Seriál – Letem grafovým světem II

Vítáme Tě na začátku druhého dílu našeho seriálu. Pokud čteš tyto řádky, nejspíš to znamená, že jsme Tě jeho prvním dílem moc neodradili nebo ses nám rozhodl(a) dát ještě jednou šanci, což nás samozřejmě těší.

Jak jsme slíbili v úvodu první části, v tomto dílu si představíme „systém různých reprezentantů“, což je sice věc ne úplně grafová, ale zato má (nejen) v teorii grafů několik hezkých důsledků a aplikací. Pokud se ho už nemůžeš dočkat, budeš se muset vyzbrojit trochou trpělivosti. V první půlce tohoto dílu si totiž ještě ukážeme, jak umíme grafy barvit a k čemu nám to pomůže. Navíc uděláme krátkou odbočku k rovinným grafům.

Barevnost grafu

Nebudeme to už dál natahovat, vezmeme rovnou do rukou štětec a kbelík s barvou a pustíme se do práce. Hlavním důvodem barvení grafů (samozřejmě kromě estetického cítění) je, že chceme odlišit „sousedící“ objekty (vrcholy nebo hrany), proto jim budeme přidělovat různou barvu.

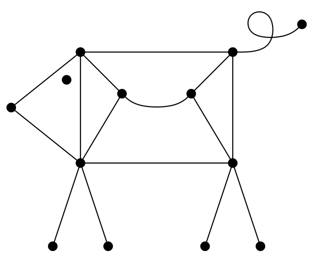
Nepochybujeme o tom, že znáš mnoho odstínů (především šedi), ale abychom Tě (i sebe) ušetřili vět typu „Vrchol u obarvíme tyrkysově-azurovou, protože olivově zelenou jsme už nabarvili vrchol v.“, budeme barvičky raději číslovat.

Definice 1. O grafu G řekneme, že je *vrcholově k-obarvitelný*, pokud existuje zobrazení $b\colon V(G) \to \{1,\ldots,k\}$ splňující podmínku $b(u) \neq b(v)$, kdykoliv jsou vrcholy u a v spojeny hranou. *Vrcholovou barevností* grafu G pak rozumíme nejmenší k, pro které je G vrcholově k-obarvitelný, a značíme ji $\chi(G)$.[1]

My jsme už obarvování vlastně potkali v prvním dílu, i když jsme tomu říkali jinak. Vrcholově k-obarvitelné grafy totiž nejsou nic jiného než k-partitní grafy.

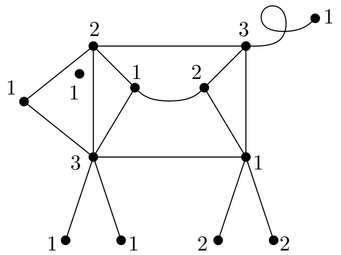
Definice 2. Graf G nazveme *hranově k-obarvitelným*, pokud existuje zobrazení $b\colon E(G) \to \{1,\ldots,k\}$, kde $b(e) \neq b(f)$ platí pro všechny dvojice hran e a f mající společný vrchol. *Hranová barevnost* grafu G je pak opět nejmenší k takové, že G je hranově k-obarvitelný. Značíme ji $\chi'(G)$.

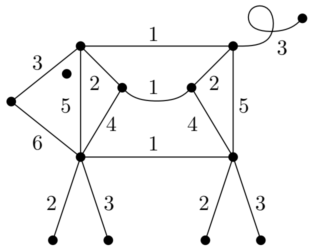
Příklad 3. Jakou vrcholovou a hranovou barevnost má graf G na obrázku?



[1]Podobně jako při značení v prvním díle, i tady pochází písmeno χ (malé řecké písmeno *chí*) z anglického *chromatic number*.

