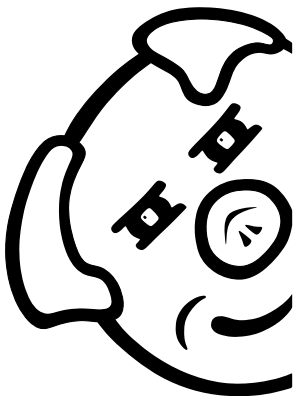


# Matematický korespondenční seminář

## Milý příteli !



Dostávají se Ti do rukou první komentáře tohoto ročníku našeho semináře. Jde už o ročník pětatřicátý, takže můžeme hovořit o tom, že je PraSe ve středním věku. Věk, kdy bylo zralé na porážku, stejně jako stáří, v němž zemře většina běžných prasat, má už úspěšně za sebou – a my se můžeme těšit, že tu s námi bude ještě dlouho.

Neděvejme se ale příliš daleko do minulosti ani do budoucnosti. Spolu s těmito komentáři dostáváš do rukou opravené úlohy, které jsi nám poslal(a) zhruba před měsícem. Projdi si poznámky, které jsme Ti k nim napsali, a podívej se do tohoto sešitku na **vzorová řešení** – uvidíš, jak by mohlo vypadat vypracování, za které bychom udělili plný počet bodů (a možná i nějaký ten kladný imaginární). Pokud si z toho něco odneseš do sepisování úloh o poměrech, které nám odešleš do pondělí devátého listopadu, bude účel vzoráků splněn.

Kromě vzoráků a **výsledkové listiny** po první sérii Ti přinášíme i tři série plně vypečených úloh. Ve **třetí sérii** si můžeš hrát s úlohami na nejružnějších **šachovnicích** včetně jedné trojrozměrné. Poslední série podzimní části semináře, kterou bude potřeba odeslat koncem vánočních prázdnin, nese jméno **Areas and perimeters**; a jak název napovídá, jedná se o tradiční cizojazyčnou sérii. Nejenže je její zadání v angličtině – i vypracovaná řešení přijímáme pouze psaná anglicky. Ale nenech se tím odradit: Za gramatické chyby body samozřejmě nestrháváme, a jako řešení leckteré úlohy stačí přehledně nakreslený a pár vhodnými větami okomentovaný obrázek. Abychom Ti přístup k angličtině zjednodušili, napsali jsme k této sérii krátký **úvodní text**, ve kterém se kromě důležitých vzorců pro výpočet obsahů a obvodů rozličných útvarů můžeš přiučit i některá slovíčka a obraty.

Největší lahůdkou těchto komentářů je ale bezesporu první díl **seriálu o nekonečnu**. Patnáctistránkový text začíná zlehka, pohádkou o Hilbertově hotelu. Když si ho ale přečteš celý, dozvíš se nejen, jak správně ubytovat nekonečno nekonečen hostů, ale také, kdo nebo co se skrývá pod tajemnou zkratkou DUM. Na základě znalostí získaných v textu by pak nemělo být těžké vyřešit alespoň některé ze **tří seriálových úloh**, které se zabírají právě nekonečnem. Každá je za pět bodů, takže si zodpovědnou četbou seriálu můžeš výrazně polepšit a dosáhnout třeba i na účast na jarním soustředění. Pozor! Termín odeslání první seriálové série se kryje s termínem třetí podzimní. Ještě že máš sedmnáctého listopadu volno, vid?

Příjemnou zábavu při počítání obvodu či obsahu nekonečné šachovnice přeje

Kuba Krásenský

Korespondenční seminář  
KAM MFF UK  
Malostranské náměstí 25  
118 00 Praha 1



matfyz

## Co je dále v komentářích?

- Jak řešit úlohy korespondenčního semináře?
- Poznámky k bodování a výsledkovým listinám
- Vzorové řešení 1. podzimní série
- Seriál – Do nekonečna a ještě dál I.
- Výsledková listina 1. podzimní série
- Příloha: Zadání 3. a 4. podzimní série a 1. seriálové série, povídání ke čtvrté podzimní sérii

## Řešení úloh

Dostal(a) jsi méně bodů, než jsi čekal(a)? Ocenil(a) bys rady, jak správně zapisovat řešení úloh? Potom je právě pro Tebe určený text s názvem **Jak řešit úlohy korespondenčního semináře**. A pokud už řešíš dlouho, zkus si ho přečíst také – určitě v něm najdeš rady, jak psát ještě lépe.

## Kurzy pro nadané žáky

Po roční přestávce se během letošního podzimu opět rozbíhají přednášky pro středoškoláky se zájmem o matematiku pořádané MFF UK. Do Vánoc budou věnované matematické olympiádě, potom různým zajímavým tématům připraveným nejen přednášejícími MFF. Více informací a možnost přihlášení najdeš na [olympiada.karlin.mff.cuni.cz](http://olympiada.karlin.mff.cuni.cz).

## Den otevřených dveří

Chtěli bychom Tě pozvat na Den otevřených dveří Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, mateřské instituce našeho semináře. Akce se uskuteční ve **čtvrtek 26. listopadu** a dozvíš se na ní například, co matematického se dá studovat, podíváš se do prostor MatFyzu, možná potkáš své budoucí spolužáky a určitě organizátory PraSeTe. Kromě přednášek o vysokoškolském studiu bude k dispozici i spousta informací o akcích pro středoškoláky. Bližší podrobnosti včetně programu najdeš na stránkách [www.mff.cuni.cz](http://www.mff.cuni.cz).

## Noví organizátoři MKS

Rok se s rokem sešel a my mezi sebou vítáme nové PraSečí organizátory. *Honza Kadlec, Matěj Konečný, Kája Kuchyňová, Viki Němeček, Marián Poppr, Vašek Rozhoň, Honza Soukup a Rado Švarc* už si našli své místo v semináři a opravili první úlohy.

# Jak řešit úlohy korespondenčního semináře?

Tento text je primárně určen méně zkušeným řešitelům. Jeho cílem je v krátkosti popsat způsob uvažování a vyjadřování, bez kterého se při řešení matematických úloh nelze obejít.

Pokud se rozhodneš řešit úlohy korespondenčního semináře, nestačí je pouze vypočítat. Body získáš jen v případě, že svůj postup nějak rozumně dostaneš na papír. Je tedy dobré si uvědomit, co se vlastně s řešením děje poté, co jej odešleš. Dostane ho do ruky nedůvěřivý opravovatel, jehož snahou je jej pochopit a nechat se přesvědčit o jeho správnosti. Není to tedy jako opravování kvízových otázek, u nichž se dá rychle ověřit, zda byly zodpovězeny správně. Zkus si proto svá řešení přechystat očima někoho, kdo zadanou úlohu vidí poprvé v životě.

## Co po Tobě úloha chce?

Úloha často vybízí „*Dokažte!*“, „*Ukažte!*“, „*Zdůvodněte!*“. To znamená, že chceme, abyste ze zadání vyvodili dokazované tvrzení pomocí logických kroků podložených pádnými argumenty. Nestačí tedy nakreslit obrázek, v němž úhel ze zadání vyjde pravý, či ověřit platnost nerovnosti na kalkulačce nebo na počítači pro 150 různých hodnot. Je totiž potřeba ukázat, že tvrzení platí pro všechny možné konstelace, kterých je obvykle nekonečně mnoho.

Jiné úlohy na řešitele apelují „*Rozhodněte!*“, například „*rozhodněte, zda platí*“, „*rozhodněte, kdo má vyhrávající strategii*“ nebo „*rozhodněte, které z čísel je větší*“. Samotné rozhodnutí nestačí, je třeba jej zdůvodnit. To znamená tvrzení dokázat, případně najít protipříklad.

Často se setkáš s úlohami typu „*Najděte!*“, „*Najděte všechny ...!*“. V prvním případě stačí, když najdeš nějaké vyhovující řešení. Je potřeba ukázat, že odpovídá požadavkům v zadání, ale už není potřeba se zabývat dalšími řešeními. Druhý případ je složitější, neboť tehdy je potřeba najít všechna vyhovující řešení, a navíc dokázat, že žádné jiné už neexistuje. Obměnou může být například „*Najděte nejmenší ...!*“, kde je potřeba najít řešení a ukázat, že menší neexistuje.

## Co nemáme rádi?

Do řešení piš jasná tvrzení a zdůvodňuj je. Zadání opisovat nemusíš. Pokud tvrdíš něco, co není pravda, pak je to ideální příležitost pro opravovatele strhnout Ti body. Navíc to, co z nepravdivého tvrzení vyvodíš, nejspíš také neplatí. Máš-li hypotézu, kterou neumíš dokázat, přiznej, že je to hypotéza. Sice pravděpodobně nedostaneš plný počet bodů, ale opravovatel bude rád, že nemusí ve Tvém řešení zbytečně hledat vysvětlení.

Dej si pozor na následující formulace:

- „*je zřejmé*“, „*je vidět*“ – Tyto obraty lze v řešení použít. Řešitelé je ale často používají v případech, kdy daná věc není vůbec zřejmá, ba dokonce, když neplatí.

- „*provedeme analogicky*“ – Tuto formulaci můžeš použít pouze v případě, že stačí v předchozích argumentech lehká změna značení. Analogie rozhodně neznamená zobecnění, například z důkazu pro 3 nelze takto vyrobit důkaz pro 50, či dokonce pro obecné  $n$ .

- „*z obrázku je patrné*“ – Obrázky jsou velmi dobré k tomu, aby se opravovatel lépe orientoval v řešení a mohl jej snáze pochopit. Postup by však měl být srozumitelný i bez něj, nikdy se na něho neodkazuj jako na nedílnou součást řešení. Pokud v obrázku zavedeš nějaké značení, měl bys ho vysvětlit v textu, ne ho jen začít používat.

• „stačí prozkoumat nejhorší variantu“ – Sice by to mohlo stačit, ale dokud neprozkoumáme všechny varianty, nelze říct, že tato konkrétní je nejhorší. Můžeme si to myslet, ale musíme to dokázat. Stejný problém nastává i u dalších formulací („nejlepší bude, když“ a podobně).

Pokud tedy některou z těchto frází používáš, rozmysli si, zda se nejedná o jeden z výše uvedených nešvarů.

## Co a jak dokazovat?

V této sekci se nejprve podíváme, jak správně interpretovat zadání, a poté uvedeme některé základní důkazové techniky, které můžeš ve svých řešeních použít.

Důkaz by měl vycházet z předpokladů a postupovat k závěrům úlohy. Dej si pozor, abys během řešení nepoužil něco, co nevyplývá z předpokladů nebo předchozích úvah, zejména ne dokazované tvrzení!

• „jestliže, pak“, „pokud, pak“, „Dokažte, že pokud platí  $A$ , pak platí  $B$ .“ – Kdykoliv se v zadání vyskytne věta tohoto typu, znamená to, že  $A$  je předpoklad (to, z čeho vycházíme a co můžeme při řešení používat), zatímco  $B$  je závěr (to, co chceme dokázat).

Předpoklad a závěr nesmíš za žádných okolností zaměnit! Srovnej následující tvrzení:

Jestliže je číslo dělitelné čtyřmi, pak je sudé. (platí)

Jestliže je číslo sudé, pak je dělitelné čtyřmi. (neplatí, např. pro 2)

• „právě když“, „právě tehdy, když“, „tehdy a jen tehdy, když“, „Dokažte, že  $A$  platí právě tehdy, když platí  $B$ .“ – V tomto případě se vlastně jedná o dvě úlohy. Je totiž potřeba dokázat následující dvě tvrzení:

(i) Pokud platí  $A$ , pak platí  $B$ .

(ii) Pokud platí  $B$ , pak platí  $A$ .

Platnost tvrzení se nezmění, když  $A$  a  $B$  prohodíme, viz následující příklad.

Dané číslo je dělitelné deseti, právě když jeho poslední cifrou je nula.

Poslední cifrou daného čísla je nula, právě když je dělitelné deseti.

Důkazových technik je mnoho a my si zde ukážeme dvě základní – přímý důkaz a důkaz sporem.

V přímém důkazu postupujeme od předpokladů, z nichž logickými úvahami vyvozujeme dílčí závěry, až dospějeme ke kýženému výsledku. Naproti tomu v důkazu sporem si na začátku představíme, co by se stalo, kdyby tvrzení neplatilo, a z tohoto předpokladu pak odvodíme evidentně neplatné tvrzení (spor). Použití této techniky si ukážeme na příkladu:

**Příklad.** Dokažte, že každé prvočíslo větší než 2 je liché.

*Řešení.* Pro spor předpokládejme, že jsme našli sudé prvočíslo  $p$  větší než 2. Dvojka je jeho dělitel, který není roven ani jedné, ani  $p$ . To je spor s předpokladem, že  $p$  je prvočíslo. Dokazované tvrzení tedy platí.

## Význam výrazů

Když matematik napíše vzoreček, nepředstavuje si pod ním nic jiného než běžné tvrzení. Pro úpravy výrazů, rovnic apod. tedy platí stejná pravidla jako pro obyčejné dokazování.

Definuj všechny proměnné, které ve vzorečcích používáš a nejsou v zadání. Opravovatel jinak těžko pozná, co jsi jimi chtěl říct. Se značením to však není třeba přehánět, a proto si označ vždy jen to, co v řešení budeš potřebovat. Příliš mnoho písmenek přehlednosti neprospívá.

Dále připomínáme, že je v důkazu třeba vycházet z předpokladů, ne z dokazovaného tvrzení. To ukážeme na příkladu:

**Příklad.** Dokažte, že pro libovolná kladná čísla  $a, b$  platí  $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$ .

Správné řešení může vypadat takto:



*Řešení.* Kdykoli umocníme reálné číslo na druhou, získáme nezáporné číslo. Tedy

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b, \\ 2\sqrt{ab} &\leq a + b, \\ \sqrt{ab} &\leq \frac{a + b}{2}, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Jiná možnost je tato:

*Řešení.* Pro spor předpokládejme, že máme dvojici čísel  $a, b$ , pro která tvrzení neplatí, tedy  $\sqrt{ab} > (a + b)/2$ . Pak ovšem

$$\begin{aligned} ab &> \frac{(a + b)^2}{4}, \\ 4ab &> (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \\ 0 &> a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2. \end{aligned}$$

To je spor, neboť umocněním reálného čísla nemůžeme dostat záporné číslo. Dokazované tvrzení tedy platí.

Oba tyto postupy byly v pořádku. První (přímý) důkaz vycházel pouze ze známých faktů a dobral se kýženého výsledku, druhý důkaz (sporem) předpokládal neplatnost tvrzení a došel k něčemu, co neplatí.

K řešení ale není možné přistupovat zcela přímočaře, tedy jen upravovat dokazovaný vzoreček. To proto, že jakmile do řešení napíšeš  $\sqrt{ab} \leq (a + b)/2$ , znamená to, že již předpokládáš, že daná nerovnost platí. Jenže to nemůžeš předpokládat, neboť Tvým cílem je to teprve dokázat.

Uveďme ještě jeden příklad, na kterém si ukážeme dvě různá použití proměnných.

**Příklad.** V závislosti na parametrech  $a, b, c$  vyřešte kvadratickou rovnici  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Zadání říká, že pro libovolná, ale pevně zvolená čísla  $a, b, c$  hledáme všechna  $x$ , která vyhovují zadané rovnici. Proměnné  $a, b, c$  označují v celém příkladu stále tatáž tři (ne nutně různá) reálná čísla. Každá konkrétní volba parametrů vlastně určuje jinou úlohu, ale přitom chceme vyřešit všechny tyto úlohy naráz, obecně. Proměnná  $x$  hraje zcela odlišnou roli – její hodnota je neznámá a naším cílem je ji určit.

## Používání známých tvrzení

Může se stát, že v literatuře nebo na internetu narazíš na tvrzení, které Ti usnadní řešení úlohy. Pokud je to nějaká věta, která má jméno (například Cevova věta), nezapomeň její název do řešení uvést. Pravděpodobně ji budeme znát, a když ne, dovedeme ji alespoň najít. Důkaz přitom popisovat nemusíš. V případě, že se jedná o nepojmenované tvrzení, napiš nám zdroj, kde jsi ho našel.

## Vzorová řešení

V neposlední řadě bychom Tě chtěli povzbudit k řešení našich úloh. Pokud náš seminář vidíš poprvé, nedej se odradit případnými počátečními neúspěchy. Prostuduj si svá opravená řešení a nezapomeň se podívat také na vzoráky. Vzorové řešení Ti má často co nabídnout i tehdy, když jsi úlohu vyřešil správně. Můžeš v něm najít různé zajímavé přístupy či myšlenky, a něco nového se tak naučit. V poznámkách opravovatele si pak můžeš přečíst, jak se s řešením potýkali ostatní.

Věříme, že Ti tento text usnadní řešení úloh v semináři i jinde a pomůže Ti osvojit si základy matematického uvažování. To, co se naučíš, není jen schopnost řešit matematické úlohy, ale také schopnost samostatně hlouběji přemýšlet. To se Ti určitě bude někdy hodit, a to i tehdy, když se matematikou dále zabývat nebudeš.

**Přejeme Ti mnoho radosti při objevování tajů matematiky!**

# Poznámky k bodování a výsledkovým listinám

Nejprve se zaměříme na jednu zvláštnost našeho semináře. Protože opravování úloh je komplexní záležitost, jsou komplexní i body, které obdržíte od opravovatelů. Každé řešení ohodnotíme číslem tvaru  $x + yi$ , kde  $x$  představuje reálné body a  $y$  jsou body imaginární. Jaký je mezi nimi rozdíl? Reálné body jsou „solidní“; jsou to body za správnost řešení, které obvykle dostáváte ve škole, na olympiádách a podobně. Jde o nezáporné celé číslo. Za naprosto správné řešení jich dostanete tolik, kolik činí bodové ohodnocení dané úlohy.

Imaginární body představují druhou, nezávislou stupnici. Vyjadřují míru elegance daného řešení. Hodnota  $y$  je celé číslo od  $-2$  do  $2$ . Kladné imaginární body značí řešení, které je radost číst: obsahuje šikovné triky a originální myšlenky nebo nachází souvislosti mezi zdánlivě vzdálenými pojmy. Naopak záporné imaginární body vyjadřují, že jsi někde použil zbytečně složité formulace, několikrát dokazoval totéž, všechno řešil hrubou silou nebo třeba napsal jednoduchý důkaz na pět stránek.

## Od komplexních bodů k výslednému hodnocení

Každou úlohu tedy hodnotíme komplexním číslem ve tvaru  $x + yi$ . Do výsledků celé série pak započítáme hodnocení pěti úloh, které jsi vyřešil nejlépe (měl jsi z nich nejvíce reálných bodů, v případě rovnosti rozhoduje počet imaginárních bodů). Hodnocení těchto příkladů sečteme a tím dostaneme komplexní číslo, které označíme  $b$ .

