Seriál – Letem grafovým světem III

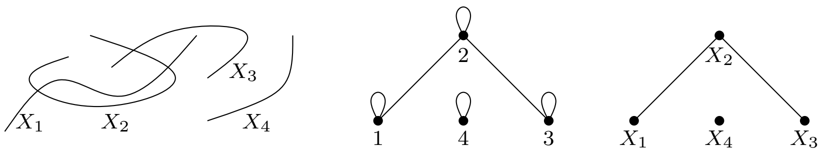
Vítáme Tě u třetího dílu seriálu o teorii grafů. Tentokrát se ponoříme do studia takzvaných průnikových grafů. Než to ale uděláme, dovolíme si Tě před něčím varovat, nebo lépe řečeno na něco Tě upozornit. Průnikové grafy jsou poměrně obsáhlé a výhradně vysokoškolské téma, takže mnoho poznatků o nich značně přesahuje rámec našeho seriálu. Zároveň se jedná o velmi teoretické téma, které sice má svá uplatnění (například při značkování map nebo v biologii při rekonstrukci genomu), ale ta opět většinou přesahují rámec seriálu natolik, že si je nebudeme schopni nijak podrobně popsat. Tento díl tedy považuj za jakousi stručnou sondu do světa průnikových grafů, o kterých se budeme bavit, protože nám přijdou zajímavé, a ne proto, že bychom díky nim chtěli uspět v matematické olympiádě nebo udělat dojem na kamarády nematematiky. Dost už ale bylo řečí kolem, pusťme se do toho!

Základy aneb průnikové grafy pro zelenáče

Definice 1. Mějme systém (ne nutně různých) množin $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Potom můžeme následujícím způsobem definovat *průnikový graf G systému $\mathcal{X}$*: vrcholy G jsou $1, 2, \ldots, n$ a hrana je mezi vrcholy i a j právě tehdy, když $X_i \cap X_j \neq \emptyset$. O grafu pak řekneme, že je *průnikový*, pokud je izomorfní průnikovému grafu nějakého systému množin.

Poznámka 2. V takovém grafu vzniknou smyčky, ale my je budeme ignorovat. Dále se budeme dopouštět drobných nekorektností – například, pokud tím nedojde ke zmatení, budeme vrcholy označovat stejně jako příslušné množiny; dokonce často budeme vrcholy a množiny zaměňovat.

Na následujícím obrázku můžeš vidět systém množin bodů v rovině a jeho průnikový graf nejprve se smyčkami (důsledně podle definice) a pak bez smyček, jak jej budeme chápat ve zbytku textu.



Důsledná a volnější interpretace definice průnikového grafu

Definice průnikových grafů se na první pohled může zdát trošku odtažitá. Nejedná se ale o nic složitého – s průnikovými grafy jsme se už setkali. Konkrétně hranový graf $L(G)$ grafu G je průnikovým grafem systému hran grafu G, kde hrany bereme v souladu s definicí jako dvojice vrcholů, a ne jako křivky na papíře. Ba co víc, každý graf, který jsme v dosavadním průběhu seriálu zmínili, byl průnikový. Platí totiž dokonce následující věta.

Věta 3. *Každý graf je průnikový.*

Důkaz. Mějme graf $G = (V, E)$. Pro každý vrchol $v \in V$ definujeme $S_v = \{e \in E \mid v \in e\}$. Z definice S_v snadno nahlédneme, že pro všechna $u \neq v \in V$ platí $\{u, v\} \in E$ právě tehdy, když $S_u \cap S_v \neq \emptyset$. $\square$

Z předchozí věty si můžeme odnést několik zajímavých závěrů. Zaprvé to je fakt, že každý graf lze reprezentovat jako průnikový, takže zkoumat tuto třídu grafů může být užitečné. Zadruhé fakt, že obecné průnikové grafy nejsou nijak zvlášť zajímavé – jsou to prostě všechny grafy. Dává tedy smysl nějakým způsobem omezit systém množin, jež pronikáme, například na přímky v rovině, koule v prostoru nebo tříprvkové podmnožiny přirozených čísel. Poté můžeme zkoumat, jaké třídy grafů lze reprezentovat různými typy systémů množin. A právě tím se budeme na následujících stránkách zaobírat i my.

Nejprve si definujme několik základních tříd průnikových grafů.

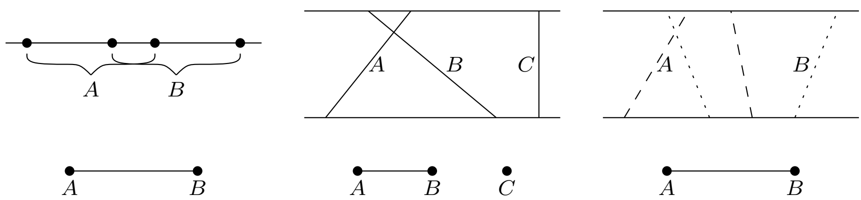
Definice 4. O grafu řekneme, že je

(1) *průnikový graf intervalů* (na přímce), nebo též zkráceně *intervalový*, pokud jej lze reprezentovat jakožto průnikový graf nějakého systému úseček na jedné předem dané přímce.