Řešení. Protože hlavu prasátka tvoří tři vrcholy spojené každý s každým, musí být $\chi(G) \geq 3$. Podobně když se podíváme na vrchol mezi hlavou a předními nohami, zjistíme, že sousedí se šesti hranami, proto taky $\chi'(G) \geq 6$. Že tyto počty barev opravdu stačí, ukazují následující obrázky. □





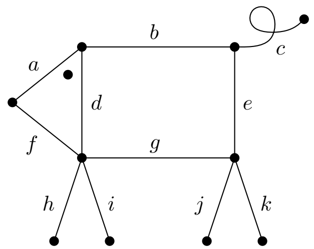
Cvičení 4. Jakou vrcholovou a hranovou barevnost mají grafy K_n, C_n, P_n a Q_n definované v prvním dílu?

Ve skutečnosti existuje ještě třetí varianta barvení. Bývá zvaná *totální* a občas značená χ''. Při ní barvíme vrcholy i hrany zároveň, přičemž žádné sousedící hrany nesmějí sdílet společnou barvu a stejně tak hrana nesmí mít barvu svého koncového vrcholu. V páté úloze letošní první série jsme tedy chtěli dokázat, že $\chi''(K_n) = n$.

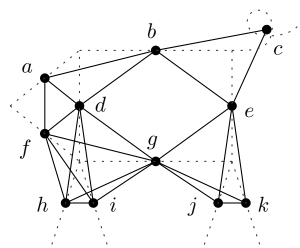
Když známe barvení hran, jsme už jen krůček od grafu, kde hrany „povýšíme" na vrcholy.

Definice 5. Pro graf G definujeme *hranový graf* $L(G)$, jehož množina vrcholů je $E(G)$ a dva vrcholy jsou spojeny hranou právě tehdy, když jim odpovídající hrany v G měly společný vrchol.[2]

Aby sis lépe představil(a), jak vlastně hranový graf vypadá, máš tu názorný obrázek.



G



$L(G)$

Určitě sis už promyslel(a), že platí $\chi'(G) = \chi\big(L(G)\big)$, a možná Tě vzápětí napadla otázka, co nového nám hranový graf přináší. Odpověď je poměrně jednoduchá – usnadní nám život při definici dalších hranových variant barevností a také při některých důkazech.

Cvičení 6. Které grafy G jsou izomorfní se svými hranovými grafy $L(G)$?

[2]Původ písmena L je opět v anglickém výrazu *linegraph*.

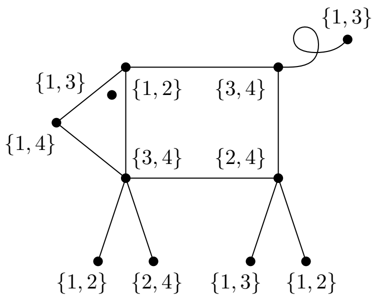
Méně tradiční barevnosti

Obě dosud zmiňované barevnosti povolovaly barvit všechny vrcholy nebo hrany všemi barvami od 1 až po k. To nám ale nemusí vždy vyhovovat.

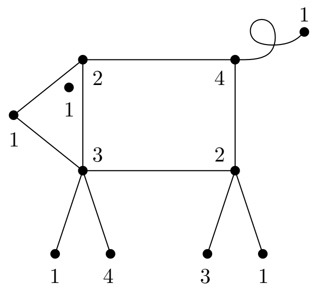
Představ si třeba město, kde se na radnici rozhodli vymalovat všechny domy tak, aby žádné dva sousední neměly stejnou barvu. Přitom ale chtěli umožnit obyvatelům ovlivnit, jakou barvu jejich dům dostane. Proto každý majitel domu měl možnost si vybrat libovolných k barev, jež směly být na jeho domku použity. Podobnou situaci řeší následující definice.