S číslem  $b$  se dále pracuje následovně: Nejprve vypočteme *hrubý bodový zisk* – to je reálné číslo, se kterým ve výpočtu všude dále pracujeme namísto komplexního čísla, kterým byly Tvé úlohy ohodnoceny opravovateli. Při zisku  $b$  bodů za sérii je výchozí hodnota hrubého bodového zisku dána vztahem<sup>1</sup>

$$\tilde{h} = \Re(b) + (2 - \sqrt{3}) \Im(b).$$

Jelikož by toto číslo mohlo být teoreticky záporné nebo větší, než je maximální počet bodů za sérii (označíme ho  $s$ , obvykle je  $s = 25$ ), „ořízneme“ výchozí hodnotu do tohoto intervalu:

$$h = \begin{cases} s & \text{pokud } \tilde{h} \geq s, \\ 0 & \text{pokud } \tilde{h} \leq 0, \\ \tilde{h} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Aby byli při bodování úloh mírně zvýhodněni mladší a začínající řešitelé, určuje se u každého řešitele tzv. *koefficient*. Jeho výchozí hodnota se vypočte následovně:

$$\tilde{\kappa} = (r - 1) + \frac{2z}{450},$$

---

<sup>1</sup>Symboly  $\Re(w)$ ,  $\Im(w)$  značí reálnou a imaginární část komplexního čísla  $w$ .



kde  $r$  je ročník<sup>2</sup> (přepočítaný tak, aby odpovídal čtyřletému gymnáziu, studenti a žáci plnící povinnou školní docházku mají  $\frac{1}{2}$ ) a  $z$  je počet bodů, které řešitel získal během předchozích ročníků. Jelikož výsledný koeficient  $\tilde{\kappa}$  je vždy číslo z intervalu  $\langle -\frac{1}{2}, 6 \rangle$ , položíme  $\kappa = \min(\tilde{\kappa}, 6)$ .

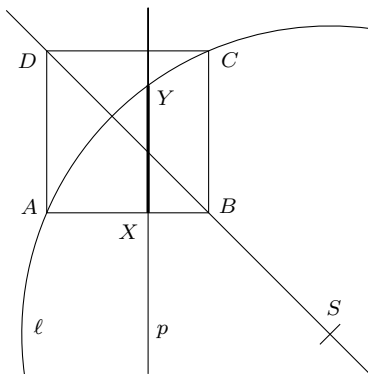
Předpokládejme dále, že  $\kappa < 3$ . Pro další výpočet bude podstatné číslo  $t$  definované jako

$$t = \frac{s}{2} \left( 1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\kappa \pi}{6} \right).$$

Hledaný *výsledný bodový zisk* za sérii (což už je číslo, které se udává ve výsledkové listině) pak dostaneme podle vztahu

$$v = \sqrt{t^2 + (s+t)^2 - (s+t-h)^2} - t.$$

Jak toto číslo interpretovat geometricky? Uvažujme v rovině čtverec  $ABCD$  o straně  $s$ . Na přímkou  $BD$  vyneseme bod  $S$  ve vzdálenosti  $\sqrt{2}t$  od bodu  $B$ , přičemž celá úsečka  $BS$  je vně čtverce. Dále nechť je dána kružnice  $\ell$  o středu  $S$  procházející body  $A$  a  $C$ . Na úsečce  $AB$  najdeme bod  $X$  takový, že  $|AX| = h$ , a povedeme jím kolmici  $p$  ( $p \perp AB$ ). Kružnice  $\ell$  a přímka  $p$  se protnou ve dvou bodech, ten uvnitř čtverce označíme  $Y$ . Výsledný bodový zisk za sérii je  $v = |XY|$ .



V případě, že  $\kappa > 3$ , postupujeme takto: číslo  $t$  se nyní zvolí jako

$$t = \frac{s}{2} \left( 1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{(6-\kappa)\pi}{6} \right)$$

a výsledný bodový zisk je

$$v = s - \left( \sqrt{t^2 + (s+t)^2 - (t+h)^2} - t \right).$$

Tento vzorec lze interpretovat tak, že kružnice  $\ell$  je obrazem kružnice získané dle postupu uvedeného výše pro koeficient  $6 - \kappa$  v osové souměrnosti podle osy  $AC$ , jinak zůstává postup stejný.

Nakonec zbývá případ  $\kappa = 3$  – tehdy je prostě  $v = h$ . Lze si to představit tak, že střed  $S$  je „v nekonečnu“, tudíž se kružnice změnila na přímku  $AC$ .

## Další detaily a statistiky úloh

Kromě výsledného bodového zisku lze ve výsledkové listině najít i další údaje. Je v ní po řadě uvedeno jméno, příjmení, třída, zkratka školy, reálné body za jednotlivé příklady a celkové body za sérii.

<sup>2</sup>Pokud máš ve výsledkové listině uvedený čtvrtý (maturitní) ročník, a přitom jsi mladší, je to nejspíše proto, že nám nedošla informace o Tvém ročníku. Napravit to můžeš buď mailem na [mks@mff.cuni.cz](mailto:mks@mff.cuni.cz), nebo přiložením svých údajů k řešení další série.

Do závěrečného hodnocení se počítají všechny série, takže se vyplatí poslat z každé série byť jen jedinou úlohu. Co se naopak nevyplatí, je poslat řešení pozdě – netolerujeme žádné zpoždění! Tedy pokud pošleš své řešení pozdě, sice Ti ho opravíme, ale body za něj nečekej.

Jak řešili úlohu ostatní, se můžeš dozvědět z výsledkové listiny. Abychom Ti však usnadnili toto zjišťování, uvádíme u řešení úloh statistická číselka o došlých řešeních. Je to čtveřice čísel, z nichž první říká, kolik lidí řešilo tuto úlohu, druhé, kolik lidí získalo alespoň dva body, třetí průměr udělených reálných bodů a čtvrté pak jejich medián (ten dostaneme tak, že seřadíme počty bodů za jednotlivá řešení podle velikosti a vezmeme číslo na prostřední pozici<sup>3</sup>).

---

<sup>3</sup>Pokud je čísel sudý počet, vezmeme aritmetický průměr dvou prostředních čísel.



# Bylo nebylo

1. PODZIMNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

## Úloha 1.

(213; 198; 2,79; 3,0)

*PraSátko Pepa hledalo další čtyři členy týmu na Náboj. Vydalo se do domečku, kde žilo pět PraSátek. S těmi bohužel bydlel v chaloupce i zlý vlk převlečený za další PraSátka, a toho Pepa do týmu nechtěl. Pepa si může vybrat dvojici obyvatel domečku a jednoho z nich se zeptat, zdali je ten druhý vlk. Toto může udělat dvakrát, přičemž druhou dvojici si může vybrat nezávisle na tom, jak zvolil tu první. PraSátka vždy mluví pravdu a vlk vždy lže. Jak se má Pepa zeptat, aby si mohl bez obav vybrat čtyři PraSátka do svého týmu a určitě v něm neměl vlka?* (Anička Doležalová)

ŘEŠENÍ:

Pomocí jedné otázky dokážeme určit, zdali dvojice obsahuje vlka. Stačí se jednoho z této dvojice zeptat, zda je ten druhý vlk. Pokud se dozvíme, že prý ano, tak je ve dvojici určitě vlk (vlk lže o PraSátku nebo PraSátka mluví pravdu o vlku). Když bude odpověď záporná, tak víme, že ve dvojici jsou dvě PraSátka (PraSátka mluví pravdu).

Nyní stačí rozdělit zvířátka do tří dvojic a PraSátkům ze dvou dvojic položit otázku na druhého PraSátka z dvojice. Když uslyšíme dvakrát ne, tak si Pepa vybere do týmu PraSátka z těchto dvojic, jelikož tyto obsahují PraSátka. Pokud uslyšíme jednou ano, tak si Pepa vybere zbylé dvojice (ty, které neřekly ano).

POZNÁMKY:

Naprostě většinu řešitelů se podařilo úspěšně vypořádat s úlohou. Pro toho, kdo si správně přečetl zadání, už zbytek nepředstavoval tvrdý oříšek.

(Marián Poppr)

## Úloha 2.

(183; 165; 2,72; 3,0)

*Zlý Honza chtěl zničit celý PraSečí svět. Zašel proto za černokněžníkem, aby se s ním spoličil. Ten mu dal nekonečnou rovinu a pravidlo: „Nejprve obarví tuto rovinu modrou a červenou barvou tak, aby na každé kružnici o poloměru jedna ležely právě dva modré body. Podaří-li se ti to, pomůžu ti zničit svět.“ Rozhodněte, zda Honza černokněžníkův úkol mohl splnit.* (Anh Dung „Tonda“ Le)

ŘEŠENÍ:

Vhodné obarvení roviny skutečně existuje a vypadá následovně: Rovinu obarvíme červeně a pak v ní modře nakreslíme nekonečně mnoho rovnoběžných přímk tak, že vzdálenost mezi dvěma sousedními je dva. Pro polohu středu libovolné kružnice nastává jeden ze dvou případů:

- (1) Střed se nachází přesně mezi dvěma přímkami, neboli na ose jejich pásu. Pak je jeho vzdálenost od každé z přímk rovna jedné. Jsou tedy tečnami kružnice s daným středem a na každé takovéto kružnici nalezneme přesně dva modré body v místech jejich dotyků s rovnoběžkami.
- (2) Střed se nachází blíže k jedné z rovnoběžek (nebo na ní leží). Pak vzdálenost středu od této přímky je menší než jedna a kružnice modrou přímkou protne ve dvou bodech. Taková kružnice již žádnou další přímkou protnout nemůže (vzdálenost od druhé z dvojice nejbližších přímk je větší než jedna).

Při zvoleném obarvení roviny tedy na každé kružnici s poloměrem jedna najdeme přesně dva modré body. To znamená, že Honza černokněžníkův úkol splnit může, ale než se mu podaří obarvit nekonečnou rovinu, máme snad dostatek času a není potřeba se znepokojovat, PraSečímu světu zatím nic nehrozí.

#### POZNÁMKY:

Ke druhé úloze se nám sešla velká spousta řešení, z nichž drtivá většina byla správná. Jednotlivá řešení se od sebe téměř nelišila. Speciální pochvalu zasluhují všichni, kteří krom najití vhodného obarvení také dokázali jeho správnost. Pár řešitelů si spletlo poloměr kružnice s průměrem a kvůli tomu rovnoběžky rozmístilo dvakrát hustěji. Princip řešení však našli, a proto je tato malíčkost nestála žádné body. Naprosté minimum řešitelů se nevyrovnalo s nekonečností roviny a prohlásilo, že jelikož je nekonečná, obarvit ji prostě nejde. (Kája Kuchyňová)

### Úloha 3.

(124; 103; 2,48; 3,0)

*Bylo nebylo, v daleké zemi žilo 2015 zapomnětlivých králů. Každý z nich obýval jeden hrad a těchto 2015 hradů tvořilo pravidelný 2015úhelník. Mezi každými dvěma hrady vedla cesta, a to buď dlážděná, nebo sypaná pískem. Jednou se všichni králové sjeli na Faerské ostrovy, aby společně pozorovali zatmění Slunce. Potom se chtěl každý vrátit do svého hradu. Během sjezdu ale zapomněli, ve kterém hradě kdo bydlí, a hrady si tedy rozdělili náhodně. Dokažte, že existují dva králové, mezi jejichž současnými hrady vede cesta stejného typu jako před výměnou.* (Honza Krejčí)

#### ŘEŠENÍ:

Z každého z 2015 hradů vede 2014 cest a každá cesta spojuje právě dva hrady. Proto je celkový počet cest roven  $2015 \cdot 2014/2$ , což je liché číslo. Proto je dlážděných cest jiný počet než těch sypaných pískem. Tudíž si po návratu z Faerských ostrovů králové nemohou rozdělit hrady tak, aby každá dvojice králů měla své nové hrady spojené cestou jiného druhu než před sjezdem. Dokázali jsme, že existují dva králové, mezi jejichž současnými hrady vede cesta stejného typu jako před výměnou.

#### POZNÁMKY:

Řešitelé přišli hned na několik různých způsobů, jak určit celkový počet cest. Uvažme, že v daleké zemi bylo obecněji  $n \in \mathbb{N}$  hradů. Pak tam bylo celkem  $(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$  cest, neboť z prvního hradu vede  $n-1$  cest, z dalšího vede  $n-2$  cest, které jsme ještě nezapočítali, atd., až z předposledního hradu vede jediná ještě nezapočítaná cesta. Uvedený součet je podle známého Gaussova vzorce pro součet prvních  $n-1$  přirozených čísel roven  $(n-1)n/2$ . Další možností, jak určit počet cest, je sečíst počet hran a úhlopříček  $n$ -úhelníka. Takto dostáváme  $n + n(n-3)/2 = (n^2 - n)/2 = n(n-1)/2$ . A konečně lze každou cestu chápat jako neuspořádanou dvojici hradů, které spojuje. Proto je celkový počet cest roven počtu neuspořádaných dvojic vybraných z  $n$  prvků, což je  $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ .

(Míša Hubatová)

### Úloha 4.

(136; 112; 3,21; 3,0)

*V každém patře nekonečně vysoké začarované věže se nachází magický portál, na kterém je napsáno přirozené číslo. Tato přirozená čísla tvoří nerostoucí posloupnost<sup>4</sup> a zároveň každé číslo udává, do kolikátého patra příslušný portál vede. Mezi patry věže lze cestovat pouze pomocí portálů a každý portál je pouze jednosměrný. V jednom z pater si malá myška usmyslela, že se vydá na výzvědy, a začala putovat skrze portály. Ukažte, že za nějakou dobu zůstane uvězněná ve dvojici pater, případně dokonce jen v jediném.*

(Vejtek Musil)

<sup>4</sup>To znamená, že vybereme-li si kterékoliv patro a označíme-li číslo na portálu v tomto patře  $a$ , pak ve všech patrech nad tím vybraným jsou na portálech čísla menší či rovná  $a$ .

#### ŘEŠENÍ:

Označme si  $a_i$  jako číslo portálu v  $i$ -tém patře. Posloupnost  $(a_i)$  je ze zadání nerostoucí, platí proto  $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ . V prvním patře je tedy největší číslo portálu ze všech, označme si jej  $c$ .

Ať myška začíná svou cestu kdekoliv, po prvním vstoupení do portálu určitě bude někde mezi patry 1 a  $c$  (včetně). Od té doby tento interval pater už nikdy neopustí, nejvýše po  $c$  dalších „teleportacích“ se myška ocitne na patře, na kterém už někdy byla. Od té doby se bude pohybovat v cyklu. Naším úkolem je ukázat, že tento cyklus nebude mít délku větší než 2.

V každém cyklu musí z každého i do každého jeho patra vést právě jeden portál. Označme si tedy čísla pater tohoto cyklu jako  $m_1, \dots, m_n$  (v libovolném pořadí), dále  $m$  nejnižší a  $M$  nejvyšší číslo jeho patra. Potom číslo  $a_m$  musí být nejvyšší číslo ze všech  $a_{m_i}$ , musí tedy platit  $a_m = M$ . Podobně  $a_M$  musí být nejnižší číslo portálu ze všech  $a_{m_i}$ , proto  $a_M = m$ . To ale znamená, že nejvyšší a nejnižší patro na sebe navzájem odkazují, neboli vzniká cyklus délky maximálně 2 (pokud  $m = M$ , pak máme cyklus délky 1).

#### POZNÁMKY:

Řešení se sešlo opravdu hodně. Jelikož se jednalo o první sérii, a navíc se v úloze vyskytovalo neko-nečno, se kterým není lehké pracovat, snažil jsem se být mírný a nestrhávat body za nedostatečné zdůvodnění – také proto, že v této úloze intuice poměrně dobře odpovídá tomu, co se skutečně děje.

První část řešitelů postupovala obdobně vzorovému řešení (z těch měla většina plný počet bodů). Druhá část nějak popisovala způsob, jakým se myška hýbe – buď, že se bude neustále přibližovat jednomu bodu a buď se zacyklí po cestě, nebo se dostane do intervalu délky 2 a nic jiného jí nezbude, nebo že se bude postupně čím dál víc „vzdalovat“, až nakonec dojde do prvního patra a už se nebude mít kam jinam vrátit.

Z druhé skupiny měla většina 3–5 bodů, přičemž jsem nejčastěji strhával za to, že zapomněli na jeden ze způsobů pohybu myšky.

Dva body dostali ti, kteří si správně všimli, že se myška bude pohybovat stále blíže k nějakému patru, ale nijak to nezdůvodňovali, případně za jiné zajímavé pozorování. (Martin Čech)

### Úloha 5.

(117; 80; 3,10; 5,0)

*Zlý černokněžník proměnil PraSátka v krásnou dívku. Navíc začaroval jeho oblíbené hodiny tak, že se čísla na ciferníku přeházela. Hodiny nyní odbíjejí každou celou hodinu, jenže napřeskáčku – přesně podle čísel na ciferníku. PraSátka bude vysvobozeno, pokud hodiny během tří po sobě jdoucích odbíjení vydají alespoň 21 úderů. Dokažte, že ať černokněžník začaroval hodiny jakkoliv, prokletí PraSátka bude za patnáct hodin určitě zlomeno.* (Kuba Krásenský)

#### ŘEŠENÍ (PODLE VAŠKA STEINHAUSERA):

Úlohu vyřešíme sporem – předpokládejme, že existuje zpřeházení ciferníku, pro které platí, že součet tří po sobě jdoucích hodin je nejvýše 20. Pozice na ciferníku si postupně označme  $a$  až  $l$  tak, aby  $l = 12$ . Víme, že trojice, které obsahují 12, mají součet nejvýše 20, tudíž součet každé z dvojic  $a + b$  a  $j + k$  je nejvýše 8. Protože navíc víme, že  $1 + 2 + \dots + 12 = 78$ , tak

$$c + d + \dots + i \geq 78 - 12 - 2 \cdot 8 = 50.$$

Z čísel na pozicích  $c$ ,  $f$  a  $i$  vybereme nejmenší, čímž dosáhneme toho, že bude rovné nejvýše 9. Zbýlá čísla tvoří dvě disjunktní trojice po sobě na ciferníku následujících čísel, které mají dohromady součet alespoň 41, tedy jedna z dvojic má součet alespoň 21, což je spor.

#### POZNÁMKY:

Mezi došlými řešeními se objevilo mnoho přístupů. Úloha se snadno vzdala skoro všem pokusům o „vysporování“, ať už se jednalo o součty cifer, nebo o opakování čísel. Také se objevilo mnoho rozebíracích řečen. K tomu bych rád řekl, že pokud se v řešení dostanete k přílišnému rozebírání, stojí za to se rozmyslet, jestli neexistuje jednodušší řešení (minimálně v PraSátku takové skoro určitě existuje). Jako další způsob řešení bych uvedl řešení typu „budu se snažit nevytvořit

požadovaný ciferník“. V těchto postupech se často objevoval argument, že pro černokněžníka je výhodnější, pokud „součet cifer bude co nejvyváženější“ nebo „velké a malé cifry se budou párovat“. Toto rozhodně obecně neplatí. Každé takovéto netriviální pozorování je nutné v řešení pořádně zdůvodnit.