(2) *permutační*, pokud jej lze reprezentovat jakožto průnikový graf nějakého systému úseček propojujících dvě předem dané různé rovnoběžné přímky.[1] Koncové body těchto úseček se přitom musejí lišit.

(3) *lichoběžníkový*, pokud jej lze reprezentovat jakožto průnikový graf nějakého systému lichoběžníků takových, že pokud protáhneme dvě rovnoběžné strany jednoho z nich na přímky, bude na každé z obou vzniklých přímek ležet právě jedna strana každého lichoběžníku.

K lepšímu pochopení Ti snad pomůže následující obrázek.



Příklad intervalového, permutačního a lichoběžníkového grafu

Nyní vyslovíme a dokážeme jedno tvrzení, které dává výše definované třídy grafů do souvislosti. Jeho důkaz je ale poměrně jednoduchý, takže si ho můžeš provést sám (sama) jako cvičení.

Věta 5. *Každý intervalový graf a stejně tak každý permutační graf je zároveň lichoběžníkovým grafem.*

[1] Těmto grafům říkáme permutační, protože systém úseček vlastně popisuje permutaci (neboli zpřeházení) několika prvků. De facto pak bereme tyto prvky za vrcholy a hranu kreslíme mezi ty vrcholy, jejichž pořadí permutace prohodila.

Důkaz. Nejprve si dokažme část o intervalových grafech. Máme nějaký systém intervalů na přímce a chceme najít systém lichoběžníků, které se protínají „stejným způsobem“ jako dané úsečky. Můžeme volit například speciální případ lichoběžníků – obdélníky – a sice takové, že jedna jejich strana vždy splývá s jedním daným intervalem a druhá má nějakou pevnou délku d. Tyto obdélníky se pak protínají stejně jako zadané úsečky a definují lichoběžníkový graf.

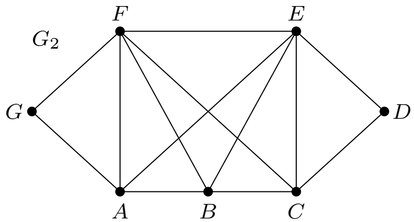
Dále si dokažme část o grafech permutačních. Máme nějaký systém úseček odpovídajících definici a podobně jako v předchozí části z něj chceme „vyrobit“ systém rovnoběžníků.[2] Idea je ta, že úsečka je vlastně „nekonečně úzký rovnoběžník“ a my tedy tyto úsečky jen nepatrně rozšíříme a tím z nich vytvoříme opravdové rovnoběžníky, které mají vhodné průsečíky. Podrobněji řečeno, z dané úsečky a vyrobíme rovnoběžník tak, že vezmeme všechny body ve vzdálenosti maximálně l od a a tuto množinu pronikneme s pásem vymezeným dvěma danými přímkami. Zbývá jen určit, jak velké má být l, aby se lichoběžníky protínaly tak, jak chceme (a jestli takové vůbec existuje).

Každé dvě úsečky od sebe mají nějakou vzdálenost – buď se protínají, a pak je nulová, nebo ne, a pak je kladná. Těchto vzdáleností je konečně mnoho, takže existuje nejmenší z těch kladných. Označme ji k. Rozmysli si, že pak libovolné kladné $l < \frac{k}{2}$ vyhovuje – není to těžké. Tím je důkaz hotov. □

Cvičení 6. V posledním odstavci důkazu je poměrně malá, ale zásadní chyba, kvůli které je důkaz špatně. Najdi a oprav ji – jedná se skutečně o chybu, ne jen o vypuštění posledního kroku.

Pokud nemáš tušení, v čem je problém, napovíme Ti, že v opomenutí jednoho speciální případu. Své řešení si stejně jako v minulých dílech budeš moci ověřit na konci tohoto textu.

V porovnávání lichoběžníkových, permutačních a intervalových grafů ale můžeme pokračovat. Z první úlohy 3. seriálové série víme, že existuje souvislý permutační graf, který není intervalový. Nějaký takový graf označme G_1. Dále existuje i graf, který je intervalový, ale není permutační. Jako příklad takového grafu lze uvést graf G_2 na následujícím obrázku.



Příklad intervalového grafu, který není permutační

Pokud Ti vadí absence důkazu vlastností grafu G_2, můžeš si ho provést sám (sama) jako cvičení, jež nevyžaduje žádnou složitou teorii, pouze jistou dávku zkoušení nebo dobrý nápad.[3] Avšak není na něm nic moc zajímavého a jedná se spíš o rozebírání možností, takže ho klidně můžeš, stejně jako my, vynechat.

Cvičení 7. Ukaž, že graf G_2 je intervalový, ale není permutační.