Definice 7. Nechť G je graf, X je dost velká množina barev a zobrazení $B\colon V(G) \to \mathcal{P}(X)$ je libovolné přiřazení množin barev vrcholům G.[3] Pak řekneme, že graf G je B-*obarvitelný*, pokud existuje zobrazení $b\colon V(G) \to X$, kde $b(u) \neq b(v)$, kdykoliv jsou vrcholy u a v spojeny hranou, a navíc je pro každý vrchol v splněna podmínka $b(v) \in B(v)$. Dále graf G nazveme k-*vybíravým*, pokud je B-obarvitelný pro každou funkci B, jež splňuje podmínku $|B(v)| = k$ pro každý vrchol v. Nakonec *vybíravostí* grafu G rozumíme nejmenší k, pro které je G vrcholově k-vybíravý, a často ji značíme $\mathrm{ch}(G)$.[4]

Na tomto obrázku je znázorněno přiřazení množin barev B a jedno z možných B-obarvení b.



B



B-obarvení b

Pokud se Ti už povedlo strávit tuto definici, možná sis taky všiml(a) následujícího vztahu barevnosti a vybíravosti grafu.

Lemma 8. *Pro každý graf G platí $\chi(G) \leq \mathrm{ch}(G)$.*

Důkaz. Nechť $\mathrm{ch}(G) = k$. Pak je graf G z definice B-obarvitelný pro libovolné zobrazení $B\colon V(G) \to \mathcal{P}(G)$ splňující $|B(v)| = k$ pro každý vrchol v. Speciálně to tedy platí i pro funkci B, kde $B(v) = \{1, \dots, k\}$ pro všechny vrcholy, čímž se dostáváme přímo k definici k-obarvitelnosti. Musí tedy platit $\chi(G) \leq k = \mathrm{ch}(G)$. $\square$

Přitom opačná nerovnost rozhodně platit nemusí.

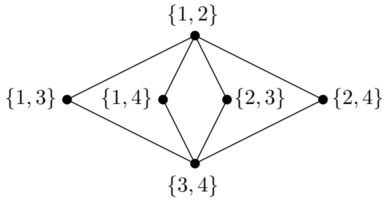
Příklad 9. Existuje graf G splňující $\chi(G) < \mathrm{ch}(G)$.

Řešení. Takovým grafem je například $K_{4,2}$. Jelikož je bipartitní, platí $\chi(K_{4,2}) = 2$. Jak ukazuje následující obrázek, umíme vrcholům přiřadit dvouprvkové množiny barev tak, abychom z nich platné obarvení nevybrali. Proto $\mathrm{ch}(K_{4,2}) > 2$.

---

[3] Symbolem $\mathcal{P}(X)$ označujeme množinu všech podmnožin množiny X.

[4] Písmeno ch pochází z anglického pojmu *choosability*; v literatuře se taky vyskytuje označení χ_L – z anglického *list* (seznam).



Zadání jsme už sice splnili, ale ještě můžeme ukázat, že $\mathrm{ch}(K_{4,2}) = 3$. Když totiž každému vrcholu přiřadíme seznam tří barev, můžeme obarvit vrcholy stupně čtyři libovolně a každému ze zbylých vrcholů stejně zůstane alespoň jedna možná barva. □

Ještě nám dovol v krátkosti zmínit jedno barvení. V angličtině se většinou označuje pojmem $L(p, q)$-*labeling*, což můžeme do češtiny překládat jako $L(p, q)$-*značkování*. Opět jde o zobrazení $l\colon V(G) \to \{1, \ldots, k\}$, tentokrát ale máme podmínky dvě:

(1) Kdykoliv jsou vrcholy u a v od sebe na vzdálenost jedna (tedy spojeny hranou), musí platit $|l(u) - l(v)| \geq p$.

(2) Pro každou dvojici vrcholů u a v ve vzdálenosti dva (u a v mají společného souseda) musí platit $|l(u) - l(v)| \geq q$.

Hodnotou $\lambda_{p,q}(G)$ pak označujeme minimální k potřebné k existenci $L(p, q)$-značkování grafu G. Sice se jím v tomto dílu zabývat nebudeme, ale v tom příštím Ti ukážeme jeho uplatnění v každodenním životě. Teď můžeme jen naznačit, že to má něco společného s rádiovým vysíláním.