(Honza Krejčí)

## Úloha 6.

(76; 29; 2,01; 1,0)

*V lese je 99 chaloupek. V každé chaloupce žije jedna až 99 ježibab. Přitom neexistuje žádná skupina chaloupek taková, aby celkový počet ježibab v nich žijících byl dělitelný stem. Dokažte, že v každé chaloupce žije stejný počet ježibab.*

(Marta Kossacká)

ŘEŠENÍ:

Počet ježibab v  $i$ -té chaloupce budeme značit  $a_i$ . Pro spor předpokládejme, že existují dvě chaloupky s různým počtem ježibab. Nechť jsou to BÚNO<sup>5</sup> první a druhá chaloupka, tedy  $a_1 \neq a_2$ . Označme  $s_i$  součet počtů ježibab v první až  $i$ -té chaloupce modulo 100, tedy

$$s_i \equiv \sum_{j=1}^i a_j \pmod{100}.$$

Všimneme si, že podle zadání  $s_i \neq 0$ . Stejně tak  $s_i \neq s_j$  pro  $i > j$ , protože v opačném případě by  $s_i - s_j = 0$ , neboli

$$a_{j+1} + \dots + a_i \equiv 0 \pmod{100},$$

což podle zadání nemůže nastat.

Všechny součty  $s_i$  musejí být nenulové a po dvou různé, a tedy pro každé  $j \in \{1, 2, \dots, 99\}$  existuje  $s_i$  takové, že  $s_i = j$ . Přitom  $a_2$  nabývá hodnoty mezi 1 a 99, a protože z předpokladu víme, že  $a_1 \neq a_2$ , musí platit  $a_2 = s_i$  pro nějaké  $i \in \{2, 3, \dots, 99\}$ . Tudíž

$$0 = s_i - a_2 \equiv a_1 + a_3 + a_4 + \dots + a_i \pmod{100},$$

což je ve sporu s předpokladem, že neexistuje skupina chaloupek, v nichž žije dohromady počet ježibab dělitelný stem.

POZNÁMKY:

Sešlo se poměrně hodně řešení, z nichž většina pouze dokázala, že v chaloupce může žít stejný počet ježibab. Taková řešení si vysloužila 1 bod. Ostatní více či méně úspěšně dokazovala požadované tvrzení, ať už uvedenou cestou, nebo indukcí přes počet chaloupek.

(Honza Soukup)

## Úloha 7.

(55; 9; 0,78; 0,0)

*V každé z  $n$  slují žije drak. Chodí je krmít  $2^{n-1}$  trpaslíků, přičemž žádní dva z nich nekrmí přesně ty samé draky a pro každou trojici trpaslíků existuje drak, kterého chodí krmít všichni tři. Ukažte, že pokud jsou draci alespoň tři, existuje drak, kterého krmí všichni trpaslíci.*

(Anh Dung „Tonda“ Le)

<sup>5</sup>Jde o běžnou matematickou zkratku značící „bez újmy na obecnosti“.

#### ŘEŠENÍ:

Nechť  $D$  je množina všech draků. K libovolnému trpaslíkovi  $t_i$  přiřadíme množinu  $T_i \subset D$  obsahující právě ty draky, které  $t_i$  krmí. Pro spor předpokládejme, že existuje trpaslík  $t_j$  takový, že  $T_j = D \setminus T_i$ . Povšimněme si, že  $z \geq 3$  plyne, že trpaslíci jsou alespoň čtyři. Proto k  $t_i$  a  $t_j$  můžeme přidat třetího trpaslíka  $t_k$  a dle zadání musí existovat drak, kterého všichni tři krmí. Protože ale  $T_i \cap T_j = \emptyset$ , nemůže takový drak existovat. To je spor. Proto neexistují žádní dva trpaslíci  $t_i$  a  $t_j$  takoví, že  $T_i$  a  $T_j$  jsou navzájem doplňky do  $D$ .

Množina  $D$  má  $n$  prvků, z čehož plyne, že má  $2^n$  podmnožin. Ty umíme rozdělit na  $2^{n-1}$  dvojic takových, že množiny v dvojici jsou navzájem doplňky do  $D$ . Ukázali jsme, že z každé této dvojice můžeme vzít maximálně jednu množinu přiřazenou nějakému trpaslíkovi. Ale protože trpaslíků je  $2^{n-1}$  a všechny jim přiřazené množiny jsou různé, znamená to, že z každé dvojice množin musí být právě jedna přiřazena nějakému trpaslíkovi. Řešení lze nyní dokončit více způsoby. My si ukážeme dva.

#### STANDARDNÍ PŘÍSTUP:

Pro spor předpokládejme, že žádný drak není krměn všemi trpaslíky. Indukcí ukážeme, že pro libovolné  $l \geq 1$  existují všichni trpaslíci, kteří krmí právě  $n - l$  draků. Potom dosazením  $l = 1$  a  $l = n - 1$  dostaneme, že existují všichni trpaslíci, kteří krmí právě jednoho draka, a stejně tak ti, kteří krmí všechny draky až na jednoho. Z toho vyplývá, že někteří dva trpaslíci jistě budou krmít doplňkové množiny draků, což je spor.

Začneme důkazem pro  $l = 1$ . Kdyby pro nějakou  $(n - 1)$ -prvkovou podmnožinu  $D$  neexistoval žádný trpaslík, který krmí právě draky z této množiny, pak existuje trpaslík, který krmí právě toho draka, který v této množině není. Nazvěme tohoto trpaslíka  $t_i$  a jeho draka  $A$ . Pak ovšem libovolní dva trpaslíci  $t_j$  a  $t_k$  musejí taktéž krmít  $A$ , aby platilo, že  $t_i$ ,  $t_j$  a  $t_k$  krmí všichni alespoň jednoho společného draka. Kvůli tomu ovšem každý trpaslík krmí  $A$ , což je ve sporu s tím, že žádný drak není krměn všemi trpaslíky. Takže pro libovolnou  $(n - 1)$ -prvkovou množinu draků existuje trpaslík, který krmí právě ji, čímž máme případ  $l = 1$  pokrytý.

Nyní předpokládejme, že máme pomocné tvrzení dokázáno  $l - 1 \geq 1$ , a dokažme ho pro  $l$ . Kdyby pro nějakou  $(n - l)$ -prvkovou množinu draků neexistoval trpaslík, který krmí právě tyto draky, pak existuje trpaslík, který krmí právě těch  $l$  draků, kteří v této množině nejsou. Nazvěme tohoto trpaslíka  $t_i$  a jeho draky  $A_1, A_2, \dots, A_l$ . Z indukčního předpokladu existuje trpaslík  $t_j$ , který krmí všechny draky až na  $A_2, \dots, A_l$ . Navíc díky případu  $l = 1$  existuje i trpaslík  $t_k$ , který krmí všechny draky až na  $A_1$ . Ovšem neexistuje žádný drak, kterého by krmil  $t_i$ ,  $t_j$  i  $t_k$ . To je hledaný spor a tím jsme též hotovi.

#### TRIKOVÝ PŘÍSTUP:

Uvažujme trpaslíka  $t_i$ , který krmí nejméně draků. Pokud je takových trpaslíků více, budeme uvažovat libovolného z nich. Nechť  $t_i$  krmí  $d$  draků, které budeme nazývat  $A_1, \dots, A_d$ . Očividně  $d > 0$ , jinak by pro libovolné další dva trpaslíky  $t_j$  a  $t_k$  platilo, že neexistuje drak, který by byl krměn  $t_i$ ,  $t_j$  i  $t_k$ , což je spor se zadáním. Kdyby existoval trpaslík, který krmí právě draky  $A_1, \dots, A_{d-1}$ , pak dostáváme spor s tím, že  $t_i$  krmí nejméně draků. Proto musí existovat trpaslík  $t_l$ , který krmí všechny draky až na  $A_1, \dots, A_{d-1}$ . Z toho plyne, že jediný drak, kterého krmí  $t_i$  i  $t_l$ , je  $A_d$ . Potom ale libovolný další trpaslík  $t_m$  musí krmít  $A_d$ , protože jinak by neexistoval drak, který by byl krměn  $t_i$ ,  $t_l$  i  $t_m$ . Takže všichni trpaslíci krmí  $A_d$ , což jsme chtěli dokázat.

#### POZNÁMKY:

Celkem se sešlo 55 řešení, z nichž nějaké body získalo deset. Mezi nejčastější chyby, které řešitelé dělali, patřilo ukázání, že počet trojic je vyšší než počet draků, dále konstrukce případu, kdy skutečně všichni trpaslíci jednoho společného draka krmí, nebo například pouhé rozebrání případu  $n = 3$  (a ani to ne vždy správně). Většina řešitelů, kteří úlohu vyřešili, postupovala standardně. *Pavel Turek* a *Pavel Hudec* se pustili na obtížnou cestu s indukcí podle  $n$ , ale oba nakonec úlohu zdárně dokončili. Trikové řešení *Petra Gebauera* mne natolik ohromilo, že jsem se mu rozhodl udělit  $+i$ .

(Rado Švarc)

## Úloha 8.

(33; 4; 0,58; 0,0)

Je není jeden strom<sup>6</sup>, na kterém Štěpán s Mirkem hrají hru. Štěpán začíná. Hráč na tahu vždy obarví dosud neobarvený vrchol jednou ze čtyř barev tak, aby dva vrcholy spojené hranou neměly stejnou barvu. Štěpán vyhraje, obarví-li se všechny vrcholy. V opačném případě vyhraje Mírek. Dokažte, že Štěpán má vyhrávající strategii<sup>7</sup>.

(Filip Hlásek)

ŘEŠENÍ:

Po každém tahu se podíváme na náš strom (říkejme mu nadále třeba strom  $S$ ) a rozdělíme ho na podstromy  $S_1, S_2, \dots, S_n$  následujícím způsobem: vezmeme dosud nevyužitou hranu a všechny vrcholy, k nimž se z ní dá dostat po cestě bez obarvených vrcholů, a tyto vrcholy včetně koncových obarvených dáme do podstromu. Opakujeme postup, dokud nevyužijeme všechny hrany stromu  $S$ . Každý neobarvený vrchol tedy bude náležet do právě jednoho podstromu a každý obarvený do tolika různých podstromů, kolik z něj vede hran, přičemž v každém z nich to bude list.

Dále si uvědomíme, že žádný podstrom neovlivňuje nic, co se děje v jiném podstromu. Můžeme je tedy řešit odděleně. Nyní se pokusíme dokázat, že je Štěpán vždy schopen zajistit, aby po jeho tahu byly v každém podstromu obarvené nejvýše dva vrcholy. Takovýto stav nazveme *dobrý*. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle toho, o kolikátý Štěpánův tah se jedná:

Je-li to jeho první tah, může Štěpán hrát jakkoli. Ve všech podstromech, na které tak strom  $S$  rozdělí, bude právě jeden obarvený vrchol. Pokud byl před Mirkovým tahem  $S$  v dobrém stavu, je po jeho tahu buď stále v dobrém stavu (jestliže Mírek hrál do podstromu  $S_i$ , který měl původně právě jeden obarvený vrchol, nebo hrál na cestu spojující jeho dva obarvené vrcholy), nebo existuje  $i$  takové, že v  $S_i$  jsou tři obarvené vrcholy. To odpovídá situaci, kdy Mírek provedl tah někam do podstromu  $S_i$ , který měl již dříve obarvené dva vrcholy, a to mimo cestu mezi těmito dvěma vrcholy. Tím od  $S_i$  odpojil několik (klidně i nula) dalších podstromů a vytvořil z něj podstrom se třemi obarvenými vrcholy.

Je-li  $S$  po Mirkově tahu v dobrém stavu a ještě není obarvený, může Štěpán buď najít podstrom  $S_j$ , který má právě jeden obarvený vrchol, a obarvit například kterýkoli jeho list, nebo v jiném podstromu  $S_k$ , který má právě dva obarvené vrcholy, obarvit libovolný vrchol na cestě mezi nimi.

V opačném případě existuje právě jedno takové  $i$ , že ve stromu  $S_i$  jsou právě tři obarvené vrcholy. Nemůže jich být víc, protože Mírek mohl obarvit vrchol jen v jednom podstromu. V tomto případě  $S$  ještě plně obarvený není, neboť v plně obarveném  $S$  by každý podstrom měl jen dva vrcholy, a tedy by nemohl mít tři barvy.

Obarvené vrcholy pojmenujeme  $a, b, c$  a označíme si  $P_{ab}$  cestu mezi vrcholy  $a$  a  $b$ , obdobně označíme i  $P_{ac}$  a  $P_{bc}$ . Všimneme si, že z definice stromu vyplývá, že  $P_{ab} \cap P_{bc} \cap P_{ca}$  obsahuje alespoň jeden vrchol. Je tomu tak proto, že kdyby byl průnik prázdný, tak by sjednocení těchto cest (které stále musí být podgrafem stromu) obsahovalo kružnici. Obarvíme-li takový vrchol (volnou barvu ještě určitě máme, protože v  $S_i$  jsou právě tři obarvené vrcholy), rozdělíme strom  $S_i$  na podstromy, z nichž každý bude obsahovat nejvýše dva obarvené vrcholy. Strom  $S$  je tedy evidentně opět v dobrém stavu.

POZNÁMKY:

Na osmou úlohu se nám sešlo opravdu hodně řešení. Bohužel pouze Filip Bialas vyřešil úlohu tak, že jsem k tomu neměl vůbec žádné připomínky, a tím si vysloužil  $+i$ . Nejčastější chyby spočívaly v tom, že nebyla strategie dostatečně popsána a obsahovala nekonkrétní formulace, jako třeba že si Štěpán musí dávat pozor a pak nemůže prohrát a podobně. Korektní popis strategie ke kombinatorické hře musí být napsán tak, aby se jím mohl řídit například i počítač. Někteří též řešili úlohu jen pro nějaké malé konkrétní stromy. V řešení, která už nějakou obecnou strategii představila, často

<sup>6</sup>Definici stromu spolu se všemi ostatními potřebnými definicemi lze najít na tomto odkazu [mks.mff.cuni.cz/archive/34/uvod1s.pdf](https://mks.mff.cuni.cz/archive/34/uvod1s.pdf).

<sup>7</sup>Vyhrávající strategie je strategie, která vede k vítězství, ať už protihráč hraje jakkoliv.

chyběl důkaz, že vymyšlená strategie funguje. Chcete-li se podívat na více příkladů, jak může vypadat popis a důkaz strategie ke kombinatorické hře, můžete se podívat na vzoráky první série seriálu 32. ročníku<sup>8</sup>, která se jim věnuje. (Viki Němeček)

Jako každý rok, i letos Tě bude v PraSátku provázet třídílný seriál. Jedná se o výklad odvětví matematiky, se kterým se na střední škole s velkou pravděpodobností setkáš jen v omezené míře či vůbec ne, ale které je přesto možné vyložit tak, aby bylo středoškolákům přístupné. Letošní seriál pro Tebe píše Mirek Olšák a jeho ústředním tématem je nekonečno. Jeho díly ponесou jména *Svět nekonečen*, *Pevné základy* a *Síla volby*. V textu najdeš cvičení, na kterých si sám (sama) můžeš vyzkoušet pochopení látky, na konci textu jsou pak k očíslovaným cvičením nápovědy. Ke každému dílu se dále váže seriálová série se třemi soutěžními úlohami, která se odevzdává spolu s některou běžnou sérií PraSete. Body ze seriálových sérií se počítají do celkových výsledků, takže jestli se chceš v PraSátku dobře umístit, je třeba posílat i seriálové úlohy. Pokud Ti obvyčejné úlohy nestačí a chceš opravdové lahůdky, můžeš se na konci každého (tedy i tohoto) dílu těšit na **soutěž o čokoládu**.

---

<sup>8</sup>[mks.mff.cuni.cz/archive/32/9.pdf](https://mks.mff.cuni.cz/archive/32/9.pdf)

# Do nekonečna a ještě dál.....

*Nikdo nás nebude moci vyhnat z ráje, který pro nás vytvořil Cantor. (David Hilbert)*

## Díl první – Svět nekonečen

Pojmem nekonečna se zabývali filosofové a matematici již od dob, kdy rozdíl mezi filosofií a matematikou byl pramalý. My si zde předvedeme až výsledky matematiků 19. a 20. století počínaje Georgem Cantorem. Ti na své cestě vyzkoušeli řadu slepých uliček a nejednoho z nich to stálo duševní zdraví. Výsledkem však je krásná teorie, nyní všeobecně uznávaná za základ takřka veškeré vysokoškolské matematiky.

Název celého seriálu *Do nekonečna a ještě dál* je mimo jiné odkazem na sérii animovaných filmů Příběh hraček. Jedná se o slavnou hlášku hračky Buzze Raketáka – superastronauta, který létá z planety na planetu a zachraňuje svět. Dítě, které si z Buzzem hraje, je nadšené z toho, že s ním létá „do nekonečna a ještě dál“, a to ani nemá ponětí, o čem vlastně mluví. Cílem seriálu, který taktéž bude místy pojat pohádkově či hravě, je tuto otázku objasnit a přitom neubrat nekonečnu nic z jeho kouzla.

V odborných publikacích nese téma tohoto seriálu suché označení *Teorie množin*. Důvod, proč tomu tak je, bude patrný zejména z druhého dílu *Pevné základy*. Nicméně ani vysokoškoláci neztrácejí hravost a ohromení z nekonečna, což reflektuje fakt, že běžným slangovým označením pro teorii množin je zkratka TeMno. ;-)

### První nástrahy nekonečna

Než se pustíme do nekonečna, dohodneme se na jednom základním značení: Množinu přirozených čísel značíme  $\omega$  a **nulu budeme považovat za přirozené číslo**.<sup>9</sup> Toto značení je v teorii množin obvyklé a důvody jeho používání budou více patrné z druhého dílu seriálu. Mimo jiné se nám bude hodit, aby šlo říci „Konečné množiny jsou právě ty množiny, jejichž velikost vyjadřuje nějaké přirozené číslo.“ a nevyřadit tím z konečných množin prázdnou množinu. Nicméně pozor, tato úmluva platí pouze zde a v úlohách patřících k tomuto seriálu, v jiných středoškolských úlohách se nula za přirozené číslo běžně nepovažuje.