A k čemu vlastně grafy G_1 a G_2 jsou? Zaprvé nám říkají, že ani jedna z tříd intervalových či permutačních grafů neobsahuje tu druhou. Zadruhé pak snadno najdeme graf, který je lichoběžníkový, ale není ani permutační, ani intervalový. Takovým grafem je například graf se dvěma komponentami, z nichž jedna je izomorfní G_1 a druhá G_2.

O permutačních grafech navíc platí jedno poměrně zajímavé tvrzení s velmi pěkným důkazem, které Ti ponecháme jako cvičení. Až ho vyřešíš, budeš se moci pustit do barvení průnikových grafů.

[2]Každý rovnoběžník je lichoběžníkem.

[3]Nápověda k němu je uvedena na konci textu.

Cvičení 8. Ukaž, že třída permutačních grafů je rovna třídě doplňků permutačních grafů, tedy že libovolný graf G je permutační právě tehdy, když jeho doplněk $\overline{G}$ je permutační.

Pokud chceš malé pošťouchnutí, rozmysli si, že stačí ukázat jeden směr, tedy že doplněk libovolného permutačního grafu je permutační. Větší nápovědu (vlastně už skoro řešení) si opět můžeš přečíst na konci seriálu.

Průnikové grafy a barevnost

Dovol nám se na chvíli vrátit k barvení grafů. Sice to nejspíš není po přečtení definic úplně zřejmé, ale průnikové grafy částečně s barevností souvisejí – a to jednak společnými aplikacemi v běžném životě, jednak tím, že poskytují nástroj, jak určovat barevnost grafu.

Nejspíš poměrně dobře znáš způsob, jakým se překrývají okna na pracovní ploše počítače. Vzdalme se mírně od různých oblých tvarů oken a představme si je všechny jako obdélníky, jejichž strany jsou rovnoběžné s okraji obrazovky. Když se podíváme na průnikový graf těchto obdélníků, můžeme z něho získat několik informací – třeba jeho barevnost nám určuje maximální počet vrstev oken.

Neměli bychom také zapomenout na dluh z minulého dílu, kde jsme si (pouze) zadefinovali skutečně netradiční způsob barvení – $L(p,q)$-značkování.[4] Tam jsme od sousedních vrcholů požadovali „rozdíl“ barev alespoň p a od těch „sousedících ob jeden vrchol“ rozdíl alespoň q.

K čemu je takováto zrůda dobrá a proč ji zmiňujeme zrovna teď? Protože s něčím podobným se potkáváš i Ty téměř každý den. Představ si třeba mobilní síť, která pokrývá většinu území (nejen) České republiky. K tomu je potřeba určité množství vysílačů, přičemž každý z nich zajišťuje signál v jiné lokalitě. Přesto existuje spousta míst, na kterých je možné chytit signál dvou nebo i více vysílačů zároveň. Pokud by všechny vysílaly na stejné frekvenci, navzájem by se rušily a my bychom z toho nic neměli. Pro bezpečný provoz se musejí vždy lišit alespoň o určitou hodnotu, stejně tak by se měly (o něco méně) lišit i vysílače, které mají společného souseda.

Pokud si tedy vezmeme území pokrytá jednotlivými vysílači jako výchozí množiny a vytvoříme průnikový graf tohoto systému, pak přiřazení vysílacích frekvencí vysílačům odpovídá vhodnému obarvení našeho grafu. A když minimální rozdíly frekvencí označíme jako p a q, dostáváme se právě k slibovanému $L(p,q)$-značkování.

Dále jsme v rámci cvičení zjistili, že barevnost úplného grafu K_n je právě n. Je ale možné nalézt graf, jehož barevnost je vysoká, přestože se v něm nevyskytuje žádný výrazně velký úplný podgraf?

Věta 9. *Pro každé přirozené číslo k existuje průnikový graf úseček v rovině, jehož barevnost je alespoň k, ačkoli neobsahuje trojúhelník jako podgraf.*

Třeba pro $k = 3$ to není až tak těžké dokázat – stačí vzít kružnici C_5, na jejíž obarvení potřebujeme alespoň tři barvy. Pro větší hodnoty k to už tak snadno nejde, pomůžeme si ale novým pojmem.

Definice 10. *Součástkou* nazveme trojici $S = (R, \mathcal{U}, Z)$, kde R je obdélník se stranami rovnoběžnými s osami roviny (*rámeček* součástky), $\mathcal{U}$ je nějaká množina úseček v rámečku R a $Z = \{z_1, \ldots, z_l\}$ je množina *zářezů* – po dvou disjunktních obdélníků orientovaných stejně jako rámeček, jejichž pravý okraj je součástí pravé hranice rámečku R. Navíc vyžadujeme následující vlastnosti:

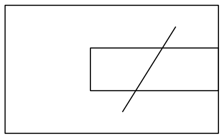
(i) Průnikový graf úseček $\mathcal{U}$ neobsahuje trojúhelník.
(ii) Pokud úsečka protíná nějaký zářez, tak protíná jeho horní a dolní okraj, speciálně tedy nekončí uvnitř.
(iii) Každé dvě úsečky protínající stejný zářez jsou disjunktní.

