Hvězdy a souhvězdí

3. jarní série Termín odeslání: 13. dubna 2015

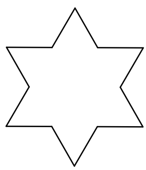
Není-li řečeno jinak, představujeme si hvězdy (a planety) jako body a všechna jejich uskupení chápeme jako rovinné útvary.

Úloha 1. (3 body)

Na hvězdné obloze existují tři souhvězdí, z nichž každé je tvořeno trojicí hvězd (každá hvězda patří pouze do jednoho souhvězdí). Víme, že uvnitř každého ze tří trojúhelníků (souhvězdí) najdeme z libovolného jiného souhvězdí právě jednu hvězdu. Nakreslete nějaké možné rozmístění těchto devíti hvězd na obloze.

Úloha 2. (3 body)

David se rozhodl vydláždit celou rovinu pomocí Davidových hvězd (viz obrázek).



Brzy ale zjistil, že se mu nedaří klást je vedle sebe tak, aby nevznikaly mezery. Proto některé z dosud nepoložených dlaždiček rozlámal, každou na dvanáct stejných rovnostranných trojúhelníků. Těmi chtěl své dláždění doplnit tak, aby byla pokrytá celá rovina, aby se žádné dlaždice nepřekrývaly a zároveň aby spolu žádné dva trojúhelníky nesousedily hranou. Mohlo se mu to podařit?

Úloha 3. (3 body)

Honza měl na své hvězdné mapě sto hvězd a změřil vzdálenost mezi každými dvěma z nich. Pak se rozhodl, že dá Tomášovi hádanku, a prozradil mu všechny vzdálenosti, které změřil, až na jednu. Prozradil mu i to, ke které dvojici hvězd patří která vzdálenost. Tomášovým úkolem bylo uhodnout zbývající vzdálenost. Po dlouhém uvažování Tomáš zjistil, že hledanou vzdálenost není schopen určit jednoznačně. Jak se to mohlo stát?

Úloha 4. (5 bodů)

V Mléčné dráze se nachází konečný počet hvězd. Dokažte, že umíme najít šest takových, že když uvažujeme šestici kružnic procházejících Zemí se středy v příslušných hvězdách, bude každá hvězda Mléčné dráhy ležet uvnitř některé kružnice.

Úloha 5. (5 bodů)

Astronomové chtějí vybrat skupinu hvězd, které pojmenují po slavných matematicích. Každý astronom hlasuje pro deset hvězd a bude spokojen, když alespoň jedna z jeho navrhovaných bude zvolena. Je známo, že pro každou šestici astronomů existuje dvojice hvězd, při jejímž zvolení bude všech šest astronomů spokojeno. Dokažte, že lze zvolit skupinu o deseti hvězdách tak, aby byli spokojení všichni astronomové.

Úloha 6. (5 bodů)

Galaxii s konečným počtem hvězd nazveme *pravidelnou*, pokud pro každé tři její hvězdy existuje hvězda, která spolu s nimi tvoří nedegenerovaný rovnoběžník[1]. Najděte všechny možné počty hvězd pravidelné galaxie.

Úloha 7. (5 bodů)

Každá hvězda má nějakou svítivost. Rovinné souhvězdí se nazývá *ostré*, pokud žádné jeho tři hvězdy neleží v přímce a žádné jeho tři jeho hvězdy se stejnými ani s po dvou různými hodnotami svítivosti netvoří tupoúhlý trojúhelník. Kolik nejvíce hvězd může ostré souhvězdí mít?

Úloha 8. (5 bodů)

Jupiter a Mars tráví nedělní odpoledne hraním her. Jupiter připraví 2000 hvězd a mezi každými dvěma most. Jupiter začíná a oba se střídají v tazích. Ve svém tahu Jupiter smaže jeden most, kdežto Mars dva nebo tři. Prohraje ten, který po svém tahu nějakou hvězdu izoluje (nevychází z ní žádný most). Který z nich má vyhrávající strategii[2]?

[1] Tím myslíme rovnoběžník s nenulovým obsahem.

[2] Vyhrávající strategie je strategie, která vede k vítězství nezávisle na tazích protihráče.