

Barevné úlohy

1. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 6. ŘÍJNA 2014

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Obarvěte políčka tabulky o rozměrech 4×4 pěti barvami tak, aby byla každá barva použita alespoň jednou a aby se v každém řádku i sloupci vyskytovaly nejvýše dvě různé barvy.

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Na úsečce AB se středem S vyrostlo sto dvojic tulipánů tak, že pro každou dvojici leží bod S ve středu spojnice jejich tulipánů. Sto tulipánů vykvetlo červeně, zbylé vykvetly žlutě. Dokažte, že součet vzdáleností žlutých tulipánů od bodu A je stejný jako součet vzdáleností červených tulipánů od bodu B .

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Martin sbírá bonbóny v barevných obalech. V každé z deseti krabiček má nějaký nenulový počet bonbónů, přičemž tento počet je pro každou krabičku jiný. Navíc v žádné krabičce nejsou dva bonbóny s obaly stejné barvy. Ukažte, že Martin může vybrat z každé krabičky jeden bonbón tak, aby získal obaly deseti různých barev.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Políčka tabulky o rozměrech 3×7 jsou obarvena dvěma barvami. Dokažte, že existuje obdélník nebo čtverec z jejích políček, jehož všechna rohová políčka jsou různá a mají stejnou barvu.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Velkoobchod s barvami má v každém z n měst svou pobočku a mezi každými dvěma z nich vede cesta. Bylo rozhodnuto, že je třeba nakreslit plánek těchto poboček a cest mezi nimi tak, aby

- (i) každé město mělo jinou barvu než všechny cesty z něj vedoucí,
- (ii) žádné dvě cesty vedoucí do stejného města neměly stejnou barvu.

Kolik nejméně barev bude k nakreslení plánu potřeba?

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Na každém políčku šachovnice o rozměrech 8×8 sedí jedna beruška. Když Štěpán zapíská, přesune se každá beruška na některé políčko, které stranou sousedí s políčkem, na němž byla dosud. Kolik nejvíce políček se tím může uvolnit? (Nezapomeňte dokázat, že více se jich uvolnit nemůže.)

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)
David si na kružnici nakreslil $4n$ různých bodů a pak je po směru hodinových ručiček střídavě obarvil modře a červeně. Červené body nějakým způsobem rozdělil do n dvojic a body v každé dvojici spojil červenou úsečkou. Podobně n modrými úsečkami pospojoval modré body. Všiml si, že žádné tři barevné úsečky neprocházejí jedním bodem a že každý průsečík modré a červené úsečky je fialový. Dokažte, že na obrázku našel alespoň n fialových bodů.

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

Červená Karkulka a Vlk hrají hru. Vlk nejprve na pásek papíru namaluje sto puntíků, z nichž každý je buď modrý, nebo červený. Na začátku každého tahu se odstříhne puntík nejvíce vlevo. Je-li červený, namaluje Vlk na pravý konec řady další modrý nebo červený puntík dle vlastního výběru. V opačném případě udělá totéž Karkulka. Cílem Karkulky je zajistit, aby po nějakém tahu byly všechny puntíky červené. Může se jí to podařit, ať hraje Vlk jakkoliv?