[4]Pokud si tento pojem chceš připomenout, podívej se na stranu 25 předchozích komentářů.

Jak taková součástka vypadá a hlavně to, jak se s ní pracuje, bude zřejmé z následujícího důkazu. A jak je v teorii grafů dobrým zvykem, dokážeme si mírně složitější větu, která nám ale umožní použít matematickou indukci.

Věta 11. *Pro každé přirozené číslo k existuje součástka S_k taková, že pro libovolné dobré obarvení průnikového grafu úseček S_k existuje zářez protnutý úsečkami k různých barev.*[5]

Důkaz. Pro $k = 1$ nám stačí vzít následující součástku:

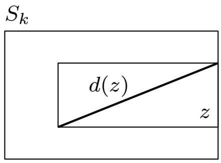


S_1

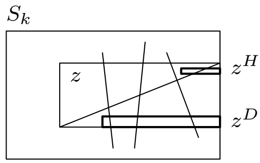
Po zbytek důkazu předpokládejme, že věta platí pro nějaké k. Takže existuje součástka $S_k = (R, \mathcal{U}_k, Z)$, z níž chceme vytvořit součástku S_{k+1}. Pro každý zářez z označme $d(z)$ jeho diagonálu z levého dolního do pravého horního rohu. Pokud bychom se pokusili přidat $d(z)$ mezi úsečky, porušili bychom třetí podmínku. Vytvořme proto nové zářezy z^D a z^H tak, aby

(i) zářez z^D protínal právě úsečky protínající zářez z (ale už ne úsečku $d(z)$), volíme ho tedy jako úzký zářez „při spodním okraji“ zářezu z,
(ii) zářez z^H protínal právě úsečku $d(z)$, bude to proto krátký zářez v pravém horním rohu. Jelikož nesmíme zapomenout na druhou podmínku, zářez z^H neumístíme přímo na horní okraj zářezu z, ale o kousek níž.

Následující obrázky by měly tyto pojmy trochu přiblížit.



Nová úsečka $d(z)$



Nové zářezy z^D a z^H

Definujme dále součástku S^* předpisem

$$S^* = \left(R, \mathcal{U}^* = \mathcal{U}_k \cup \{d(z) \mid z \in Z\}, \bigcup_{z \in Z} \left\{ z^D, z^H \right\} \right).$$

Snad není potřeba dokazovat, že S^* je skutečně součástkou. Určitě taky platí, že pro každé dobré obarvení úseček $\mathcal{U}^*$ nalezneme zářez z původní S_k, jenž obsahuje[6] alespoň $k + 1$ různobarevných úseček z $\mathcal{U}^*$. Z indukčního předpokladu totiž existuje zářez z součástky S_k, jenž protíná k různobarevných úseček, diagonála $d(z)$ se ale kříží se všemi těmito úsečkami, a proto musí dostat novou barvu.

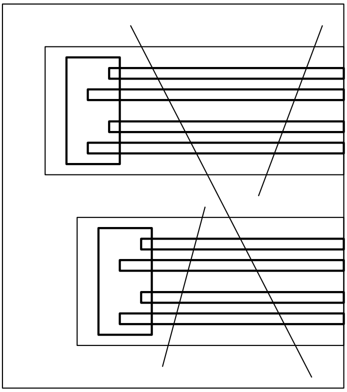
Na první pohled by se mohlo zdát, že jsme dosáhli cíle, protože máme skupinu $k + 1$ úseček, jež musejí mít vzájemně různé barvy. Ale ještě tomu tak není. Aby nám správně fungovala indukce,

[5]Tady bychom správně měli barvit vrcholy průnikového grafu, ale i v důkazu se nám bude hodit barvit přímo úsečky reprezentující vrcholy. Rozmysli si, že ve skutečnosti je to to samé.

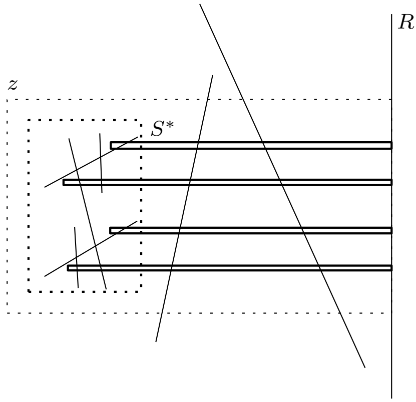
[6]Tady výjimečně povolujeme i úsečky, které začínají nebo končí uvnitř nebo na okraji zářezu.

musíme opravdu zaručit, aby všech $k+1$ úseček protínalo jediný zářez. Speciálně se dle třetí podmínky nesmějí protínat navzájem.

Vytvořme tedy součástku S_{k+1} ze součástky S_k tím, že do každého zářezu nakreslíme jednu zmenšenou kopii součástky S^* tak, aby byla nalevo od všech úseček protínajících daný zářez. Původní zářezy S_k smažeme a místo nich „prodloužíme“ zářezy každé kopie S^* až na pravý okraj rámečku. Můžeme dostat něco podobného následujícímu obrázku.