Zatímco nula je přirozeným číslem, nekonečno žádným číslem není. Nekonečno ve skutečnosti ani není nějaký matematický objekt, je to jen vlastnost. Přímka je nekonečná, posloupnost může být nekonečná, množina může být nekonečná. Jedná se o opak konečnosti, kde konečnost přesně

---

<sup>9</sup>Řecké písmenko  $\omega$  je malá omega, zatímco velká omega vypadá takto:  $\Omega$



znamená, že se velikost dané množiny nebo posloupnosti dá vyjádřit přirozeným číslem. Nekonečná množina pak je taková, jejíž velikost se žádným přirozeným číslem vyjádřit nedá, je na to „příliš velká“. Existují i další důvody, proč se nekonečno nepovažuje za přirozené číslo – chová se totiž úplně jinak.

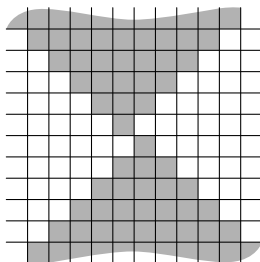
**Příklad.** Kdykoli si vezmeme konečnou množinu reálných čísel, najdeme v ní největší i nejmenší prvek. U nekonečné množiny se to stát může, ale nemusí. Například uzavřený interval  $\langle 0, 1 \rangle$  má nejmenší prvek 0 a největší prvek 1, zatímco otevřený interval  $(0, 1)$  nemá ani nejmenší, ani největší prvek.

Další příklad ukazuje, že když něco může být libovolně velké, ještě to neznamená, že to může být nekonečné.

**Příklad.** Existuje libovolně dlouhá klesající posloupnost přirozených čísel. Pokud si usmyslíme, že chceme posloupnost délky  $n$ , sestrojíme ji coby  $n, (n-1), \dots, 2, 1$ . Naopak nekonečná klesající posloupnost  $a_0, a_1, a_2, \dots$  přirozených čísel existovat nemůže.

Dále tu máme malý paradox.

**Příklad.** Nekonečnou čtverečkovou síť lze celou obarvit dvěma barvami, šedou a bílou, tak, aby každý řádek obsahoval jen konečně mnoho šedých políček a každý sloupec jen konečně bílých políček. Lze to udělat třeba takto:



*Znázornění obarvené mřížky podle zadání*

Na druhou stranu, kdyby byly řádky omezeny konkrétním přirozeným číslem, například „v řádku může být nanejvýš 2015 šedých políček“, už by takové obarvení nešlo najít. Proč? Představme si obarvenou mřížku a z ní vyjmeme 2016 sloupečků. Pak by v každém řádku muselo být alespoň jedno bílé políčko. To je dohromady nekonečně mnoho bílých políček v konečně mnoha sloupečcích, takže by v některém sloupečku muselo být nekonečně mnoho bílých políček.

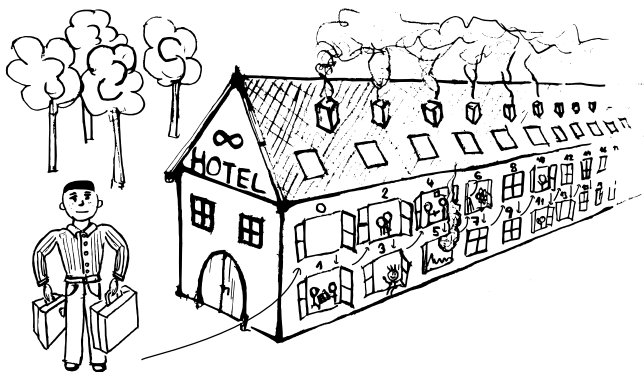
A jako poslední příklad, jak se nekonečno chová odlišně od konečna, uvedeme tradiční (leč převyprávěnou) pohádku, která v úvodu do nekonečna nesmí chybět. Dokonce můžeš najít její anglickou video verzi na stránkách [www.hotel-infinity.com](http://www.hotel-infinity.com).

## Pohádka o Hilbertově hotelu

Byl nebyl jeden turista. Ten cestoval přes devatero hor a devatero řek, až přišel do jednoho městečka. Doufal, že by si po náročné cestě mohl odpočinout v některém z tamních ubytovacích zařízení. Přišel k jednopokojovému apartmánu. „Mohl bych se tu ubytovat?“ zeptal se. „Kdepak,“ odvětil majitel, „teď tu někoho máme.“ Turista tedy šel dál, až přišel k hotelu s tisícem pokojů. „Panečku, to je velký hotel,“ pomyslí si, „tady pro mne určitě budou mít místo.“ Zálhy však byl recepci zklamán: „Bohužel, všechny pokoje jsou obsazené.“ „A nešlo by třeba ty hosty nějak přeuspořádat? Víte, cestoval jsem přes ...“ „Ani omylem,“ odvětila recepční, „jak chcete nacpat 1001 hostů do 1000 pokojů? Copak neznáte Dirichletův princip?“

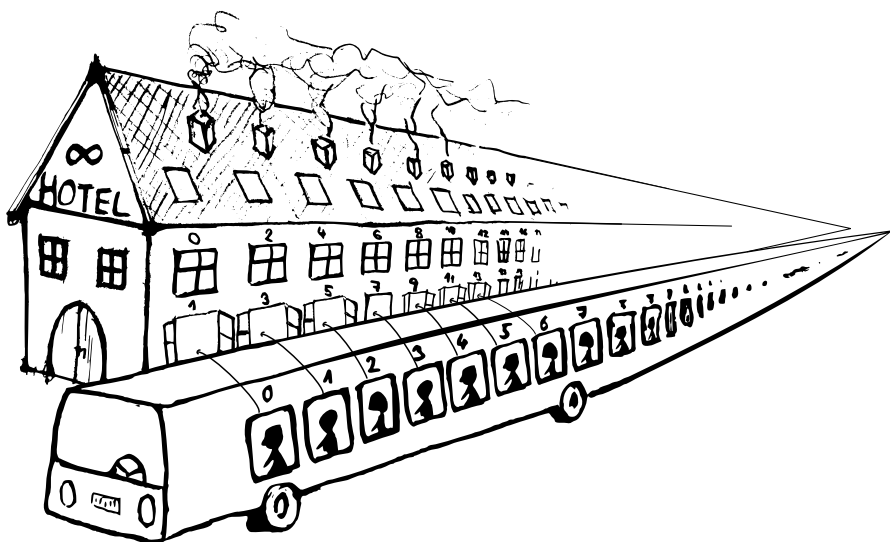


A tak šel náš cestovatel dál, až přišel k dalšímu hotelu, k Hilbertovu hotelu. Hilbertův hotel není obyčejný hotel. Je to kouzelný hotel, má totiž nekonečně mnoho pokojů. V tomto hotelu jsou pokoje číslovány přirozenými čísly, a pod každým číslem se skrývá některý pokoj. „Tady nemáte všechny pokoje obsazené, že ne?“ ujišťoval se turista při pohledu na to neskutečné množství pokojů. „Máme,“ odpověděl majitel hotelu David Hilbert, „to víte, je hlavní turistická sezona.“ „Ach jo, tak já zase půjdu,“ řekl zklamaně turista. „Ale, ale, kam byste chodil?“ Hilbert na to, „určitě tu pro vás místo najdeme.“ Vzal do ruky mikrofon a hotelovým rozhlasem zaznělo: „Pozor, pozor! Žádáme všechny hosty, aby se přesunuli do pokojů s číslem o jedna vyšším, než ve kterém právě bydlí.“ Pak se Hilbert obrátil k našemu turistovi: „No vidíte, teď se můžete nastěhovat do prázdného pokoje číslo nula a hotel bude zase plný.“ Turista věšel do svého pokoje. Spokojeně; ještě netušil, kolikrát se bude muset stěhovat.

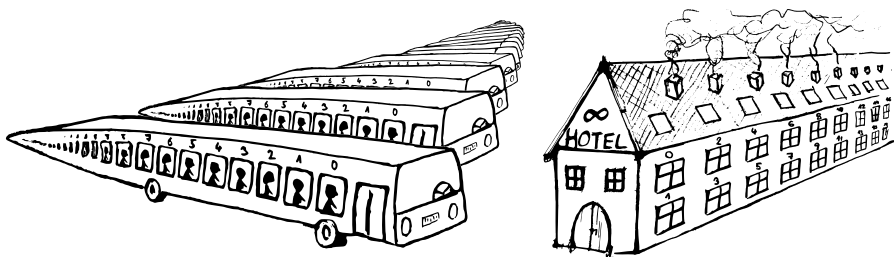


Pak k hotelu přijel autobus se sto lidmi, kteří se zde chtěli ubytovat. To pro hoteliéra Hilberta nebyl žádný problém: „Pokud číslo vašeho pokoje je  $k$ , tak se přestěhujte do čísla  $k + 100$ .“ A hned se zas uvolnilo 100 míst. Když pak ale přijel k hotelu autobus, který měl stejnou kapacitu jako Hilbertův hotel, tedy zaplněná sedadla se všemi přirozenými čísly, byl to již trochu oříšek. Není možné říct „posuňte se o nekonečno míst dál“ – neexistuje přirozené číslo, které by bylo o nekonečno větší než nula nebo jednička. Proto bylo třeba provést trochu rafinovanější operaci: „Ten, kdo bydlí

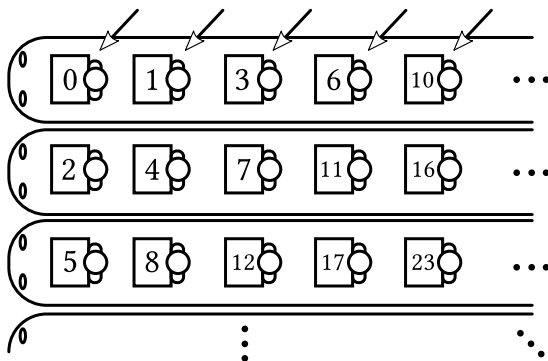
v pokoji s číslem  $k$ , se přestěhuje do pokoje s číslem  $2k$ . Ten, kdo sedí v autobuse na sedadle s číslem  $k$ , se nastěhuje do pokoje s číslem  $2k + 1$ .”



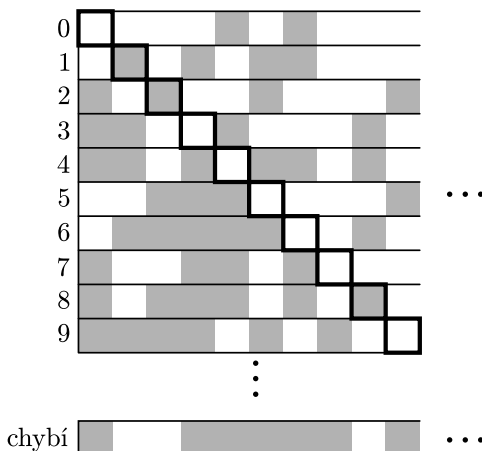
To byl šrumeč, panečku; kufry létaly, zámky cvakaly, ale nakonec se povedlo do hotelu umístit celý nekonečný autobus. A jen co autobus odjel, ani hosté se ještě pořádně neusadili, řítí se k hotelu nekonečně mnoho takových autobusů – opět číslovaných přirozenými čísly.



Ještě jsme nezminili, že David Hilbert byl (ještě než jsme jej usadili do jeho vlastní pohádky) matematik. A matematici rádi převádí problém na předchozí případ. Pokud by se podařilo rozdat lidem v autobusech lístčky s různými přirozenými čísly, jednalo by se o stejnou situaci jako v případě, kdy přijel jen jeden nekonečný autobus s očíslovanými sedadly. Zbývá otázka, jak to provést. Pokud by Hilbert začal postupně rozdávat čísla  $0, 1, 2, \dots$  lidem v autobuse 0, na cestující v ostatních autobusech by se nedostalo. Stejně tak, kdyby začal s tím, že by v každém autobuse rozdal jeden lístček cestujícímu na sedadle 0, na cestující na ostatních sedadlech by se nedostalo. Nakonec však David Hilbert přišel na to, jak lístčky rozdat: Uspořádá si cestující primárně podle součtu čísel autobusu a sedadla a sekundárně podle čísla autobusu. Jinými slovy rozdá lístčky po zpětných úhlopříčkách, jak je naznačeno na následujícím obrázku.



Pak přijel k hotelu další nekonečný autobus. Ten však neměl sedadla číselovaná přirozenými čísly, nýbrž nekonečnými posloupnostmi bílých a šedých čtverečků. To znamená, že každé sedadlo bylo označeno nějakou nekonečnou posloupností čtverečků, přičemž každé dvě posloupnosti se lišily a naopak i každá možná posloupnost připadla nějakému sedadlu. „Když jsem už ubytoval nekonečno autobusů, jeden autobus navíc nemůže být problém,“ pomyslel si Hilbert a opět se jal vymýšlet nějaký chytrý způsob, jak taková sedadla očíslovat přirozenými čísly. Přemýšlel tuze dlouho. Ubytování hosté už šli spát, byli rádi, že to stěhování utichlo, a Hilbert stále na nic nepřišel. A byl by nad tím dumal dodnes, kdyby nezjistil, že teď už opravdu prohrál. Hosté z tohoto autobusu se do Hilbertova hotelu nevejdou. Proč? Protože ať rozdá lístečky s přirozenými čísly cestujícím jakkoli, vždy se najde cestující, na kterého se nedostalo. Jednoho takového odhalíme například takto:<sup>10</sup> Nakreslíme pod sebe posloupnosti bílých a šedých čtverečků v tom pořadí, v jakém jim byly přiřazeny kartičky s přirozenými čísly. Následně se podíváme na úhlopříčku a vytvoříme z ní novou posloupnost čtverečků, kterou následně invertujeme – nahradíme bílou barvu za šedou a obráceně. Tím dostaneme novou posloupnost, která se liší od všech v tabulce (od posloupnosti s číslem  $n$  přinejmenším na pozici  $n$ ), což znamená, že příslušný cestující nedostal lísteček.



<sup>10</sup>Tento postup se běžně nazývá Cantorovou diagonální metodou.

## Porovnávání nekonečen

Z pohádky plynou dvě poučení. První poučení je, že nekonečno je hodně nafukovací, a druhé je, že přesto není nafukovací nade všechny meze. Nyní se pokusíme pohádku více zasadit do matematického rámce. Konečné množiny mezi sebou porovnávat umíme: Spočítáme, kolik prvků má první množina, kolik prvků má druhá množina a za větší prohlásíme tu množinu, jejíž počet prvků je vyšší přirozené číslo. Naším cílem je toto porovnávání množin zobecnit, aby jej bylo možné použít i pro nekonečné množiny. Klíčovým nástrojem pro porovnávání množin je zobrazení neboli funkce.

**Definice.** *Zobrazení* (nebo též *funkce*)  $f$  je předpis, který na vstupu dostane matematický objekt  $x$  a na základě něj vytvoří výstupní objekt  $f(x)$  (také nazývaný *obraz* bodu  $x$ ). Tento předpis může ale také dané  $x$  nepracovat (říkáme, že  $f(x)$  nemá smysl).

- (i) *Definiční obor* funkce  $f$  je množina objektů  $x$ , pro které má  $f(x)$  smysl. Obecně značením  $f: A \rightarrow B$  říkáme, že definičním oborem funkce  $f$  je množina  $A$  a každé  $f(a)$  leží v množině  $B$ . Slovy lze také říci, že se jedná o funkci z  $A$  do  $B$ , případně, že je tato funkce definovaná na množině  $A$ .

Symbol  $\mathbb{R}$  značí množinu všech reálných čísel. Příkladem funkce  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  může být funkce daná předpisem  $f(x) = x^2$ .

- (ii) Funkce je *prostá*, pokud dvěma různým prvkům nikdy nepřihadí stejný prvek. Například v pohádce vždy Hilbert hledal zobrazení z množiny hostů do množiny pokojů, a to navíc prosté, tedy takové, aby žádní dva hosté neskončili ve stejném pokoji.
- (iii) *Bijekce*  $f: A \rightarrow B$  je prostá funkce, pro kterou je každý prvek množiny  $B$  reprezentovaný nějakým  $f(a)$ . Jde tedy o popárování prvků množiny  $A$  s prvky množiny  $B$ .
- (iv) Uvažme funkci  $f$  definovanou na množině  $A$  a podmnožinu  $A'$  této množiny. Pak *zúžení* funkce  $f$  na množinu  $A'$  značíme  $f \upharpoonright A'$ . Jedná se o funkci, která má za definiční obor  $A'$  a chová se na něm stejně jako  $f$ . Tedy  $(f \upharpoonright A')(x) = f(x)$  pro  $x \in A'$ . Například funkce definovaná v bodě (i) není prostá, ale její zúžení na množinu kladných čísel už je prosté.
- (v) Mějme funkci  $f: A \rightarrow B$  a na obou množinách  $A$  i  $B$  mějme zavedené uspořádání (tedy definované, co znamená  $x < y$ ). Říkáme, že  $f$  je *rostoucí*, pokud zachovává toto uspořádání, tedy pro libovolné  $a_0 < a_1$  z  $A$  platí  $f(a_0) < f(a_1)$ .

Nyní již můžeme říci, jak se množiny porovnávají. Mějme množiny  $A$  a  $B$ . Říkáme, že:

- (i) Množiny  $A$  a  $B$  mají *stejnou mohutnost* (značíme  $|A| = |B|$ ), pokud existuje nějaká bijekce  $f: A \rightarrow B$ .
- (ii) Mohutnost  $A$  je *menší nebo rovna mohutnosti*  $B$  (značíme  $|A| \leq |B|$ ), pokud existuje prosté zobrazení  $f: A \rightarrow B$ .
- (iii) Mohutnost množiny  $A$  je *ostře menší* než mohutnost množiny  $B$  (značíme  $|A| < |B|$ ), pokud  $|A| \leq |B|$ , ale neplatí  $|B| \leq |A|$ .

A nakonec okolo množin definujeme ještě několik dalších pojmů.

- (i) Pokud množina  $A$  splňuje  $|A| \leq |\omega|$ , říkáme, že je *spočetná*, v opačném případě říkáme, že je *nespočetná*. Spočetná množina je tedy taková, která se vejde do Hilbertova hotelu.
- (ii) Pro dvě množiny  $A, B$  definujeme jejich *kartézský součin*  $A \times B$  jako množinu všech uspořádaných dvojic<sup>11</sup>  $(a, b)$ , kde  $a$  je prvek množiny  $A$  a  $b$  je prvek množiny  $B$ . Jsou-li obě množiny  $A, B$  konečné, je počet prvků množiny  $A \times B$  roven součinu mohutností množin  $A$  a  $B$  coby přirozených čísel.
- (iii) Pro množinu  $A$  definujeme její *potenci* (značíme  $P(A)$ ) jako množinu všech jejích podmnožin včetně prázdné množiny a samotné. Potence je tedy konkrétní příklad takového

---

<sup>11</sup>Kulatými závorkami zde budeme běžně značit uspořádané dvojice. Kdyby se mělo jednat o interval, bude to explicitně řečeno.

zobrazení, že  $\mathcal{P}(X)$  má smysl na všech množinách. Je-li množina  $A$  konečná,  $n$ -prvková, je počet prvků množiny  $\mathcal{P}(A)$  roven  $2^n$ .

