----	14	----	25,19	25	
152.–153.	Lubomír	Smrček	1		11 14	----	----	----	----	25,19	25	
154.	Radim	Novotný	1	GMikul23PL	11 7	----	7	----	----	24,96	25	
155.	Marek	Murin	4	GJHroncaBA	16 8	----	----	----	----	24,91	65	
156.	Vojtech	Filipi	1	GDašickáPA	----	15	10	----	0	24,89	25	
157.	Matěj	Coufal	3	G HavlBrod	11 13	----	----	----	----	24,86	25	

	158.	Jana	Řežábková	4	PORG PH	17	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	24,52	133
	159.	Adam	Dobrovič	3	G TajBanBys	16	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	24,36	24
	160.	Duc Long	Hoang	1	GMikul23PL	-	-	13	11	-	-	-	-	-	-	-	24,02	24
	161.	Johana	Dvořáková	1	G Trutnov	-	14	-	10	-	-	-	-	-	-	-	23,51	24
	162.	Monika	Suchá	1	GMikul23PL	11	11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	22,76	23
	163.	Andrej	Židek	1	GJKTyła HK	7	16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	22,68	23
	164.	Petr	Zahradník	1	GŠmejkalÚL	10	13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	22,64	23
	165.	Jan	Dittrich	4	G JarošeBO	3	5	5	5	4	-	-	-	-	-	-	22,63	101
	166.	Peter	Macko	4	GJHroncaBA	13	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	22,46	22
	167.	Matthew	Dupraz	1	N Porg	-	22	-	-	-	-	-	-	-	-	-	22,43	22
	168.	Anna	Šebestíková	1	GCON ČesBud'	-	-	14	-	8	-	-	-	-	-	-	22,29	22
	169.	Zuzana	Svobodová	4	G FrýdlNOs	4	18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	22,13	428
	170.–171.	Simon	Hutař	1	PORG PH	7	7	-	-	8	-	-	-	-	-	-	22,06	22
	170.–171.	Jan	Česnek	1	G JarošeBO	8	7	7	-	-	-	-	-	-	-	-	22,06	22
	172.	Tomáš	Hampl	3	GDukelBR	10	11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	21,69	22
	173.	Lubica	Hladká	3	G TajBanBys	13	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	21,47	21
	174.	Viola	Vavryčuková	3	G Dobříš	-	-	-	-	21	-	-	-	-	-	-	21,41	21
	175.	Kateřina	Pařízková	1	MatičníGOS	11	-	10	-	-	-	-	-	-	-	-	21,38	21
	176.	Radek	Wagner	2	GMikul23PL	12	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	21,37	21
	177.	Matúš	Varhaník	2	G Bytča	15	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	20,32	20
	178.	Barbora	Hálková	2	SPSŠtav LI	9	11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	20,20	20
	179.	Marie	Freibergová	3	G Děčín	11	4	-	4	-	-	-	-	-	-	-	19,85	20
	180.	David	Šnajdr	1	GMikul23PL	7	-	13	-	-	-	-	-	-	-	-	19,43	19
	181.	Tomáš	Jurčo	1	G Prachati	19	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	19,28	19
	182.	Aneta	Němcová	2	GBoskovice	-	9	0	9	-	-	-	-	-	-	-	18,96	19
	183.	Daniel	Herman	3	GŠroKošíce	-	-	-	-	12	-	-	-	-	6	-	18,85	19
	184.	Samuel	Baran	2	G RaymanaPV	-	19	-	-	-	-	-	-	-	-	-	18,59	19
	185.	Nodari	Gogatishvili	2	GZborovPH	5	14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	18,50	89
	186.	Tomáš	Pishovaký	1	RGZS Prost	11	-	-	7	-	-	-	-	-	-	-	18,17	18
	187.	Jiří	Vala	2	G Mikulov	-	-	-	-	18	-	-	-	-	-	-	17,91	179
	188.–189.	Klára	Cihlářová	2	G Klatovy	-	18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	17,77	18
	188.–189.	Martin	Strnad	2	G Dobříš	-	18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	17,77	18
	190.	Jakub	Horyna	3	GNVPłaniPH	-	-	-	-	17	-	-	-	-	-	-	17,27	17
	191.	Kateřina	Vaňková	4	G JarošeBO	-	10	1	6	0	-	-	0	0	-</			