Sestrojení součástky S_{k+1}



Detail na jeden zářez původní S_k

Ponechme stranou dost technické a ničím nezajímavé dokazování, že „místa máme dostatek“. Dál si stačí uvědomit, že „vlepením“ kopie S^* nepřidáme žádné nové křížení úseček, proto první a třetí podmínka zůstávají v platnosti. No a pokud nějaká úsečka protínala zářez z, po této operaci protne všechny zářezy vzniklé prodloužením zářezů dané kopie S^*, proto S_{k+1} splňuje i druhou podmínku a je skutečně součástkou.

K čemu nám to všechno vlastně pomůže? Už víme, že v S^* nalezneme zářez z (původní) součástky S_k takový, že na obarvení všech úseček z $\mathcal{U}^*$ protínajících z^D nebo z^H potřebujeme $k+1$ barev (pojmenujme tyto úsečky $\mathcal{U}^*_z$). Když se pak podíváme na stejný zářez z v originální (velké) součástce S_k, nalezneme množinu „velkých“ úseček $\mathcal{U}_z$, na jejíž obarvení potřebujeme alespoň k barev. Tyto úsečky ale protínají jak nový zářez z^D, tak i z^H.

Teď si už stačí jenom uvědomit, že na obarvení množiny $\mathcal{U}^*_z$ potřebujeme alespoň o jednu barvu víc a příslušná úsečka s „barvou navíc“ musí protnout právě jeden ze zářezů z^D a z^H. Ten pak obsahuje úsečky $k+1$ různých barev, čímž jsme splnili podmínky znění věty. $\square$

Boxicita grafu

Již jsme si ukázali intervalové grafy, což jsou průnikové grafy intervalů na reálné ose. Dále jsme si krátce představili průnikové grafy obdélníků v rovině, jejichž strany jsou rovnoběžné s x-ovou a y-ovou osou – protože tyto grafy nemají žádný ustálený název, pojmenujme je například *obdélníkové* grafy. Podobným způsobem bychom mohli definovat grafy *kvádrové*, *hyperkvádrové* a kopu dalších.

Jaké vztahy platí mezi těmito třídami? Odpověď Ti ponecháváme do následujícího cvičení.

Cvičení 12. Promysli si, že intervalové grafy jsou zároveň obdélníkové a ty jsou zároveň kvádrové. Pokračuje to tak i k vyšším dimenzím?

To nás přivádí k otázce, kolik rozměrů potřebujeme, abychom daný graf G uměli reprezentovat jako průnikový graf vhodných hyperkvádrů.

Definice 13. *Boxicitou*[7] grafu G nazýváme minimální dimenzi d, pro kterou je G reprezentovatelný jako průnikový graf d-dimenzionálních kvádrů, přičemž všechny jejich hrany jsou rovnoběžné s některou z d os prostoru. Tuto hodnotu často značíme $\operatorname{box}(G)$.

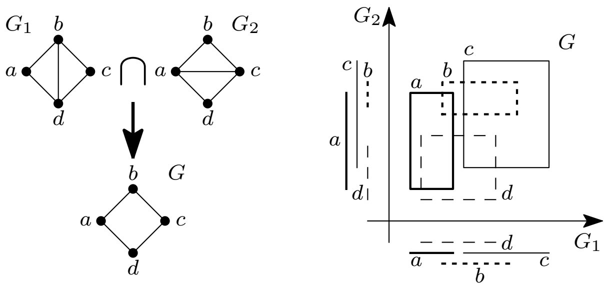
Na začátek si zkusme všimnout jednoho faktu. Není to těžké tvrzení, ale rozhodně vyžaduje chvilku rozmýšlení a trochu představivosti.

Pozorování 14. *Pro každý graf G platí*[8]

$$\operatorname{box}(G) = \min \left\{ d \,\middle|\, \text{existují intervalové grafy } G_1, \ldots, G_d \colon G = \bigcap_{i=1}^{d} G_i \right\}.$$

Obsah tohoto podivného tvrzení Ti snad přiblíží následující příklad.

Příklad 15. Boxicita kružnice C_4 je dva, protože není intervalovým grafem, ale umíme ji dostat jako průnik dvou intervalových grafů. Na základě této znalosti je snadné sestavit příslušný obdélníkový graf, jak vidno na obrázku.



Kružnice C_4 jako průnik dvou intervalových grafů

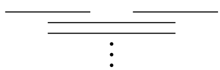
Možná Tě napadlo, má-li každý graf konečnou boxicitu. Odpověď je poměrně snadná.

Věta 16. *Pro každý graf $G = (V, E)$ s n vrcholy platí* $\operatorname{box}(G) \leq \binom{n}{2}$.