V pohádce jsme popsali bijekci mezi množinou cestujících v nekonečně mnoha autobusech a  $\omega$ . Každý takový cestující je určený dvěma čísly: číslem autobusu a číslem sedadla. Jedná se tedy vlastně o bijekci z  $\omega \times \omega$  do  $\omega$ , takže platí  $|\omega \times \omega| = |\omega|$ . Z toho plyne, že sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.

**Příklad.** Množina  $S$  všech sudých přirozených čísel má stejnou mohutnost jako  $\omega$ , není tedy „dvakrát menší“, jak by se mohlo na první pohled zdát. Příslušná bijekce  $f: \omega \rightarrow S$  může být například daná předpisem  $f(x) = 2x$ . Obecně má každá nekonečná podmnožina  $X$  množiny  $\omega$  stejnou mohutnost jako  $\omega$ , tedy dá se říci, že  $\omega$  je nejmenší nekonečná množina. Příslušná bijekce  $\omega \rightarrow X$  může vypadat takto: Číslu 0 přiřaď nejmenší prvek  $X$ , číslu 1 přiřaď druhý nejmenší prvek  $X$  atd.

**Příklad.** Množina  $\mathbb{Q}$  je spočetná.<sup>12</sup>

*Důkaz.* Nejprve ukážeme, že množina  $\mathbb{Z}$  všech celých čísel je spočetná. Existuje totiž bijekce  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \omega$ , například definovaná předpisem  $f(n) = 2n$  pro přirozená čísla  $n$  a  $f(m) = -2m - 1$  pro záporná čísla  $m$ . Snadno se ověří, že takové zobrazení je skutečně bijekce.

Díky je spočetná i množina všech zlomků tvaru  $\frac{n}{1}$ , kde  $n$  je celé číslo. Stejně tak množina všech zlomků tvaru  $\frac{n}{2}$ , stejně tak množina všech zlomků tvaru  $\frac{n}{3}$  atd. Množina  $\mathbb{Q}$  je pak sjednocením těchto spočetně mnoha spočetných množin, a proto je spočetná.  $\square$

**Příklad.** *Polynom s racionálními koeficienty* je funkce  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  daná předpisem tvaru

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kde  $n$  je přirozené číslo a  $a_0, \dots, a_n$  jsou racionální čísla (říkáme jim *koeficienty*). Polynomů s racionálními koeficienty je spočetně mnoho (neboli množina těchto polynomů je spočetná).

*Důkaz.* Polynom může mít libovolný konečný počet koeficientů. Pro dané  $n$  budeme symbolem  $\mathbb{Q}^n[x]$  značit množinu všech (racionálních) polynomů pouze s koeficienty  $a_0, \dots, a_n$ . Polynomy z množiny  $\mathbb{Q}^0[x]$  mají jen koeficient  $a_0$ , a proto  $|\mathbb{Q}^0[x]| = |\mathbb{Q}| = |\omega|$ . Polynomy z množiny  $\mathbb{Q}^1[x]$  mají dva koeficienty, tedy  $|\mathbb{Q}^1[x]| = |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = |\omega \times \omega| = |\omega|$ . Dále polynomy z množiny  $\mathbb{Q}^2[x]$  mají o jeden racionální koeficient více než prvky  $\mathbb{Q}^1[x]$ , proto  $|\mathbb{Q}^2[x]| = |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^1[x]| = |\omega \times \omega| = |\omega|$ . Podobně  $|\mathbb{Q}^3[x]| = |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^2[x]| = |\omega \times \omega| = |\omega|$  a tak dále, obecně vždy odvodíme  $|\mathbb{Q}^n[x]| = |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^{n-1}[x]| = |\omega \times \omega| = |\omega|$ . Takto dostaneme, že všechny množiny  $\mathbb{Q}^n[x]$  jsou spočetné. Navíc jich je spočetně mnoho, takže je spočetné i jejich sjednocení čili množina všech polynomů s racionálními koeficienty.  $\square$

A teď nás čeká první nespočetné cvičení.

**Cvícení 1.** Označme symbolem  $\check{C}$  množinu všech nekonečných posloupností bílých a šedých čtverečků jako v pohádce. Rozmysli si, že  $|\check{C}| = |\mathcal{P}(\omega)|$ .

Obecně můžeme říci, že potence je nástroj na výrobu větších nekonečen, čímž myslíme, že pro každou množinu  $A$  platí  $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ . Důkaz se opírá o závěr pohádky, ale je obecnější a dívá se na záležitost trochu jinými pojmy, takže si jej raději předvedeme:

Pro důkaz tvrzení  $|A| < |\mathcal{P}(A)|$  potřebujeme ukázat, že existuje prostá funkce  $A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ , ale neexistuje prostá funkce  $\mathcal{P}(A) \rightarrow A$ . Funkci  $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  jednoduše sestrojíme tak, aby každému prvku přiřadila jednoprvkovou množinu obsahující právě tento prvek, tedy  $f(a) = \{a\}$ .

Druhou část dokážeme sporem – předpokládáme, že existuje prostá funkce  $g: \mathcal{P}(A) \rightarrow A$ . Sestrojíme podmnožinu  $S$  množiny  $A$  podle následujícího pravidla: Pro každou podmnožinu  $B$  množiny  $A$

---

<sup>12</sup>Symbolem  $\mathbb{Q}$  značíme množinu všech racionálních čísel neboli čísel vyjádřitelných jako podíl dvou celých čísel.

se podíváme, zda je  $g(B)$  prvkem  $B$ . Pokud není, umístíme  $g(B)$  do  $S$ , v opačném případě jej tam nedáme. Jinými slovy je  $S$  množina obrazů těch podmnožin, které neobsahují svůj obraz. Protože  $S$  je také množina, určitě má i sama obraz  $g(S)$ . Ale zdaleka je  $g(S)$  prvkem  $S$ ? Kdyby bylo prvkem  $S$ , tak bychom jej do  $S$  ale nemohli dát (ani za jinou podmnožinu, protože  $g$  je prostá), a naopak kdyby nebylo, tak bychom jej do  $S$  museli dát – dostáváme spor, a proto funkce  $g$  nemůže existovat.

Kolem porovnávání nekonečen nám zatím zůstává řada otázek.

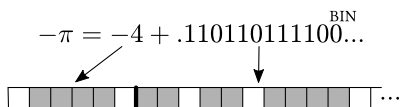
- (i) Musí vždy nastat alespoň jedna z možností  $|A| \leq |B|$  nebo  $|B| \leq |A|$ ?
- (ii) Pokud  $|A| \leq |B|$  a současně  $|B| \leq |A|$ , musí už nutně  $|A| = |B|$ ?
- (iii) Pokud platí  $|A| \leq |B|$  a současně  $|B| \leq |C|$ , musí už nutně  $|A| \leq |C|$ ? A pokud je navíc některá z původních nerovností ostrá, musí už nutně  $|A| < |C|$ ?
- (iv) Když už je  $\omega$  nejmenší nekonečná množina, je  $\mathcal{P}(\omega)$  nejmenší nespočetná množina?

A abychom se měli na co těšit, nastíníme stručně odpovědi.

- (i) Ano, ale není to lehké dokázat, bude to ukázáno ve třetím díle.
- (ii) Ano, toto bychom mohli dokázat elementárně, ale počkáme si na třetí díl, kde to ukážeme spolu s (i). Můžeš to zkusit už teď dokázat coby těžší cvičení, případně si vyhledat Schröder–Bernstein theorem na anglické Wikipedii.
- (iii) Oboje platí, rozmysli si to jako cvičení. :-)
- (iv) Tato otázka byla dlouho nevyřešená a říká se jí *hypotéza kontinua*. Nakonec se ukázalo, že hypotézu kontinua není možné dokázat ani vyvrátit; pochopit, proč tomu tak je, ale vyžaduje znalosti nad rámec tohoto seriálu. Přesto si ve druhém díle sestrojíme nejmenší nespočetnou množinu, jen nebude jasné, zda má stejnou mohutnost jako  $\mathcal{P}(\omega)$ .

**Příklad.** Označme opět symbolem  $\check{C}$  množinu všech nekonečných posloupností bílých a šedých čtverečků jako v pohádce. Popíšeme prosté zobrazení  $f: \mathbb{R} \rightarrow \check{C}$ , takže ukážeme, že  $|\mathbb{R}| \leq |\check{C}| = |\mathcal{P}(\omega)|$ . Zobrazení dostane reálné číslo  $x$ . Pak najdeme nejvyšší celé číslo, které nepřevyšuje  $x$  (dolní celá část), značíme jej  $\lfloor x \rfloor$ . Je-li číslo  $\lfloor x \rfloor$  kladné, zakreslíme takový počet šedých čtverečků, jak velké toto číslo je, a následně jeden bílý čtvereček. Je-li nekladné (nula nebo záporné), zakreslíme jeden bílý čtvereček, pak  $-\lfloor x \rfloor$  šedých čtverečků a nakonec opět jeden bílý čtvereček.

Zbývá zakódovat necelou část reálného čísla  $x$ , tedy  $x - \lfloor x \rfloor$ . To je nezáporné reálné číslo menší než jedna. Ve dvojkové soustavě<sup>13</sup> tak bude tvaru  $0.\langle \text{posloupnost nul a jedniček} \rangle$ . Nulu zapíšeme jako bílý čtvereček, jedničku jako šedý čtvereček a doplníme takto zbylé čtverečky. Snadno ověříme, že toto kódování popisuje prosté zobrazení.



## Cvičení 2.

- (i) Rozmysli si, že se v předchozím příkladu nedostane přesně na ty prvky  $\check{C}$ , které obsahují jen konečně mnoho bílých čtverečků. (Vzpomeň si, že  $0, \overline{9} = 1.$ )
- (ii) Ukaž, že množina prvků  $\check{C}$ , na které se nic nezobrazilo, je spočetná.
- (iii) Na základě předchozího bodu uprav zobrazení  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\omega)$ , aby se jednalo o bijekci.

**Cvičení 3.** Dokaž, že množina všech nekonečných posloupností přirozených čísel má stejnou mohutnost jako  $\check{C}$ . Pozor na ty prvky  $\check{C}$ , které obsahují pouze konečně mnoho čtverečků od jedné barvy.

<sup>13</sup>Pokud ses ještě nesetkal(a) s jinou číselnou soustavou než s desítkovou, můžeš se podívat například na [www.matematika.cz/prevod](http://www.matematika.cz/prevod).

Potence nám dává nástroj na výrobu větších a větších nekonečen, pojďme si s ní ještě trochu pohrát a pokusit se sestrojit co možná největší nekonečnou množinu. Platí

$$|\omega| < |\mathcal{P}(\omega)| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)))| < \dots$$

Dále můžeme sestrojit sjednocení  $A_0$  všech těchto množin. Množina  $A_0$  tedy obsahuje každý prvek, jenž se vyskytuje v některé množině tvaru

$$\underbrace{\mathcal{P}(\dots \mathcal{P}(\omega) \dots)}_n \quad \text{pro přirozené číslo } n.$$

Tato  $A_0$  je ostře větší než každá z předchozích množin. Proč? Uvažme jednu z předchozích množin  $X$ . Množina  $\mathcal{P}(X)$  je stejně jako  $X$  podmnožinou  $A_0$ , takže  $|X| < |\mathcal{P}(X)| \leq |A_0|$ , z čehož už plyne  $|X| < |A_0|$ .

Můžeme pokračovat. Máme

$$|A_0| < |\mathcal{P}(A_0)| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(A_0))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A_0)))| < \dots$$

A opět můžeme sestrojit sjednocení všech těchto množin, které nazveme  $A_1$ . Analogicky sestrojíme

$$|A_0| < |A_1| < |A_2| < |A_3| < \dots$$

Na závěr sestrojíme sjednocení  $B$  všech těchto  $A_n$ . Samozřejmě bychom dále mohli pokračovat  $|B| < |\mathcal{P}(B)| < \dots$ , ale je na čase se podívat trochu hlouběji, co se tu vlastně děje.

## Pravá podstata rekurze a indukce

Rekurzivní definice a důkazy indukcí jsi už pravděpodobně potkal(a). Jestli ne, můžeš se podívat třeba na stránku [www.matematika.cz/matematicka-indukce](http://www.matematika.cz/matematicka-indukce). Rekurzivní definice je například následující definice Fibonacciho čísel:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad (\text{pro přirozené číslo } n).$$

Prvním dvěma rovnostem říkáme *počáteční podmínka* a poslední je *rekurzivní předpis*. Indukce je technika, kterou lze využít například v důkazu následujícího tvrzení.

**Příklad.** Každé přirozené  $n$  lze rozložit na součet několika Fibonacciho čísel, jejichž indexy (v posloupnosti  $F$ ) se vždy liší alespoň o 2.

*Důkaz.* Nulu napíšeme jako součet jednoho Fibonacciho čísla. Nyní půjdeme po přirozených číslech a dokážeme platnost tvrzení pro  $1, 2, 3, 4, \dots$ . Jsme v obecném  $n$ -tém kroku, kdy vlastnost dokazujeme pro číslo  $n$ . Přitom ale víme, že pro všechna nižší čísla  $0, 1, \dots, n-1$  už jsme tuto vlastnost dokázali. Zvolme Fibonacciho číslo  $F_i$  tak, aby  $F_i \leq n$  a index  $i$  byl největší možný. Protože  $n \geq 1$ , bude  $i \geq 2$ . Navíc  $F_{i+1} > n$ , neboli

$$n - F_i < F_{i+1} - F_i = F_{i-1}.$$

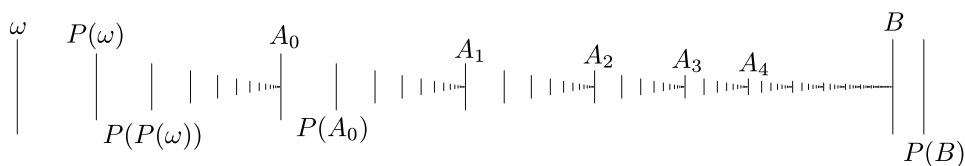
V druhé rovnosti jsme použili rekurzivní předpis pro  $F_{i+1}$ . Nyní využijeme toho, že dokazujeme úlohu postupně, takže číslo  $n - F_i$  již umíme rozložit podle zadání. Navíc tento rozklad neobsahuje číslo  $F_{i-1}$  (protože samotné rozkládané číslo je ostře menší), takže k tomuto rozkladu můžeme přidat číslo  $F_i$  a získat rozklad čísla  $n$  podle zadání.

Důkaz úlohy pro číslo 0 se nazývá *první krok indukce*. Důkaz pro obecné číslo  $n$ , kde předpokládáme, že pro všechna čísla menší než  $n$  tvrzení platí, se nazývá *indukční krok*. Využívaný předpoklad, že tvrzení platí pro všechna čísla menší než  $n$ , se nazývá *indukční předpoklad*.



**Poznámka.** V běžných středoškolských úlohách často není třeba v indukčním kroku využít toho, že je úloha dokázaná pro všechna čísla menší než  $n$ . Stačí pouze vědět, že tvrzení platí pro  $n - 1$ . Taková indukce se nazývá *slabá indukce* a v úvodních povídáních o indukci bývá vydávána za tu pravou indukci. My naopak budeme za tu pravou indukci považovat indukci, která může využívat platnost pro kterékoli předchozí hodnoty; ta se jinak nazývá *silná indukce*. Další rozdíl silné a slabé indukce spočívá v tom, že v silné indukci může být první krok považován za součást indukčního kroku, indukční předpoklad je totiž pro  $n = 0$  automaticky splněn.<sup>14</sup> V příkladu jsme vyřešili první krok zvlášť jen proto, že pro  $n = 0$  bychom nenašli nenulové  $F_i \leq n$  a  $n - F_n$  by tak nebylo ostře menší než  $n$ .

Intuitivně je tedy indukce „postupné dokazování“ a rekurze je „postupné definování“. Na konci předchozí kapitoly jsme rekurzivně definovali velkou množinu  $B$ . Jenže tato rekurze se nezastavila na přirozených číslech, ve skutečnosti šlo o rekurzi po zhruba takovýchto krocích:



Motivační obrázek

Podobným způsobem lze rozšířit i rekurzi a takto rozšířená indukce resp. rekurze se běžně nazývá *transfinitní indukce* resp. *transfinitní rekurze*. Na druhou stranu ne na každé množině můžeme dokazovat indukci. Představme si například nezáporná reálná čísla a zkusme dokázat, že každé nezáporné číslo je přirozené. První krok: Nula je přirozené číslo. Indukční krok: Uvažme kladné reálné číslo  $x$ . Číslo  $x/2$  je menší než  $x$ , takže jsme o něm již dokázali, že je přirozené. Proto je přirozený i jeho dvojnásobek, tedy  $x$ . Dokázali jsme, že každé reálné číslo je přirozené, no ne? :-) No, dobrá, je to podvod. Na reálných číslech indukce nefunguje.

Naším cílem bude pochopit, jak se poznají **množiny, na kterých indukce a rekurze funguje**. K tomu je třeba ještě trochu jiný pohled na tyto pojmy.

Začneme s indukci, která je (možná překvapivě) jednodušší. Proč tedy indukce funguje? **Indukce je jen speciální případ důkazu sporem.** Princip je následující: Pro spor předpokládáme, že dokazované tvrzení neplatí pro některé přirozené číslo, a zvolíme  $n$  nejmenší takové, pro které tvrzení neplatí. Pak tvrzení platí pro všechna  $k < n$ , a je tak splněn indukční předpoklad. Jenže potom z indukčního kroku plyne, že tvrzení platí i pro  $n$ , což je spor a důkaz je hotov.

Ukážeme to stručně na příkladu s rozkladem na Fibonacciho čísla. Předpokládejme, že existuje přirozené číslo, které nelze rozložit na Fibonacciho čísla. Zvolme nejmenší takové  $n$ . Nulu zapsat jako součet lze, takže  $n > 0$ . Dále najdeme  $F_i \leq n$  s největším možným  $i$ . Potom je  $n - F_i$  menší než  $n$ , takže  $n - F_i$  lze rozložit na součet Fibonacciho čísel dle zadání. Jenže pak přidáním  $F_i$  k tomuto rozkladu dostáváme rozklad čísla  $n$ . Dostali jsme spor s tím, že  $n$  nelze rozložit.

V celé úvaze jsme využili jedinou (klíčovou) vlastnost přirozených čísel: Mohli jsme nalézt nejmenší  $n$ , pro které tvrzení neplatilo. To nás vede k následující definici.