Rovinné grafy

Od barvení grafů teď na chvilku utečeme a povíme si něco o tzv. rovinných grafech. Jsou to grafy, o kterých se mluví a píše poměrně často, takže pokud by Ti náš stručný výklad nestačil, můžeš si o nich snadno dohledat více informací. Pokud Tě naopak rovinné grafy nezajímají a chtěl(a) bys raději obarvovat, zkus zatnout zuby a následující odstavce si přece jen přečíst. Zanedlouho si totiž ukážeme, že rovinné grafy a obarvování k sobě mají velmi blízko.

Definice 10. O grafu G řekneme, že je *rovinný*, pokud ho lze zakreslit bez křížení hran.

Tato definice samozřejmě není formální, protože nikde nespecifikujeme, co to znamená „jít nakreslit bez křížení hran“. Intuitivní definice nám ale bude bohatě postačovat.[5] Abychom se vyhnuli případným nedorozuměním, měli bychom ale zdůraznit, že v definici předpokládáme, že grafy kreslíme do roviny (proto jim říkáme rovinné), a ne třeba na torus nebo Möbiovu pásku.

To, že nás zajímá, jak je to s grafy, které zakreslujeme do roviny, je zcela pochopitelné. (Už jen proto, že většinou kreslíme grafy na papír, který je rovný.) Jenže pomocí grafů často chceme reprezentovat objekty globálních rozměrů, například síť ropovodů na Zemi. Země je ale kulatá, takže je přirozené se rovněž ptát, jak vypadají grafy, které lze bez křížení nakreslit na povrch koule. Kupodivu se ukazuje, že jsou to právě rovinné grafy.

Proč? Máme-li graf nakreslený na kouli, můžeme předpokládat, že je nakreslený neprůsvitnou barvou na průhledné kouli. Potom kouli postavíme na rovinu tak, aby „horní bod“ koule nebyl obarven, a představíme si, že do tohoto bodu umístíme zdroj světla. Náš graf pak bude vrhat na rovinu stín – reprezentaci stejného grafu v rovině. Naopak máme-li graf v rovině, postavíme na rovinu kouli a nakreslíme na ni takový graf, aby se jeho stín rovnal obrazci na rovině. Přitom si určitě snadno rozmyslíš, že potom se buď hrany kříží v obou obrázcích, nebo ani v jednom.

[5] Pokud by Tě zajímala „pořádnější“ definice, můžeš se podívat třeba na Wikipedii.

Jinak řečeno, pokud umíme nějaký graf reprezentovat bez křížení hran v rovině, umíme to i na kouli – a naopak.

Pokud toužíš po matematických termínech, věz, že jsme v předchozím odstavci popsali známé zobrazení ze sféry do roviny zvané stereografická projekce.

S úsměvem na tváři se můžeme vrátit ke zkoumání rovinných grafů. Mějme graf a nějaké jeho *rovinné nakreslení*[6]. Toto nakreslení rozdělí rovinu hranami grafu na několik oblastí. Těmto oblastem budeme říkat *stěny*. Každé nakreslení má zřejmě jednu stěnu – tu „neomezenou okolo grafu“ – a případně nějaké další. Zajímavé je, že ať nakreslíme rovinný graf jakkoliv, vždy bude mít stejný počet stěn. To vyplývá z následující věty (tak, že ji postupně aplikujeme na jednotlivé komponenty souvislosti).

Věta 11. (Eulerova formule) *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf a nechť s je počet jeho stěn v nějakém rovinném nakreslení. Pak platí*

$$|V| - |E| + s = 2.$$

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle počtu hran $|E|$. Pokud $|E| = 0$, pak nutně $|V| = 1$ a $s = 1$ a rovnost platí.

Nyní předpokládáme, že tvrzení platí pro všechna rovinná nakreslení všech grafů takových, že $|E| \leq n - 1$ pro nějaké n přirozené. Chceme ukázat, že pak platí i pro libovolný případ $|E| = n$. Rozlišíme přitom dva případy.