Důkaz. Nechť G_e označuje úplný graf K_n bez hrany e, tedy $G_e = K_n - e$. Pak zřejmě platí

$$G = \bigcap_{e \in \binom{V}{2} \setminus E} G_e.$$

Teď už stačí, pokud si všimneme, že každý graf G_e je intervalový, což ukazuje následující obrázek.



Intervalová reprezentace $K_n - e$

Protože „nehran" může být nejvýše $\binom{n}{2}$, z předchozího tvrzení dostaneme požadovanou nerovnost. $\square$

Tento odhad boxicity ale umíme výrazně zlepšit.

[7] Do češtiny bychom to mohli přeložit například jako *krabičkovost* grafu, ale držme se raději běžného názvosloví.

[8] Pokud máme několik grafů $G_i = (V, E_i)$ na stejné množině vrcholů, pak grafem $\bigcap_i G_i$ rozumíme graf $G = (V, \bigcap_i E_i)$.

Věta 17. *Pro každý graf $G = (V, E)$ s $n = |V|$ vrcholy platí* $\mathrm{box}(G) \leq \frac{n}{2}$.

Důkaz. Větu dokážeme indukcí podle n. Pokud má graf nanejvýš tři vrcholy, pak je určitě intervalový, a tedy $\mathrm{box}(G) = 1$. Dál proto budeme uvažovat pouze grafy s alespoň čtyřmi vrcholy.

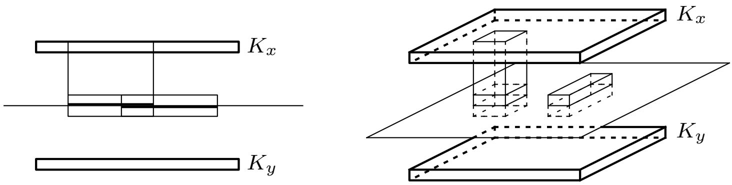
Pokud je graf G úplný, pak je intervalový a má boxicitu 1. V opačném případě existuje nehrana $\{x, y\}$. Víme, že graf $G' = G \setminus \{x, y\}$ splňuje indukční předpoklad, proto

$$\mathrm{box}(G') \leq \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1.$$

Pro graf G' tedy existuje reprezentace $\mathcal{R}'$ pomocí hyperkvádrů v prostoru $\mathbb{R}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$.

Vytvořme reprezentaci $\mathcal{R}$ pro graf G v prostoru $\mathbb{R}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$: každý hyperkvádr z $\mathcal{R}'$ přeneseme do $\mathcal{R}$, přičemž mu „přidáme nový rozměr“ – nechť v tomto rozměru zabírá právě interval $\langle -1, 1 \rangle$. (Něco podobného jsme dělali při důkazu, že intervalové grafy jsou zároveň lichoběžníkové.) Tímto zařídíme přesné zkopírování grafu G'. Potřebujeme ale ještě doplnit dva hyperkvádry pro vrcholy x a y.

Pro vrchol x vytvořme hyperkvádr K_x, jenž v „novém“ rozměru zabírá právě interval $\langle 9, 10 \rangle$ a ve všech ostatních rozměrech „přesahuje“ každý objekt v $\mathcal{R}'$. Pokud vrchol x sousedí v G s vrcholem u, pak hyperkvádr K_u z $\mathcal{R}$ odpovídající vrcholu u musíme „natáhnout“ tak, aby se s K_x protínal. K tomu nám stačí rozšířit interval v „novém“ rozměru až po 10. Pro vrchol y budeme postupovat podobně, jen ho umístíme na interval $\langle -10, -9 \rangle$.



Rozšíření z $\mathbb{R}^1$ na $\mathbb{R}^2$ Rozšíření z $\mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}^3$

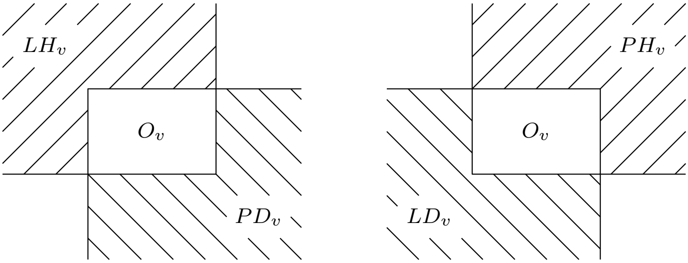
Po těchto úpravách skutečně dostaneme reprezentaci $\mathcal{R}$ grafu G, která využívá pouze $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ rozměrů. $\square$

Předchozí důkaz nebyl těžký, jen vyžadoval notnou dávku představivosti. Před důkazem následující věty se ale raději pořádně nadechni.