**Definice.** Mějme množinu  $D$ , na které máme definováno, kdy pro dvojici prvků  $a, b$  z množiny

<sup>14</sup>Žádné přirozené číslo menší než  $n = 0$  neexistuje a výroky, kde kvantifikace probíhá prázdnou množinou (například „Všichni opravdoví vodníci jsou růžoví.“) jsou v matematické logice považovány za pravdivé.

$D$  platí  $a < b$  (ekvivalentně  $b > a$ ). Řekneme, že  $D$  je *dobře uspořádaná*<sup>15</sup>, pokud platí následující tři podmínky:

- (i) Jakmile  $a < b$  a  $b < c$ , tak nutně  $a < c$ . (tranzitivita)
- (ii) Pro libovolné dva prvky  $a, b$  platí právě jedna z následujících tří možností:  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $a > b$ . (linearita)
- (iii) V každé neprázdné podmnožině  $X$  množiny  $D$  existuje nejmenší prvek, tedy  $a$  takové, že pro všechny ostatní prvky  $b$  z množiny  $X$  je  $a < b$ . (dobré uspořádání)

Pokud  $D$  splňuje pouze první dvě podmínky, říkáme, že je *lineárně uspořádaná*. Pojem dobře uspořádané množiny budeme zkracovat jako DUM.

V klasické indukci se často případ dělí na první krok a indukční krok, protože má prvek 0 poněkud odlišné vlastnosti od ostatních. V obecné DUMě máme dokonce tři typy prvků.

**Definice.** Mějme DUMu a její prvek  $x$ . Prvek  $x$  nazýváme

- (i) *nulový*, pokud je to nejmenší prvek této DUMy;
- (ii) *izolovaný*, pokud existuje jeho bezprostřední předchůdce, tedy největší prvek menší než  $x$ ;
- (iii) *limitní*, pokud nenastane ani jedna z předchozích situací.

**Příklad.**

- (i) Množina reálných čísel je lineárně uspořádaná, ale není DUM, protože nemá nejmenší prvek.
- (ii) Množina nezáporných reálných čísel je lineárně uspořádaná a má nejmenší prvek, ale není DUM, protože množina kladných reálných čísel nemá nejmenší prvek.
- (iii) Každá konečná lineárně uspořádaná množina je dobře uspořádaná.
- (iv) Množina přirozených čísel je dobře uspořádaná.
- (v) DUMu  $D$  vyobrazenou na motivačním obrázku můžeme sestavit následovně. Za množinu  $D$  zvolíme  $\omega \times \omega$ . Prvky  $(0, 0)$  a  $(0, 1)$  označíme jako *velké*, ostatní označíme jako *malé*. Uspořádání definujeme tak, že velké prvky jsou vždy větší než malé. Pokud jsou oba prvky malé nebo oba velké, porovnáme je lexikograficky<sup>16</sup>, tedy  $(a, b) < (c, d)$ , pokud  $a < c$  nebo platí současně  $a = c$  a  $b < d$ .

**Cvičení 4.** Rozděľ prvky DUMy z předchozího příkladu (v) na nulový, limitní a izolované.

**Cvičení 5.** Ukaž, že následující podmnožiny reálných čísel (s obvyklým uspořádáním) **nejso** dobře uspořádané.

- (i) Množina celých čísel,
- (ii) množina nezáporných racionálních čísel,
- (iii) uzavřený interval  $\langle 10, 20 \rangle$ ,
- (iv) Cantorova množina, tedy množina těch čísel z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ , která ve svém zápisu v trojkové soustavě obsahují jen nuly a dvojky (případně jednu jedničku na konci, protože ta je nahraditelná nulou následovanou samými dvojkami).

**Cvičení.** Rozmysli si, že když k DUMě přidáme prvek  $\infty$  větší než všechny ostatní prvky, bude se stále jednat o DUMu.<sup>17</sup>

<sup>15</sup> Jakkoli se pojem „dobře uspořádaný“ může zdát podobně provizorním jako pojmy „zajímavý“ či „pěkný“, které se občas objeví v zadání či v řešení některé z úloh, pojem „dobře uspořádaný“ (anglicky *well ordered*) je skutečně oficiální termín používaný v teorii množin.

<sup>16</sup> Porovnávat lexikograficky znamená „jako ve slovníku“.

<sup>17</sup> Značka  $\infty$  v seriálu nic konkrétního neznamená. Jde jen o pojmenování toho prvku a naznačuje, že je tento prvek nad ostatními.

**Cvičení 6.** Rozmysli si, že lineárně uspořádaná množina je DUMou právě tehdy, když v ní není možné najít nekonečnou ostře klesající posloupnost.

Dobře uspořádanou množinu jsme definovali právě tak, aby na ní šlo provádět indukci. Dále ukážeme, že na DUMách funguje i rekurze. K tomu je třeba pochopit, co je to vlastně rekurze a co je to samotný rekurzivní předpis. Stejně jako silná indukce nemusí rekurze využívat jen předchozí dvě hodnoty, ale může vzít v úvahu všechny předešlé.

**Definice.** Uvažme DUMu  $D$  a její prvek  $x$ . Pak symbolem  $D \leftarrow x$  značíme množinu všech prvků  $D$  ostře menších než  $x$ . *Rekurzivní předpis* na množině  $D$  je zobrazení, které pro každý prvek  $x$  množiny  $D$  a každou funkci definovanou na množině  $D \leftarrow x$  přiřadí další hodnotu (pro bod  $x$ ).

O funkci  $f$  říkáme, že *splňuje* rekurzivní předpis  $p$ , pokud pro všechny prvky  $x$  množiny  $D$  splňuje

$$f(x) = p(f \upharpoonright (D \leftarrow x)).$$

Slovy řečeno, uvažme zúžení funkce  $f$  jen na množinu  $D \leftarrow x$ . Pokud tuto zúženou funkci zobrazíme rekurzivním předpisem, musíme dostat  $f(x)$ .

**Příklad.** (Fibonacciho čísla) Definujeme rekurzivní předpis na  $\omega$  následovně: Uvažme přirozené číslo  $x$  a funkci  $f: (\omega \leftarrow x) \rightarrow \omega$ . Pokud je  $x \leq 1$ , ignoruje rekurzivní předpis funkci  $f$  a vrátí samotné  $x$  (počáteční podmínka). V opačném případě rekurzivní předpis vrátí hodnotu  $f(x-2) + f(x-1)$ .

Opět obecná definice rekurzivního předpisu a funkce dané rekurzivním předpisem nedává příliš jasnou odpověď na otázku: Musí funkce splňující rekurzivní předpis vždy existovat? A je vůbec dána jednoznačně? Odpověď na obě tyto otázky je kladná, ale je třeba to dokázat:

Nejprve dokážeme jednoznačnost – (transfinitní) indukci. V indukčním kroku stačí ukázat, že jakmile se dvě funkce dané rekurzivním předpisem shodují na množině  $D \leftarrow x$ , tak se shodují i v bodě  $x$ . To je ovšem jasné, protože v takovém okamžiku je hodnota v bodě  $x$  rekurzivním předpisem jednoznačně jasná.

Zbývá ukázat, že taková funkce opravdu existuje. Sestrojíme DUMu  $D'$  tak, že k DUMě  $D$  přidáme jeden další bod  $\infty$  větší než všechny původní. Stačí ukázat, že existuje funkce definovaná na  $D' \leftarrow \infty$  splňující rekurzivní předpis. Opět indukci dokážeme, že pro každé  $x$  z množiny  $D'$  existuje funkce definovaná na  $D' \leftarrow x$  splňující rekurzivní předpis. Mohou nastat tři možnosti:

- (i) Prvek  $x$  je nulový. V takovém případě je vyhovující  $f$  na  $D' \leftarrow x$  prázdná funkce definovaná na prázdné množině.
- (ii) Prvek  $x$  je izolovaný a má bezprostředního předchůdce  $y$ . V takovém případě z indukčního předpokladu existuje funkce definovaná na  $D' \leftarrow y$  splňující rekurzivní předpis. Pomocí rekurzivního předpisu tuto funkci můžeme dodefinovat v bodě  $y$  a získáváme funkci definovanou na množině  $D' \leftarrow x$  splňující rekurzivní předpis.
- (iii) Prvek  $x$  je limitní. V takovém případě existují funkce definované na  $D' \leftarrow y$  pro všechna  $y < x$ . Navíc pro každý prvek  $z < x$  najdeme  $y$  ležící ostře mezi  $z$  a  $x$ . Funkce definovaná na  $D' \leftarrow y$  tak bude definovaná v  $z$ . Už jsme si dokázali jednoznačnost funkce splňující rekurzivní předpis a tato jednoznačnost platí i na množinách  $D' \leftarrow y$ . Pro každé  $y$  je tak tato funkce jednoznačná a její hodnota v bodě  $z$  nezávisí na volbě  $y$ . Takto najdeme hodnotu pro každé  $z$  z množiny  $D' \leftarrow x$  a výsledná funkce bude splňovat rekurzivní předpis, protože jej splňují jednotlivá zúžení na  $D' \leftarrow y$ .

**Příklad.** Motivační obrázek v úvodu této kapitoly znázorňoval, jak může vypadat rekurze, která se nezastaví na přirozených číslech. Množinu, na které se tato rekurze odehrává, jsme již popsali v bodě (v) příkladu na stránce 26. Nyní popíšeme rekurzivní předpis: Uvažme prvek  $x$  množiny  $D$  a funkci  $f$  definovanou na množině  $D \leftarrow x$ . Rozebereme tři případy.

- (i) Pokud je  $x$  nulový prvek, rekurzivní předpis vrátí množinu  $\omega$ .
- (ii) Pokud je  $x$  izolovaný prvek, má bezprostředního předchůdce  $y$ . Rekurzivní předpis vrátí množinu  $\mathcal{P}(f(y))$ .

(iii) Pokud je  $x$  limitní prvek, vrátí rekurzivní předpis sjednocení všech hodnot funkce  $f$ .

## Operace na DUMách

Předpis z předchozího příkladu je možné použít zcela obecně, takže se hledání množiny s co největší mohutností přetavilo v hledání co „nejdelší“ dobře uspořádané množiny. K tomu bychom si ale měli ujasnit, jak délku dobře uspořádaných množin porovnávat.

**Definice.** Řekneme, že dvě DUMy  $A, B$  jsou *stejného typu* (značíme  $A \simeq B$ ), pokud mezi nimi existuje rostoucí bijekce  $f: A \rightarrow B$ .

Povšimněme si, že porovnávání typů je jemnější než porovnávání velikostí. Pokud je  $A \simeq B$ , tak už nutně  $|A| = |B|$ , ale obráceně to neplatí. Jak vyplne z následujícího tvrzení, kdykoli k nekonečné spočetné DUMě přidáme nový prvek větší než všechny ostatní, bude mít výsledná DUM jiný typ. Na druhou stranu bude mít stále stejnou mohutnost jako  $\omega$ .

**Tvrzení.** Nechtě  $A, B$  jsou dvě libovolné DUMy. Pak nastane právě jedna z následujících možností:

- (i)  $A \simeq B$ .
- (ii)  $A \simeq (B \leftarrow x)$  pro nějaký prvek  $x$  z  $B$ .
- (iii)  $(A \leftarrow x) \simeq B$  pro nějaký prvek  $x$  z  $A$ .

Pokud nastane možnost (ii) nebo (iii), je dokonce prvek  $x$  jednoznačně určen a ve všech třech případech je jednoznačně určena příslušná rostoucí bijekce. Pokud je navíc  $A$  jen podmnožinou DUMy  $B$ , určitě nenastane možnost (iii).

**Důkaz.** Rekurzivně sestrojíme zobrazení  $f$ , které každému prvku množiny  $A$  přiřadí prvek množiny  $B$  nebo značku STOP. Rekurzivní předpis je následující: Funkci  $f$  už máme definovanou na množině  $A \leftarrow x$ . Pokud tato funkce na každý prvek množiny  $B$  již něco zobrazila, přiřadíme prvku  $x$  značku STOP. V opačném případě přiřadíme  $x$  ten nejmenší prvek  $B$ , na který se dosud nic nezobrazilo.



Znázornění konstrukce  $f$

Z konstrukce se žádným dvěma prvům  $A$  nepřihadí stejný prvek  $B$  a mimo prvky zobrazené na STOP je  $f$  rostoucí.

Mohou nastat tři možnosti:

- (i) Žádnému prvku nebylo přiřazeno STOP a  $f: A \rightarrow B$  je rostoucí bijekce  $A \rightarrow B$ , tedy  $A \simeq B$ .
- (ii) Žádnému prvku nebylo přiřazeno STOP a  $f$  není bijekce. Můžeme zvolit nejmenší prvek  $x$  množiny  $B$ , na který se nic nezobrazilo. V takovém případě se na základě konstrukce  $f$  nic nemohlo zobrazit na žádný prvek větší než  $x$ , zatímco všechny prvky menší než  $x$  jsou z definice prvku  $x$  funkcí  $f$  pokryty. Proto je  $f$  hledaná rostoucí bijekce mezi  $A$  a  $B \leftarrow x$ .
- (iii) Některému prvku bylo přiřazeno STOP. Vezmeme nejmenší takový prvek  $x$ . Pak zúžení  $f \upharpoonright x$  je hledaná rostoucí bijekce mezi  $A \leftarrow x$  a  $B$ .

Už jsme dokázali, že nastane jedna alespoň jedna z uvedených situací, a zkonstruovali jednu konkrétní bijekci. Existuje ale i opačný proces, který z informace, která varianta (i)–(iii) nastala, prvku  $x$  a rostoucí bijekce rekonstruuje funkci  $f$  splňující popsany rekurzivní předpis: V případech (i) resp. (ii) stačí použít coby funkci  $f$  samotnou rostoucí bijekci  $A \rightarrow B$  resp.  $A \rightarrow (B \leftarrow x)$ . V případě (iii) stejně, jen je třeba dodefinovat rostoucí bijekci  $(A \leftarrow x) \rightarrow B$  na prvcích  $y \geq x$  předpisem  $f(y) = \text{STOP}$ .

Proto jsou varianta (i)–(iii), prvek  $x$  a rostoucí bijekce určeny jednoznačně funkcí  $f$  splňující rekurzivní předpis. I tato funkce je však určena jednoznačně z vlastností rekurze, takže máme dokázanou jednoznačnost.

Pro poslední doplňující fakt, že v případě, kdy  $A$  je podmnožinou  $B$ , nenastane možnost (iii), si stačí uvědomit, že v takovém případě pro každý prvek  $a$  množiny  $A$  platí  $f(a) \leq a$ .  $\square$

**Definice.** Pokud platí  $A \simeq (B \leftarrow x)$  pro nějaký prvek  $x$  z  $B$ , říkáme, že  $B$  má *větší typ* než  $A$  (značíme  $A < B$ ).

### Cvičení 7.

- (i) Uvědom si, že předchází věta říká, že pro dvě DUMy  $A, B$  nastane právě jedna z možností  $A < B$ ,  $A \simeq B$ ,  $A > B$ .
- (ii) Ukaž, že když DUMy  $A, B_0, B_1, C$  splňují  $A < B_0 < C$  a  $B_0 \simeq B_1$ , tak  $A < B_1 < C$ .
- (iii) Ukaž, že když DUMy  $A, B, C$  splňují  $A < B$  a  $B < C$ , tak  $A < C$ .
- (iv) Necht  $X$  je množina nekonečně mnoha DUM. Dokaž, že v množině  $X$  lze nalézt takovou DUMu  $A$ , že pro každou jinou DUMu  $B$  z množiny  $X$  platí  $A < B$  nebo  $A \simeq B$ .

**Cvičení 8.** Najdi DUMu  $B$  a její vlastní<sup>18</sup> podmnožinu  $A$ , aby stále platilo  $A \simeq B$ .

Nyní umíme porovnávat jednotlivé DUMy. Ještě si ukážeme dvě základní operace, jak vytvářet nové DUMy s větším typem. Základní DUM, ze které můžeme stavět, je  $\omega$ . Dále přirozené číslo  $n$  na místě DUMy budeme považovat za  $n$ -prvkovou DUMu.

**Definice.** Pro dvě DUMy  $A$  a  $B$  definujeme

- (i) DUMu  $A + B$  coby množinu všech uspořádaných dvojic tvaru  $(a, 0)$  nebo  $(b, 1)$ , kde  $a$  je z  $A$  a  $b$  je z  $B$ ;
- (ii) DUMu  $A \cdot B$  coby kartézský součin  $A \times B$ .

V obou případech definujeme porovnávání dvojic následovně: Pokud se dvojice liší na druhém místě, rozhodne o tom, která dvojice je větší, druhé místo (pro sčítání DUM uvažujeme  $0 < 1$ ). V případě shody na druhé pozici rozhodne první.

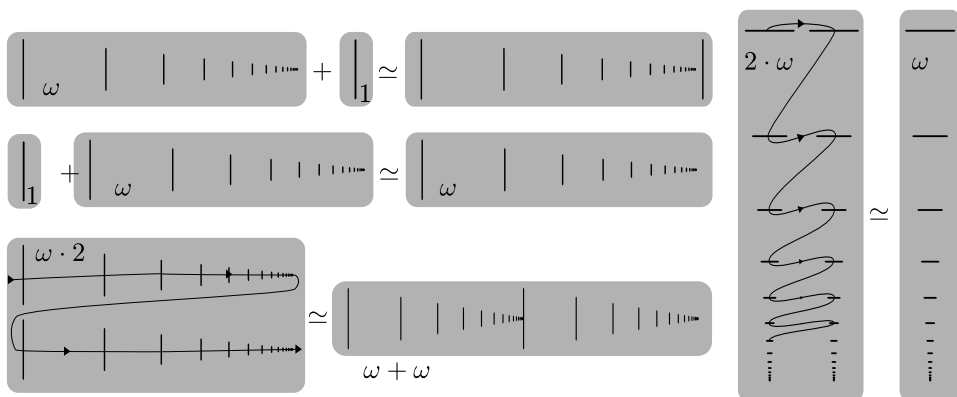
Ukážeme, že takto definované uspořádání je dobré – uvažme nějakou neprázdnou množinu dvojic a označme ji  $X$ . Množina všech možných druhých souřadnic je podmnožina DUMy, takže najdeme nejmenší druhou souřadnici  $y$ . Nyní se omezíme jen na ty dvojice z množiny  $X$ , jejichž druhá souřadnice je  $y$ . První souřadnice opět probíhá DUMu, takže najdeme nejmenší z nich,  $x$ . Dvojice  $(x, y)$  je nejmenší prvek množiny  $X$ .

Sčítání DUM odpovídá skládání DUM za sebe. Násobení  $A \cdot B$  lze ilustrovat tak, že kartézský součin  $A \times B$  (v každém řádku je  $A$ , v každém sloupci  $B$ ) přečteme po řádcích. Odpovídá to tomu, když v  $B$  nahradíme každý jednotlivý prvek kopií DUMy  $A$ .