1. Graf G neobsahuje kružnice. Potom G je strom a $|V| = |E| + 1$ a $s = 1$, takže tvrzení platí. (To, že $s = 1$, nebudeme formálně dokazovat a vystačíme si jen s tím, že je to „intuitivně jasné“.)
2. Graf G obsahuje alespoň jednu kružnici. Pak uvažme jednu hranu e, která leží na nějaké kružnici v G, a tu odmažme. Tím získáme rovinné nakreslení grafu $G - e$, který má $n - 1$ hran, a proto pro něj dokazovaný vzorec platí. Přitom jsme odebrali jednu hranu a počet vrcholů jsme nezměnili. Aby platila rovnost i pro graf G, museli jsme odebráním hrany ubrat i jednu stěnu. To ale skutečně nastane, protože odebráním hrany přestane být vnitřek kružnice samostatnou stěnou. (I zde se spokojíme s tím, že je tato skutečnost „zřejmá“, a nebudeme ji nějak podrobně dokazovat.)

□

Právě dokázaná věta má několik zajímavých důsledků. Jeden z nich je ten, že stejný vzorec platí i pro mnohostěny. Proč tomu tak je, můžeme nahlédnout následujícím způsobem. Vezmeme si libovolný mnohostěn a umístíme ho do nějaké koule tak, aby její střed ležel uvnitř daného tělesa. Potom promítneme vrcholy a hrany na povrch koule. (V řeči světélek, kterou jsme používali u stereografické projekce, umístíme zdroj světla do středu koule a výsledkem bude stín na jejím povrchu.) Výsledek pak zobrazíme stereografickou projekcí do roviny. Tím získáme graf, jehož vrcholy, hrany a stěny odpovídají po řadě vrcholům, hranám a stěnám mnohostěnu (odtud dokonce terminologie pro grafy pochází). Hrany tohoto grafu se navíc nebudou křížit a graf bude souvislý, takže pro něj, a tím pádem i pro mnohostěn, rovnost bude platit.

Dalším důsledkem je to, že existuje jen pět typů platónských těles[7] – pravidelný čtyřstěn, krychle, pravidelný osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn. K důkazu se použije stejné zobrazení těles na rovinné grafy, jaké jsme použili v předchozím odstavci. Je ale třeba dokázat jedno pomocné (nikterak složité) tvrzení, které přesahuje rámec seriálu, takže Tě odkážeme na Kapitoly z diskrétní matematiky[8], kde se můžeš dočíst víc podrobností.

[6] Rovinným nakreslením grafu budeme intuitivně rozumět obrázek bez křížení hran, kterým reprezentujeme daný graf.

[7] Platónské těleso neboli pravidelný mnohostěn je mnohostěn, jehož všechny stěny jsou pravidelné mnohoúhelníky takové, že se jich v každém vrcholu stýká stejný počet.

[8] Kniha od pánů Matouška a Nešetřila, kterou jsme doporučovali už minule.

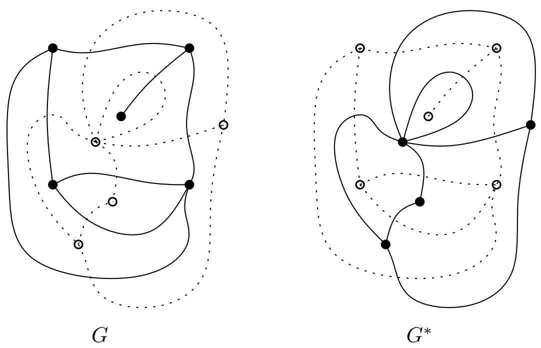
Ještě se nám budou hodit dva pojmy, které s rovinnými grafy úzce souvisejí.