Věta 18. *Každý bipartitní graf s boxicitou nejvýše dva lze reprezentovat jako průnikový graf úseček pouze dvou směrů.*

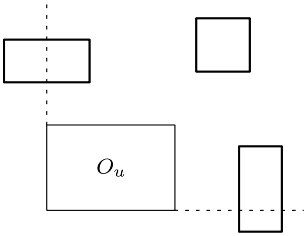
Důkaz. Mějme bipartitní graf $G = (A \cup B, E)$ s partitami A a B a jeho reprezentaci $\mathcal{R}$ pomocí obdélníků. Pro každý vrchol $v \in A \cup B$ označme O_v obdélník odpovídající vrcholu v a dále si definujme „čtvrtroviny“[9] LH_v, PH_v, LD_v a PD_v dle následujících obrázků:

[9] Značení je zvoleno jako zkratky pro *levá horní*, *pravá horní*, *levá dolní* a *pravá dolní* čtvrtrovina.



Definice čtvrtrovin LH_v, PH_v, LD_v a PD_v

Pomocí těchto čtvrtrovin si teď uspořádáme vrcholy v obou partitách: o vrcholech $u, v \in A$ řekneme, že u je „před“ v (budeme to značit $u <_A v$) právě tehdy, když $O_v \cap PH_u \neq \emptyset$ – možné vzájemné polohy obdélníků pro vrcholy u a v jsou vidět na následujícím obrázku. Pro vrcholy $x, y \in B$ bude podmínka mírně jiná: $x <_B y$ právě tehdy, když $O_y \cap PD_x \neq \emptyset$.



Možné pozice pro O_v, pokud $u <_A v$

Obě tato (zatím pouze částečná) „uspořádání“[10] splňují několik vlastností, vypíšeme je ale jenom pro to první (druhé splňuje něco velmi podobného). Většina z nich je docela snadná, jejich důkaz Ti proto ponecháme jako cvičení.

(1) Pro libovolné vrcholy $u, v \in A$ platí $O_u \cap O_v = \emptyset$.

(2) Dva vrcholy $u, v \in A$ splňují $u <_A v$ právě tehdy, když $O_u \cap LD_v \neq \emptyset$.

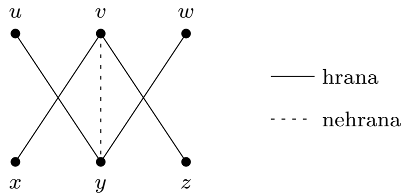
(3) Pokud pro různé vrcholy $u, v \in A$ platí $u <_A v$, pak určitě neplatí zároveň i $v <_A u$.

(4) Neexistuje žádná skupina vrcholů $v_1, \ldots, v_k \in A$, pro kterou platí

$$v_1 <_A v_2 <_A \cdots <_A v_{k-1} <_A v_k <_A v_1.$$

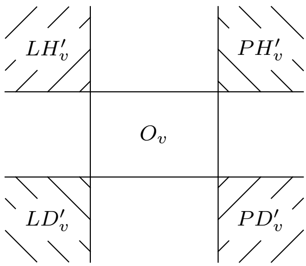
Jak jsme už naznačili, toto uspořádaní nemusí být úplné, což znamená, že mohou existovat vrcholy $u, v \in A$, pro které nenastává $u <_A v$ ani $v <_A u$. Opět není moc těžké (i když trochu práce to dá) si promyslet, že vždy umíme nějaké tyto vztahy doplnit tak, abychom potom už žádnou takovouto „neporovnatelnou“ dvojici vrcholů v partitě A nenašli a aby přitom byly stále zachovány podmínky (1) až (4). A totéž samozřejmě provedeme i s uspořádáním $<_B$. Pro tato rozšířená uspořádání pak nemůže nastat situace na obrázku (vrcholy $u, v, w \in A$ splňují $u <_A v <_A w$ a pro vrcholy $x, y, z \in B$ platí $x <_B y <_B z$; vrcholy, mezi nimiž není zakreslená hrana ani nehrana, spojeny být mohou, ale nemusejí):

[10] Přestože existuje i pojem *uspořádání* a tyto vztahy mezi vrcholy nesplňují všechny jeho podmínky, dovol nám tady menší nekorektnost. Následující vlastnosti nám stejně zaručí, že relace $<_A$ i $<_B$ umíme rozšířit tak, aby uspořádáními opravdu byly.



Tato situace nemůže nastat

Proč to platí? Radši si vezmi do ruky tužku a papír, jestli jsi to ještě neudělal(a). Z faktu, že $u <_A v$, víme, že $v \not<_A u$, a tedy $O_u \cap PH_v = \emptyset$; podobně $O_w \cap LD_v = \emptyset$. Označme si ještě „zmenšené“ čtvrtroviny dle obrázku:



Definice čtvrtrovin LH'_v, PH'_v, LD'_v a PD'_v

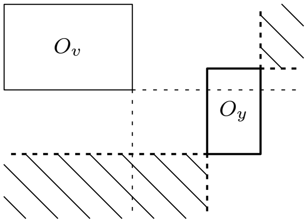
Předpokládejme, že vrcholy u a y jsou spojeny hranou, stejně tak jsou spojeny i vrcholy w a y. Z tohoto plyne, že $O_u \cap O_y \neq \emptyset$ a $O_w \cap O_y \neq \emptyset$. Po krátkém hledání možných poloh pro O_y (chceme, aby vrcholy v a y nesousedily, proto O_v a O_y musejí být disjunktní) dostaneme, že musí platit

$$O_y \cap \left(LH'_v \cup PD'_v\right) \neq \emptyset.$$

Podobně díky existenci hran $\{b, x\}$ a $\{b, z\}$ dostáváme vztah

$$O_v \cap \left(PH'_y \cup LD'_y\right) \neq \emptyset.$$

Když si ale tyto dva vztahy spojíme, narazíme na problém, jak napovídá následující obrázek.