**Příklad.** DUMu z motivačního obrázku můžeme sestrojít jako  $\omega \cdot \omega + 2$ .

**Příklad.** Na rozdíl od sčítání a násobení reálných čísel zde záleží na pořadí. Například  $\omega + 1$  odpovídá přidání nového největšího prvku do  $\omega$  a je tak  $\omega + 1 > \omega$ , dále  $\omega \cdot 2 \simeq \omega + \omega > \omega$ . Na druhou stranu  $1 + \omega \simeq \omega$  a taky  $2 \cdot \omega \simeq \omega$ . Operace jsou znázorněny na obrázku.

<sup>18</sup>Vlastní podmnožina množiny  $A$  je taková, která není rovna  $A$ . Jedná se tedy o ekvivalent pojmu ostře menší prvek v uspořádání.



**Cvičení 9.** Předchozí příklad ukazuje, že výsledek součtu či součinu může vyjít jako druhý sčítanec resp. činitel. Ukaž, že u prvního sčítance resp. činitele se toto až na degenerované případy nestane, tedy konkrétně pro DUMy  $A, B$  platí

- (i)  $A < A + B$ , pokud je  $B$  neprázdná;
- (ii)  $A < A \cdot B$ , pokud je  $B$  alespoň dvouprvková.

A to je z teorie prvního dílu vše. Zbývá se pustit do řešení úloh. Nevěš hlavu, jestli se Ti prozatím nepovedlo pochopit těžší důkazy s transfinální rekurzí – ty jsou v seriálu uvedeny spíše pro úplnost a úlohy lze řešit i bez nich. Ale pokud Tě naopak zklamalo, že seriál šel sice do nekonečna, ale zatím málo „dál“, pak právě pro Tebe je tu závěrečná kapitola.

## Čokoládová výzva

Čokoládová výzva je soutěž, jejíž výherce dostane čokoládu.<sup>19</sup> V každém díle seriálu bude jedna čokoládová výzva, tedy dohromady se bude soutěžit o tři čokolády. V příštích dvou dílech se bude jednat o co nejrychlejší vyřešení nějaké úlohy a poslání řešení e-mailem, takže doporučujeme se na další díly seriálu podívat co nejdříve. První výzva je o poznání kreativnější.

**Úloha.** Sestroj **spočetnou** DUMu s co největším typem.

Ten, jehož DUM bude největší, vyhraje čokoládu. Při vzácné shodě (ale ta snad nenastane, stačilo by přeci přičíst jedničku) čokoládu rozdělíme. Konstrukce musí být formálně jasná, ale není například potřeba dokazovat, že se jedná o DUMu (pokud to bude pravda). Svou konstrukci pošli společně se seriálovou sérií (posíláš-li poštou), případně pro ni najdeš příslušnou kolonku v submitovátce.

A v příštím díle si předvedeme nespočetnou DUMu. ;-)

<sup>19</sup>Ale nejde o soutěžní úlohu, takže za ni nelze získat žádné body.

## Návody

1. Očísluj čtverečky a vezmi množinu šedých čtverečků.
2. (ii) Představ si místo každého přirozeného čísla jeho binární zápis (včetně nekonečné posloupnosti nul na začátku). (iii) Vezmi jakoukoli spočetnou množinu, která je pokrytá, a proved' postup obrácený k tomu, když se do Hilbertova hotelu nacpal autobus.
3. Bílá políčka oddělují jednotlivé členy posloupnosti, délka souvislých šedých úseků udává velikost čísla. S případem, kdy je bílých čtverečků jen konečně mnoho, se vypořádej stejně jako v předchozím cvičení.
4.  $(0, 2)$  nulový,  $(n, 0)$  limitní pro všechna  $n$ , ostatní izolované.
5. (i) Nemá minimum, (ii), (iv) po odstranění nuly nemá minimum, (iii) otevřený interval  $(10, 20)$  nemá minimum.
6. Když existuje posloupnost, tvoří množinu bez minima. Při důkazu opačného směru máme neprázdnou množinu bez minima. Z ní vezmeme libovolný prvek  $x_0$ , to není minimum, najdeme  $x_1 < x_0$ , dále  $x_2 < x_1$  atd.
7. (iv) Vezmi libovolnou DUMu  $D$  z množiny  $X$ , porovnej ji se všemi ostatními a využij toho, že  $D$  je dobře uspořádaná.
8. Prohlédni si pozorně část o sčítání a násobení DUM.
9. Sestroj rostoucí bijekci mezi  $A$  a začátkem  $A + B$  resp  $A \cdot B$ . Věta o porovnávání pak už říká vše potřebné.

# 1. podzimní série – Bylo nebylo

VÝSLEDKOVÁ LISTINA

|         |                |                |   |             |         |             |                 |              |
|---------|----------------|----------------|---|-------------|---------|-------------|-----------------|--------------|
| 1.–2.   | Filip          | Bialas         | 3 | GOPatovPH   | ---     | 5 5 5 5 5   | 25 + <i>i</i>   | <b>25,00</b> |
| 1.–2.   | Jakub          | Löwit          | 4 | GČeskoliPH  | 3 3 3   | 5 5 5 5 5   | 25              | <b>25,00</b> |
| 3.      | Danil          | Koževnikov     | 2 | GKepleraPH  | - 3 3 4 | 5 5 5 5     | 24              | <b>24,32</b> |
| 4.      | Petr           | Gebauer        | 2 | G Mělník    | 3 3 -   | 5 5 5 5 -   | 23 + <i>i</i>   | <b>23,90</b> |
| 5.      | Pavel          | Turek          | 3 | GTomkovaOL  | 3 3 3   | 5 5 5 5 5 4 | 24 + <i>i</i>   | <b>23,67</b> |
| 6.      | Pavel          | Hudec          | 2 | GJarkovPH   | 3 3 3   | 5 5 5 -     | 21 + 2 <i>i</i> | <b>22,76</b> |
| 7.      | Lucie          | Kundralová     | 1 | G TGM Zlín  | 3 3 3   | 5 5 - 0 -   | 19              | <b>22,43</b> |
| 8.–9.   | Lucia          | Krajčoviechová | 0 | GJHroncaBA  | 3 3 -   | 5 5 - 1 -   | 17              | <b>22,17</b> |
| 8.–9.   | Václav         | Volhejn        | 3 | GKepleraPH  | 3 3 3   | 5 5 5 - -   | 21              | <b>22,17</b> |
| 10.     | Lenka          | Kopfová        | 1 | CZŠSL HnM   | 3 3 3   | 5 - 5 - -   | 19 + <i>i</i>   | <b>21,93</b> |
| 11.     | Richard        | Hladík         | 3 | GaOA MarLáz | 3 3 3   | 5 5 5 - -   | 21              | <b>21,92</b> |
| 12.     | Minh Duc       | Pham           | 1 | NPorg       | 3 3 3   | 4 5 - - -   | 18              | <b>21,88</b> |
| 13.     | Samuel         | Krajčí         | 2 | GAlejKošic  | 3 3 3   | 5 - 5 - -   | 19 + 2 <i>i</i> | <b>21,87</b> |
| 14.     | Marie          | Dohnalová      | 3 | GNadKavaPH  | 3 3 3   | 5 5 5 - -   | 21 + <i>i</i>   | <b>21,64</b> |
| 15.     | Tereza         | Vlčková        | 2 | GJarošeBO   | 3 3 3   | 5 5 2 - -   | 19              | <b>21,52</b> |
| 16.     | Jan            | Petr           | 3 | GKepleraPH  | 3 3 2   | 4 5 5 - -   | 20              | <b>21,41</b> |
| 17.–18. | Slavomír       | Hanzely        | 4 | GRaymanaPV  | 3 3 -   | 5 5 5 - -   | 21              | <b>21,00</b> |
| 17.–18. | Peter          | Súkeník        | 4 | GOKrŽilina  | 3 3 3   | 5 5 5 - 0   | 21              | <b>21,00</b> |
| 19.     | Ondřej         | Krabec         | 1 | G KomHavř   | 1 3 3   | 4 5 - - -   | 16 + <i>i</i>   | <b>20,84</b> |
| 20.     | Viktória       | Brezinová      | 1 | GAlejKošic  | 3 -     | 3 5 5 - - - | 16              | <b>20,67</b> |
| 21.     | Jáchym         | Solecký        | 3 | PORG PH     | 3 3 3   | 3 5 5 - -   | 19              | <b>20,63</b> |
| 22.     | Veronika       | Hladíková      | 3 | GMikul23PL  | 3 3 3   | 5 5 - 4 -   | 20              | <b>20,58</b> |
| 23.     | František      | Couf           | 3 | EKO GPraha  | 3 -     | 3 5 5 4 5 - | 22              | <b>20,38</b> |
| 24.     | Vojtěch        | Lanz           | 2 | GZborovPH   | 3 3 3   | 5 5 1 - -   | 19              | <b>20,36</b> |
| 25.     | Kamila         | Kyzlíková      | 2 | GZborovPH   | 3 3 3   | 4 5 - - -   | 18              | <b>20,34</b> |
| 26.     | Václav         | Steinhauser    | 2 | ZŠVranéNVI  | 3 3 3   | 3 5 5 - 0   | 19 + 2 <i>i</i> | <b>20,27</b> |
| 27.     | Filip          | Čermák         | 2 | MendelG OP  | 3 3 1   | 5 5 - - -   | 17              | <b>20,09</b> |
| 28.     | Kristína       | Szabová        | 2 | GVarŽilina  | 3 3 3   | 3 5 - - -   | 17              | <b>19,91</b> |
| 29.–30. | Victoria María | Nájares Romero | 2 | GZborovPH   | 3 3 3   | 4 5 - 3 0   | 18              | <b>19,83</b> |
| 29.–30. | Martin         | Pašen          | 3 | GraymanaPV  | 3 3 3   | 4 5 3 0 -   | 18              | <b>19,83</b> |
| 31.     | Lucien         | Šína           | 4 | PORG PH     | 3 3 3   | 5 5 5 - -   | 21              | <b>19,74</b> |
| 32.–33. | Tomáš          | Domes          | 3 | MendelG OP  | 3 3 3   | 5 5 - - -   | 19              | <b>19,61</b> |
| 32.–33. | Jaroslav       | Paidar         | 2 | SPŠMasarLI  | 3 3 3   | 3 5 - - -   | 17              | <b>19,61</b> |
| 34.     | Martina        | Kalašová       | 1 | GJHroncaBA  | 3 3 3   | - 5 - - -   | 14 + <i>i</i>   | <b>19,48</b> |
| 35.     | Kateřina       | Nová           | 3 | G Vimperk   | 3 3 3   | 5 5 - - -   | 19 + <i>i</i>   | <b>19,40</b> |
| 36.     | Tomáš          | Čelko          | 2 | GPBystrica  | 3 3 3   | 2 5 0 0 -   | 16              | <b>19,37</b> |
| 37.–38. | Jakub          | Domes          | 1 | MendelG OP  | 3 3 3   | 5 - - - -   | 14              | <b>19,28</b> |
| 37.–38. | Tomáš          | Jurčo          | 1 | G Prachati  | 3 -     | * 5 5 1 0 0 | 14              | <b>19,28</b> |
| 39.     | Marian         | Poljak         | 4 | GJŠkodyPŘ   | 3 3 -   | 5 5 5 - -   | 21              | <b>19,13</b> |
| 40.     | Jana           | Pallová        | 1 |             | 3 3 3   | - 5 - - -   | 14 - <i>i</i>   | <b>19,08</b> |



|         |              |            |   |              |                   |        |       |
|---------|--------------|------------|---|--------------|-------------------|--------|-------|
| 41.     | Denisa       | Chytilová  | 2 | GJŠkodyPŘ    | 3 3 3 5 2 0 --    | 16 + i | 19,03 |
| 42.     | Ondřej       | Motlíček   | 3 | G Šumperk    | 3 3 3 3 5 ---     | 17     | 19,00 |
| 43.     | Martin       | Bakoš      | 2 | GPBystrica   | 3 3 3 1 5 ---     | 15     | 18,59 |
| 44.-45. | Matěj        | Doležálek  | 1 | G Humpolec   | 3 - 3 5 2 ---     | 13     | 18,52 |
| 44.-45. | Eleonora     | Krůtová    | 1 | GJarošeBO    | 0 3 3 4 2 1 --    | 13     | 18,52 |
| 46.     | Radek        | Olšák      | 1 | GMensaPH     | 3 3 3 5 - - - -   | 14     | 18,47 |
| 47.     | Zuzana       | Urbanová   | 3 | GUBalvanJN   | 3 3 3 2 5 ---     | 16     | 18,15 |
| 48.     | Jan          | Šorm       | 4 | GJarošeBO    | 3 3 3 5 5 5 --    | 21     | 18,03 |
| 49.     | Adam         | Španěl     | 4 |              | 3 3 - 4 5 3 --    | 18     | 18,00 |
| 50.-52. | John Richard | Ritter     | 2 | G MasNámTŘ   | 3 3 3 5 0 0 0 0   | 14     | 17,77 |
| 50.-52. | Veronika     | Roubínová  | 2 | G Kadaň      | 3 3 3 - 5 ---     | 14     | 17,77 |
| 50.-52. | Evžen        | Wybitul    | 2 |              | 3 3 - 3 0 5 --    | 14     | 17,77 |
| 53.     | Adéla        | Kostecká   | 4 | GLesníZlín   | 3 3 3 5 5 ---     | 19     | 17,56 |
| 54.     | Vít          | Kalisz     | 4 | FSG Pirna    | 3 3 3 5 5 1 0 0   | 19     | 17,28 |
| 55.     | Jaromír      | Mielec     | 3 | GVolgogrOS   | 3 3 3 5 5 ---     | 19     | 17,04 |
| 56.     | Marek        | Murin      | 4 |              | 3 3 3 3 5 ---     | 17     | 17,00 |
| 57.     | Zuzana       | Tréglová   | 3 | G Žatec      | 3 3 - 5 5 ---     | 16     | 16,95 |
| 58.-62. | Soňa         | Burešová   | 2 | GHeyrovPH    | 3 3 3 3 0 1 --    | 13     | 16,90 |
| 58.-62. | Alexandr     | Jankov     | 2 | MatičnickGOS | 2 - 1 5 5 0 0 -   | 13     | 16,90 |
| 58.-62. | Matúš        | Komora     | 2 | GJLettrMA    | 3 1 3 3 3 0 0 0   | 13     | 16,90 |
| 58.-62. | Vendula      | Kuchyňová  | 2 | GMLerchaBO   | 3 3 3 4 - - - -   | 13     | 16,90 |
| 58.-62. | Martin       | Spíšák     | 2 | GAlejKošic   | 3 3 3 - 3 1 --    | 13     | 16,90 |
| 63.     | Adam         | Mendl      | 0 | GCoubTábor   | 3 1 3 4 - - - -   | 11     | 16,88 |
| 64.     | Filip        | Matějka    | 2 | GZborovPH    | 3 3 3 1 3 - - -   | 13     | 16,85 |
| 65.     | David        | Vojáček    | 1 | GSOŠ FrMýs   | 3 3 3 1 1 0 0 0   | 11     | 16,83 |
| 66.     | Jana         | Řežábková  | 4 | PORG PH      | 3 3 3 5 4 ---     | 18     | 16,79 |
| 67.     | Daniele      | Venier     | 3 | LSciARoiti   | 3 3 3 5 - - - -   | 14 + i | 16,61 |
| 68.     | Tomáš        | Konečný    | 3 | GJirsíkaČB   | 3 3 3 5 - 3 --    | 17 + i | 16,39 |
| 69.-70. | Adam         | Dobrovič   | 3 | GTajBanBys   | 3 3 3 - 5 ---     | 14     | 16,36 |
| 69.-70. | David        | Žáček      | 3 | GZborovPH    | 3 3 3 5 - 0 --    | 14     | 16,36 |
| 71.-73. | Kateřina     | Čížková    | 2 | G Rokycany   | 3 3 - 5 1 - - -   | 12     | 16,00 |
| 71.-73. | Matej        | Kvorka     | 2 | GŠkolDubni   | 3 3 3 - 3 - 0 -   | 12     | 16,00 |
| 71.-73. | Dominika     | Zumrová    | 2 | SPŠ PansPH   | 3 3 - 2 3 1 --    | 12     | 16,00 |
| 74.-75. | Pavel        | Havlín     | 1 | NPorg        | 3 3 3 - 1 - - -   | 10     | 15,89 |
| 74.-75. | Radovan      | Picek      | 1 | GBalbínaHK   | 3 - 3 3 1 - - -   | 10     | 15,89 |
| 76.     | Hedvika      | Ranošová   | 2 | GBudějovPH   | 3 3 3 4 - - - -   | 13     | 15,57 |
| 77.-78. | Filip        | Oplť       | 3 | GBudějovPH   | 3 3 - 2 5 -- 0    | 13     | 15,43 |
| 77.-78. | Matouš       | Trnka      | 3 | GJarošeBO    | 3 3 3 2 - 2 --    | 13     | 15,43 |
| 79.-86. | Jáchym       | Bareš      | 2 | GTomkovaOL   | 3 3 3 - 2 ---     | 11     | 15,05 |
| 79.-86. | Ondřej       | Buček      | 2 | GJarošeBO    | - 3 - 3 5 ---     | 11     | 15,05 |
| 79.-86. | Petr         | Ježek      | 2 | GBNěmcovHK   | 3 3 2 3 - - 0 -   | 11     | 15,05 |
| 79.-86. | Hana         | Jirovská   | 2 | NPorg        | 3 3 3 - 2 ---     | 11     | 15,05 |
| 79.-86. | Vojtěch      | Lengál     | 2 | GZborovPH    | 3 3 3 2 - - - -   | 11     | 15,05 |
| 79.-86. | Jan          | Lindauer   | 2 | PČGKarVary   | 3 3 - 1 4 - 0 0   | 11     | 15,05 |
| 79.-86. | Pavel        | Nedělník   | 2 | GJarošeBO    | 3 3 2 3 0 ---     | 11     | 15,05 |
| 79.-86. | Matúš        | Varhaník   | 2 | G Bytča      | 3 3 3 2 0 - 0 -   | 11     | 15,05 |
| 87.     | Jan          | Sedlák     | 4 | GOPavla PH   | 3 3 3 2 4 1 - 0   | 15     | 15,00 |
| 88.-91. | Ondřej       | Bursa      | 1 | GTNovákBO    | 3 3 3 - - 0 - 9   |        | 14,89 |
| 88.-91. | Kateřina     | Charvátová | 1 | GBNěmcovHK   | 3 2 1 2 1 - 0 - 9 |        | 14,89 |
| 88.-91. | Šimon        | Chvátil    | 1 | GBNěmcovHK   | 3 3 - 3 0 - 0 0 9 |        | 14,89 |
| 88.-91. | Šárka        | Míchalová  | 1 | G Kralupy    | 3 3 1 1 0 1 -- 9  |        | 14,89 |
| 92.     | Marián       | Okál       | 2 | SSNvh        | 3 3 3 2 - - - -   | 11     | 14,87 |

