Finální myšmaš

4. JARNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 4. KVĚTNA 2015

V této sérii nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, ale podle témat (v rámci každého tématu je jedna úloha snazší a jedna obtížnější). Pozor, počítají se body za všechny úlohy!

ÚLOHA 1.

(a) Anička obarvila každý z bodů roviny červeně, zeleně nebo modře, přičemž každou barvu použila alespoň jednou. Dokažte, že v této rovině existuje pravoúhlý trojúhelník s různobarevnými vrcholy. (2 BODY)

(b) Bára obarvila každý bod ležící na obvodu rovnostranného trojúhelníka jednou ze dvou barev. Dokažte, že mezi nimi jsou tři stejně barevné vrcholy pravoúhlého trojúhelníka. (3 BODY)

ÚLOHA 2.

(a) Kružnice k, l a m mají po dvou vnější dotyk, přičemž k a l se dotýkají v bodě Q. Přímky procházející bodem Q a zbylými dvěma body dotyku protínají kružnici m podruhé v bodech X a Y. Ukažte, že XY je její průměr. (2 BODY)

(b) Je dána kružnice k nad průměrem AB a body C, D ležící na stejném oblouku AB. Průsečík tečen ke k v bodech C a D označme E, průsečík přímek AC a BD označme F a konečně nechť G značí průsečík přímek EF a AB. Dokažte, že body E, C, G, D leží na jedné kružnici. (3 BODY)

ÚLOHA 3.

(a) Tonda dostal od Štěpána k narozeninám kartičky se všemi přirozenými čísly od 11111 do 99999. Sedl si ke stolu a nějak za sebe všechna čísla uspořádal, čímž mu vzniklo dlouhatánské číslo dělitelné číslem 11111. „To je ale náhoda!“ řekl si Tonda, ale Štěpán mu sebevědomě oponoval: „Žádná náhoda, to by se stalo při libovolném uspořádání kartiček.“ Dokažte, že měl Štěpán pravdu. (2 BODY)

(b) Tonda si pro každé $n \in \{1, \ldots, 2015\}$ označil p_n nejmenšího prvočíselného dělitele čísla $n^8 + 1$ a chtěl spočítat jejich součet $p_1 + p_2 + \cdots + p_{2015}$. Štěpán prohlásil, že s tím mu nepomůže, ale jako informatik dokáže určit poslední cifru tohoto součtu v šestnáctkové soustavě. Najděte ji dřív, než to Štěpán naprogramuje. (3 BODY)

ÚLOHA 4.

(a) Reálné číslo x splňuje rovnost $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$. Spočítejte hodnotu $\sin 2x$. (2 BODY)

(b) Ukažte, že

$$\frac{2 \sin 2^\circ + 4 \sin 4^\circ + \cdots + 180 \sin 180^\circ}{90} = \operatorname{cotg} 1^\circ.$$

(3 BODY)

Úloha 5.

(a) Kolem kulatého stolu bylo před rautem přichystáno dvacet židlí. Papalášů však dorazilo více, než se čekalo, takže pak na každé židli seděli dva, a navíc byli každý z jiné politické strany. Situace byla prohlášena za neúnosnou a každou židli musel jeden člověk opustit. Mohli to vždy provést tak, aby pak dva spolustraníci nikdy neseděli na sousedních židlích? (2 body)

(b) V PraSestánu mají poslanci dvou politických stran zajímavý způsob hlasování: ve sněmovně stojí řada n židlí a na ně si střídavě sedají poslanci těchto stran, ovšem tak, že nikdy nesmějí sedět dva poslanci stejné strany vedle sebe (aby si místo práce nepovídali). Pokud již některá ze stran nemůže usadit žádného svého poslance, prohrává tak toto hlasování. V závislosti na n určete, která ze stran (při optimálním postupu) hlasování vyhraje. (3 body)

Úloha 6.

(a) Víme, že polynom $x^2 - (a+b+c)x + (ab+bc+ca)$ nemá reálný kořen. Dokažte, že čísla a, b a c jsou všechna nenulová a mají stejné znaménko. (2 body)

(b) Polynom $x^3 + ax^2 + bx + c$ má tři reálné kořeny a platí $a+b+c \in \langle -2, 0 \rangle$. Dokažte, že pak některý z kořenů leží v intervalu $\langle 0, 2 \rangle$. (3 body)

Úloha 7.

(a) Jupiter a Zeus si spolu měří síly. Jupiter připraví šestnáct hvězd uspořádaných do čtvercové mřížky 4×4, přičemž některé z hvězd jsou rozsvícené a některé ne. Zeus pak může zvolit libovolný řádek, sloupec nebo diagonálu (celkem existuje čtrnáct diagonál, jejich délka se pohybuje od jedné do čtyř) a změnit stav všech příslušných hvězd (zhasnuté rozsvítí a naopak). To může opakovat libovolně dlouho. Zeus by chtěl, aby nakonec všechny hvězdy svítily. Jaké počáteční stavy může Jupiter zvolit, aby Diovi tuto radost nedopřál? (2 body)

(b) Zeus si hraje se svým modelem vesmíru. Jedná se o rovinu s dírami v mřížových bodech[1], do kterých se dají umisťovat hvězdy. Sotva na ni umístil dvě hvězdy, došlo mu, že je chtěl umístit naopak. Je mu ale trapné hvězdy sundat, a tak může vždy jen jednu z hvězd otočit kolem druhé tak, aby opět zapadla do nějakého mřížového bodu. Může takto Zeus hvězdy prohodit v konečném počtu tahů? (3 body)

[1] Mřížovými body myslíme ty body roviny, které mají celočíselné souřadnice.