Jedna z možných pozic pro O_y a plocha, kterou pak O_v musí proniknout

Posledním krokem důkazu je ukázat, že pokud žádná šestice vrcholů netvoří zmiňovanou konstelaci, pak skutečně umíme celý graf reprezentovat pomocí úseček dvou směrů. Tuto část jsme se rozhodli nechat na Tobě jako druhou úlohu soutěžní série. □

A něco na rozloučenou

Teď už nadešel čas celý seriál ukončit. Věříme, že se Ti líbil a alespoň některá jeho část Tě zaujala. Omezený prostor seriálu nám umožnil většinu oblastí pouze naťuknout, zatímco mnoho dalších hezkých (ale i pokročilejších) vlastností a aplikací se nám sem už nevešlo. Pokud bys přesto chtěl(a) vědět víc, neváhej nás oslovit nebo se podívat do některé z knih uvedených na konci.

Samozřejmě nemůžeme vynechat slíbenou nápovědu ani tradiční řešení a návody ke cvičením pro kontrolu:

6. Chyba je v tom, že jsme opomněli případ, kdy se všechny úsečky protínají. Pak by všechny vzdálenosti byly nulové, a žádná minimální kladná by tedy neexistovala. Snadno ale nahlédneme, že v tomto případě by vyhovovalo dokonce libovolné kladné l.

7. To, že je graf G_2 intervalový, ukážeme velmi snadno, stačí zkonstruovat daný systém intervalů. To, že není permutační, se ukáže poněkud obtížněji. Zkus kreslit systém úseček reprezentujících vrcholy grafu G_2 v tomto pořadí: D, C, B, A, G, F. Na závěr nebude možné umístit úsečku E.

8. Generující systém pro doplněk lze zkonstruovat například překlopením jedné z rovnoběžek. A pokud se Ti líbí dívat se na permutační grafy pomocí permutací, stačí vzít permutaci π, které odpovídá původní graf, a definovat permutaci σ splňující $\sigma(j) = \pi(n - j)$. Není těžké ukázat, že této permutaci odpovídá právě doplněk původního grafu.

Ač jsme Tě celou dobu prováděli seriálem pouze my dva, není tento text jen naší prací. Možná ještě větší zásluhu než kdokoliv z nás má na vzniku seriálu Kuba Krásenský, kterému tímto děkujeme za to, že prováděl jazykové a věcné korektury a pomohl vybrousit celý text do mnohem čitelnější podoby. Dále dlužíme díky Tondovi Češíkovi a Olinovi za to, že opravili naše typografické chyby a postarali se o perfektní grafickou podobu celého textu, a Martině, která dohlížela na naše obrázky. V neposlední řadě bychom pak rádi poděkovali všem ostatním organizátorům, kteří se svými poznámkami na tvorbě seriálu aktivně podíleli, a také Tobě za to, že sis jej přečetl(a) a dal(a) celé naší společné práci nějaký smysl. Doufáme, že, že Ti onen smysl neunikl a ze seriálu sis něco odnesl(a).

Přejeme Ti mnoho úspěchů jak v poslední seriálové, tak i ve zbylých dvou jarních sériích.

Peter „πtr“ Korcsok a Martin „E.T.“ Sýkora

Literatura a další zdroje

Již v předešlých dílech jsme zmiňovali některá místa, kde se o grafech a jejich světě můžeš hodně dozvědět. Zde bychom Tě rádi odkázali na pár knížek, které více nebo méně známe a můžeme je tedy pro další studium doporučit. A protože teorie grafů je poměrně mladý obor (alespoň ve srovnání s jinými oblastmi matematiky), hranice poznání se tady posouvají docela rychle. Je tedy možné, že za pár let budou tyto knihy zastaralé a jejich místo zaberou nové.

[1] J. Matoušek, J. Nešetřil: *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Karolinum, 2009.
[2] J. Demel: *Grafy a jejich aplikace*, Academia, 2002.
[3] R. Diestel: *Graph Theory*, Springer, 2010.
[4] B. Bollobás: *Modern Graph Thoery*, Springer, 1998.
[5] J.A. Bondy, U.S.R. Murty: *Graph Theory*, Springer, 2008.

Kromě toho můžeš samozřejmě využít i nepřeberné množství různých webových stránek – Wikipedií počínaje a stránkami různých vědců a časopisů konče. Většinou stačí pojmenovat, co zrovna chceš najít (ideálně anglicky), a to pak zadat do svého oblíbeného vyhledávače.