|           |          |               |   |              |                 |         |       |
|-----------|----------|---------------|---|--------------|-----------------|---------|-------|
| 93.       | Daniel   | Pišťák        | 4 | GZborovPH    | 3 3 3 5 5 ---   | 19      | 14,51 |
| 94.       | Marek    | Pospíšil      | 3 | GJatečníÚL   | 3 -- 3 5 1 0 -  | 12      | 14,47 |
| 95.       | Michal   | Töpfer        | 3 | GJPekareMB   | 3 3 3 3 1 ---   | 13      | 14,16 |
| 96.-100.  | Veronika | Blovská       | 2 | GMikul23PL   | 3 3 3 1 0 ---   | 10      | 14,05 |
| 96.-100.  | Andrej   | Horník        | 2 | GAnMeTr      | 2 3 3 2 ----    | 10      | 14,05 |
| 96.-100.  | David    | Krajiček      | 2 | BG Ostrava   | 3 3 1 2 1 0 --  | 10      | 14,05 |
| 96.-100.  | Daniel   | Ridzoň        | 2 | GKepleraPH   | 3 3 3 1 ----    | 10      | 14,05 |
| 96.-100.  | Anna     | Šírová        | 2 | GJilemnice   | 3 3 3 1 ----    | 10      | 14,05 |
| 101.      | Henrieta | Michelová     | 4 | GAlejKošic   | 3 3 3 - 5 ----  | 14      | 14,00 |
| 102.-105. | Pavel    | Čácha         | 1 | GMikul23PL   | 3 3 2 ----      | 8       | 13,81 |
| 102.-105. | Matěj    | Kraft         | 1 | GMikul23PL   | 3 3 2 ----      | 8       | 13,81 |
| 102.-105. | Zdeněk   | Vostřel       | 1 |              | 3 0 - - 5 - 0 - | 8       | 13,81 |
| 102.-105. | Martin   | Zimen         | 1 | GJMasar JI   | 3 3 - 2 0 -- 0  | 8       | 13,81 |
| 106.      | Vladimír | Lukačko       | 2 | GVarŽilina   | 3 3 3 - - 1 --  | 10      | 13,63 |
| 107.      | Dominik  | Krasula       | 3 | G Krnov      | 3 3 - 5 5 ----  | 16      | 13,57 |
| 108.-110. | Jiří     | Česka         | 3 | CMGPProstěj  | 3 3 - 5 ----    | 11      | 13,47 |
| 108.-110. | Ľubica   | Hladká        | 3 | GTajBanBys   | 3 3 3 - 2 ---   | 11      | 13,47 |
| 108.-110. | Jan      | Šuta          | 3 | GJŠkodyPŘ    | 3 3 - 5 ----    | 11      | 13,47 |
| 111.      | Peter    | Macko         | 4 | GJHroncaBA   | 3 3 3 - 5 ----  | 14 - 2i | 13,46 |
| 112.      | Aleš     | Krčil         | 3 | G Humpolec   | 3 3 3 3 ---- 0  | 12      | 13,16 |
| 113.-114. | Anna     | Musilová      | 0 | PORG PH      | 3 - 3 ----      | 6       | 13,03 |
| 113.-114. | Jakub    | Ucháč         | 0 | ZŠVranéNVl   | 3 3 ----        | 6       | 13,03 |
| 115.-118. | Vojtěch  | Janků         | 4 | CMGPGBrno    | 3 3 - 2 5 ---   | 13      | 13,00 |
| 115.-118. | Nikola   | Kalábová      | 2 | FSG Pirna    | 3 3 0 3 0 0 0 0 | 9       | 13,00 |
| 115.-118. | Lenka    | Vincenová     | 2 | GTomkovaOL   | 0 3 0 4 2 ---   | 9       | 13,00 |
| 115.-118. | Ákos     | Záhorský      | 2 | G VJM Šahy   | 3 3 3 ----      | 9       | 13,00 |
| 119.      | Alžběta  | Neubauerová   | 2 | GNadKavaPH   | 3 3 3 ----      | 9 + i   | 12,95 |
| 120.-122. | Kristýna | Lhoťanová     | 1 | G RožnRadh   | 3 0 - 2 1 1 0 0 | 7       | 12,64 |
| 120.-122. | Alžběta  | Manová        | 1 | G UherBrod   | 3 3 - - - 1 -   | 7       | 12,64 |
| 120.-122. | Dominika | Mokroszová    | 1 | G FrýdČTěš   | 3 - 3 1 0 - 0 - | 7       | 12,64 |
| 123.      | David    | Neugebauer    | 3 | SlezkéG OP   | 3 3 - 2 0 2 0 - | 10      | 12,45 |
| 124.      | Daniel   | Kopf          | 4 | SlezkéG OP   | 3 3 3 5 ----    | 14      | 12,27 |
| 125.      | Adam     | Doubrava      | 0 | GMasarykKM   | 3 - - 1 2 ---   | 6       | 12,09 |
| 126.-127. | Valerie  | Skopalová     | 4 | G VysMýto    | 3 3 3 2 1 1 0 0 | 12      | 12,00 |
| 126.-127. | Matěj    | Židek         | 4 | G FrýdlNOs   | 3 3 3 3 ----    | 12      | 12,00 |
| 128.-129. | Adéla    | Seidelmannová | 2 | SPŠtechRychn | 3 3 0 2 - - 0 - | 8       | 11,89 |
| 128.-129. | Radek    | Wagner        | 2 | CírkJGPležeň | 3 - 2 2 1 0 --  | 8       | 11,89 |
| 130.      | Štefan   | Hollán        | 2 | G Bytča      | 3 3 - 2 - - 0 0 | 8       | 11,54 |
| 131.-133. | Matěj    | Coufal        | 3 | G HavlBrod   | 3 3 0 2 0 1 0 0 | 9       | 11,39 |
| 131.-133. | Marie    | Freibergová   | 3 | G Děčín      | 3 0 - 3 2 1 --  | 9       | 11,39 |
| 131.-133. | Dan      | Raffl         | 3 | GVoděraPH    | 3 3 0 2 1 0 --  | 9       | 11,39 |
| 134.-154. | Michal   | Chudoba       | 1 | GLitoměřPH   | 3 3 ----        | 6       | 11,38 |
| 134.-154. | Jakub    | Čurda         | 1 | PORG PH      | 3 3 ----        | 6       | 11,38 |
| 134.-154. | Vítek    | Dragoun       | 1 | GMikul23PL   | 3 3 ----        | 6       | 11,38 |
| 134.-154. | Tomáš    | Drobil        | 1 | G Dačice     | 3 3 ----        | 0 6     | 11,38 |
| 134.-154. | Vit      | Gaďurek       | 1 | PORG PH      | 3 3 ----        | 6       | 11,38 |
| 134.-154. | Adam     | Hlas          | 1 | GMikul23PL   | 3 3 ----        | 6       | 11,38 |
| 134.-154. | Klára    | Holešovská    | 1 | GJNerudyPH   | 3 3 - - - 0 0 0 | 6       | 11,38 |
| 134.-154. | Denisa   | Jandová       | 1 | GMikul23PL   | 3 3 ----        | 6       | 11,38 |
| 134.-154. | Dominika | Jurčová       | 1 | G Prachati   | 3 - * 1 1 1 0 0 | 6       | 11,38 |
| 134.-154. | Jakub    | Kropš         | 1 |              | 3 3 ----        | 6       | 11,38 |
| 134.-154. | Tereza   | Lukášová      | 1 | GMikul23PL   | 3 3 ----        | 6       | 11,38 |

|           |            |                |   |               |                 |        |       |
|-----------|------------|----------------|---|---------------|-----------------|--------|-------|
| 134.–154. | Monika     | Machalová      | 1 | GJHroncaBA    | – 3 3 – – – – – | 6      | 11,38 |
| 134.–154. | Filip      | Müller         | 1 | GMikul23PL    | 3 3 – – – – –   | 6      | 11,38 |
| 134.–154. | Radim      | Novotný        | 1 | GMikul23PL    | 3 3 – – – – –   | 6      | 11,38 |
| 134.–154. | Kateřina   | Pařízková      | 1 | MatičnickýGOS | 3 3 – – 0 – – 0 | 6      | 11,38 |
| 134.–154. | Tomáš      | Pishovaký      | 1 | RGZS Prost    | 3 1 1 1 0 0 0   | – 6    | 11,38 |
| 134.–154. | Lubomír    | Smrček         | 1 |               | 3 3 – – – – –   | 6      | 11,38 |
| 134.–154. | Veronika   | Straková       | 1 | G Benešov     | 3 3 – – 0 – – – | 6      | 11,38 |
| 134.–154. | Monika     | Suchá          | 1 | GMikul23PL    | 3 3 – – – – –   | 6      | 11,38 |
| 134.–154. | Antonín    | Štrpka         | 1 | G Šumperk     | 3 3 – – – – –   | 6      | 11,38 |
| 134.–154. | Kateřina   | Žáčková        | 1 | SlovanG OL    | 3 3 – – – – –   | 6      | 11,38 |
| 155.      | Samuel     | Karaba         | 2 | SSNvh         | 3 – – 3 2 – – – | 8      | 11,31 |
| 156.      | Daniel     | Borák          | 4 |               | 3 3 – 2 – 3 – – | 11     | 11,00 |
| 157.      | Ondřej     | Dušek          | 2 | PORG PH       | 3 3 0 1 – – 0 0 | 7      | 10,72 |
| 158.      | Marco      | Souza de Joode | 0 |               | 0 0 – 3 – 1 0 0 | 4 + i  | 10,54 |
| 159.      | Marek      | Malý           | 3 | G Neratov     | 3 3 – 3 – – – – | 9      | 10,50 |
| 160.–164. | Tomáš      | Hampl          | 3 | GDukelBR      | 3 3 0 1 – 1 0 0 | 8      | 10,30 |
| 160.–164. | Samuel     | Hrubý          | 3 | GFraŽilina    | 3 3 2 – 0 – 0 – | 8      | 10,30 |
| 160.–164. | Vojtěch    | Jilek          | 3 | VOŠKutHora    | 3 3 2 – – – – – | 8      | 10,30 |
| 160.–164. | Jan        | Klásek         | 3 | SlovanG OL    | 2 3 3 – – 0 0 – | 8      | 10,30 |
| 160.–164. | Barbora    | Lišková        | 3 | GJPekařeMB    | 3 – – 2 3 – – – | 8      | 10,30 |
| 165.      | Anh Minh   | Tran           | 4 | GJarošeBO     | 3 – 3 4 – – – – | 10 + i | 10,27 |
| 166.–168. | Hana       | Kučerová       | 1 | GKřenováBO    | 3 – 0 1 0 1 0 – | 5      | 10,00 |
| 166.–168. | Linh Giang | Tran           | 1 | GMikul23PL    | 2 3 – – – – 0 – | 5      | 10,00 |
| 166.–168. | Petr       | Zahradník      | 1 | GŠmejkalÚL    | – – 3 1 1 0 0   | 5      | 10,00 |
| 169.      | Ondřej     | Svoboda        | 3 | GJarošeBO     | 3 3 2 – – – – – | 8      | 9,64  |
| 170.–172. | Šárka      | Altmanová      | 2 | G Rokycany    | 3 3 – – – 0 – – | 6      | 9,48  |
| 170.–172. | Barbora    | Hálková        | 2 | SPŠStav LI    | 3 3 – – – – –   | 6      | 9,48  |
| 170.–172. | Jakub      | Zápotocký      | 2 | GOpátovPH     | 0 0 3 – 2 1 – – | 6      | 9,48  |
| 173.      | Jakub      | Novotný        | 3 | GTNovákBO     | 3 1 3 – – – – – | 7      | 9,17  |
| 174.–175. | Michaela   | Brabcová       | 4 | G Jírov ČB    | 3 3 – 3 – – – – | 9      | 9,00  |
| 174.–175. | Adam       | Kutnar         | 4 | NPorg         | 3 3 3 – – – – – | 9      | 9,00  |
| 176.      | Filip      | Chudoba        | 2 | PORG PH       | 3 3 – – – – –   | 6      | 8,99  |
| 177.–180. | Jan        | Česnek         | 1 | GJarošeBO     | 3 0 – 1 – – – – | 4      | 8,48  |
| 177.–180. | Ha Mi      | Dao            | 1 | GŠmejkalÚL    | 1 3 – – – – –   | 4      | 8,48  |
| 177.–180. | Vadim      | Kablukov       | 1 | GBNěmcovHK    | 3 0 0 1 – – 0 – | 4      | 8,48  |
| 177.–180. | Veronika   | Řehulková      | 1 | MendelG OP    | 3 – – 1 – – 0 0 | 4      | 8,48  |
| 181.      | Tomáš      | Flidr          | 0 | GMasarykKM    | 3 – – – – – –   | 3      | 8,34  |
| 182.      | Marie      | Kaiserová      | 2 | CírkJPLzeň    | 3 – – 2 – – – – | 5      | 8,17  |
| 183.–186. | Jan        | Dopita         | 3 | GBudějovPH    | 3 3 – – – 0 – – | 6      | 8,00  |
| 183.–186. | Jan        | Hrůza          | 3 | G Kadaň       | 3 3 – – – – –   | 6      | 8,00  |
| 183.–186. | Leoš       | Smetana        | 3 | G Jaroměř     | – 3 – – 2 1 – – | 6      | 8,00  |
| 183.–186. | Filip      | Strakoš        | 3 | G TGM Zlín    | – 3 – 2 – 1 – – | 6      | 8,00  |
| 187.      | Lukáš      | Belza          | 4 |               | 0 3 1 2 1 – – – | 7      | 7,00  |
| 188.–196. | Alexander  | Csizmár        | 1 | GMikul23PL    | 0 3 – – – – –   | 3      | 6,79  |
| 188.–196. | Šimon      | Hutař          | 1 | PORG PH       | – 3 – – – – –   | 3      | 6,79  |
| 188.–196. | Anna       | Mírková        | 1 | G LPíka PL    | 3 – – – – – –   | 3      | 6,79  |
| 188.–196. | Filip      | Pastierovič    | 3 | G LŠtúraZV    | 3 0 0 1 – 1 – – | 5      | 6,79  |
| 188.–196. | Tereza     | Prokopová      | 1 | GJHroncaBA    | 0 3 – – – – –   | 3      | 6,79  |
| 188.–196. | Timur      | Sibgatullin    | 1 | PČGKarVary    | 3 – – – – 0 0 – | 3      | 6,79  |
| 188.–196. | Kateřina   | Šauerová       | 1 | GPSJazykHK    | 3 – 0 – – – – – | 3      | 6,79  |
| 188.–196. | David      | Šnajdr         | 1 | GMikul23PL    | 3 – – – – – –   | 3      | 6,79  |
| 188.–196. | Andrej     | Židek          | 1 | GJKTyła HK    | 3 – – – – – –   | 3      | 6,79  |

|           |          |              |   |             |                   |      |
|-----------|----------|--------------|---|-------------|-------------------|------|
| 197.–198. | Martina  | Šmehylová    | 2 | GHlinŽilina | 3 0 – – 0 1 0 – 4 | 6,76 |
| 197.–198. | Krystyna | Waniowa      | 2 | G HavlČTěš  | 3 – – 1 – – – – 4 | 6,76 |
| 199.      | Anežka   | Soukupová    | 2 | SPŠchemBrno | 2 0 0 1 0 1 – – 4 | 6,59 |
| 200.–203. | Agáta    | Brozová      | 4 |             | 3 3 – – – – – 0 6 | 6,00 |
| 200.–203. | Haštal   | Hapka        | 4 | GBudějovPH  | 3 3 – – – – – 6   | 6,00 |
| 200.–203. | Erik     | Kočandrle    | 4 |             | 3 3 – – – – – 6   | 6,00 |
| 200.–203. | Lukáš    | Vik          | 4 |             | 3 3 – – – – – 6   | 6,00 |
| 204.      | Tomáš    | Faigl        | 2 | GDašickáPA  | 0 3 – – – – – 3   | 5,27 |
| 205.      | Jakub    | Ševčík       | 4 | GKukučPopr  | 3 3 – – – – 0 – 6 | 5,22 |
| 206.      | Barbora  | Mouleová     | 2 | G Plasy     | 3 – – – – – 3     | 5,07 |
| 207.      | Nodari   | Gogatishvili | 2 | GZborovPH   | 3 – – – – – 3     | 4,93 |
| 208.–209. | Matěj    | Šarboch      | 3 | GKepleraPH  | 3 – – – – – 3     | 4,23 |
| 208.–209. | Kateřina | Škorvánková  | 3 | G Rokycany  | 3 – – – – – 3     | 4,23 |
| 210.      | Eva      | Klimentová   | 3 | GJarošeBO   | 3 – – – – – 3     | 4,16 |
| 211.      | Kateřina | Jakubíková   | 4 | GKomensV    | 3 0 – 1 0 0 – – 4 | 4,00 |
| 212.      | Anh      | Le Hoang     | 4 | GJarošeBO   | 1 0 – – – 4 – – 5 | 3,73 |
| 213.      | Zuzana   | Svobodová    | 4 | G FrýdlNOs  | 3 3 – – – – – 6   | 3,64 |
| 214.–216. | Zsófia   | Kálosi       | 4 | GHSelyhoKM  | 3 – – – – – 3     | 3,00 |
| 214.–216. | Jana     | Menšíková    | 4 |             | 3 – – – – – 3     | 3,00 |
| 214.–216. | Michal   | Porubsky     | 4 | GCyMeNitra  | 3 – – – – – 3     | 3,00 |
| 217.      | Jana     | Řičicová     | 3 | GCoubTábor  | 0 – 1 1 0 – 0 – 2 | 2,88 |
| 218.      | Jan      | Dittrich     | 4 | GJarošeBO   | 3 – – – – – 3     | 2,57 |
| 219.      | Veronika | Úlovcová     | 3 | CírkgPlzeň  | 1 – – – – – 1     | 1,47 |
| 220.      | Přemysl  | Kopečný      | 4 | ČRG ČesBud' | 1 0 0 – 0 0 0 – 1 | 1,00 |
| 221.      | Oliver   | Šmakal       | 0 | BGJirsíkČB  | 0 0 – 0 – 0 0 – 0 | 0,00 |

**adresa:** Korespondenční seminář  
KAM MFF UK  
Malostranské náměstí 25  
118 00 Praha 1  
**web:** <http://mks.mff.cuni.cz/>  
**e-mail:** [mks@mff.cuni.cz](mailto:mks@mff.cuni.cz)