Definice 12. Rovinné nakreslení grafu G nazveme *triangulací*, pokud všechny jeho stěny jsou tvořeny trojúhelníky[9]. Pokud budeme trojúhelníkovou hranici požadovat od všech stěn kromě vnější (té „neomezené“), budeme mluvit jenom o *skorotriangulaci.*

Definice 13. Mějme rovinné nakreslení grafu G. Pak jeho *duální graf* G^* má vrchol za každou stěnu grafu G a hrana spojuje dva vrcholy právě tehdy, když příslušné stěny sdílely společnou hranu.

V definici jsme si dovolili jednu nepřesnost. Pokud se například v grafu G vyskytuje most (hrana, jejíž odebrání způsobí ztrátu souvislosti), pak po obou „stranách“ tohoto mostu je ta samá stěna. V duálním grafu tedy vznikne hrana s oběma konci ve stejném vrcholu. Pokud sis četl(a) první díl opravdu pozorně, možná si vzpomeneš, že takovéto hraně jsme říkali smyčka. Stejně tak by se v duálním grafu mohly objevit paralelní hrany (pokud dvě stěny vzájemně sousedí více hranami), proto bychom v definici měli správně psát multigraf. Většinou ale budeme uvažovat grafy bez mostů a tudíž duální grafy bez smyček. Paralelní hrany nám při barvení grafů nezpůsobí žádnou komplikaci a při ostatních grafových úlohách se s nimi většinou taky nějak vypořádáme. Například často budeme navíc požadovat, aby duální graf byl opravdu grafem.[10]

Následující obrázek zobrazuje jedno rovinné nakreslení mutligrafu G a jemu příslušný duální multigraf G^*.



Definice duálního grafu má navíc další drobný problém – není úplně jednoznačná. Jeden rovinný graf totiž může mít několik vzájemně neizomorfních duálních grafů, jež vznikly z různých rovinných nakreslení. Ve většině případů nám to ale stejně nebude vadit, protože si daný graf jednou nakreslíme a na zbylá nakreslení zapomeneme.[11] Trochu volněji tedy můžeme brát duální graf jako operaci „G s hvězdičkou“, kde budeme stále uvažovat to samé nakreslení.

Barevnost rovinných grafů

Dovol nám další odbočku do historie. Pokud o ni nestojíš, můžeš následujících několik odstavců přeskočit.

Někdy kolem roku 1852 si Francis Guthrie všiml zajímavé skutečnosti – na obarvení mapy hrabství tehdejší Anglie mu vždy stačily čtyři barvy. Spolu se svým bratrem Fredericem toho

[9] Jak už sis určitě všiml(a), v teorii grafů se používají geometrické pojmy mírně jinak. Trojúhelník typicky znamená kružnici C_3.

[10] K tomu stačí požadovat, aby neměl vrcholy stupně dva ani takzvané *artikulace*, tedy vrcholy, jejichž odebrání rozdělí graf na více komponent.

[11] Většina skutečností stejně platí bez ohledu na konkrétní nakreslení grafu.

času studoval pod vedením slavného matematika Augusta de Morgana, proto za ním zašli s dotazem, zda čtyři barvy stačí pro libovolnou mapu. Až de Morgan rozšířil tento problém mezi matematickou společnost.

V grafové terminologii bychom mohli tuto domněnku (v současnosti již dokázanou) zapsat následovně.

Věta 14. (O čtyřech barvách) *Každý rovinný graf je 4-obarvitelný.*

Prvních „důkazů" se věta dočkala až po více než 25 letech – roku 1879 od sira Alfreda Braye Kempeho a v roce 1880 od Petra Guthrie Taita. Žádný z nich ale nevydržel moc dlouho – Kempeho důkaz vyvrátil roku 1890 Percy Heawood a protipříklad k Taitovu důkazu nalezl Julius Petersen roku 1891. Oba pokusy o důkaz ale prospěly alespoň částečným řešením a umožnily objevení tehdy ještě neznámých tříd grafů.

Následujících několik desetiletí se o důkaz snažili mnozí matematici, zmínit můžeme kupříkladu Huga Hadwigera a jeho zobecňující domněnku z roku 1943, jež stále na svůj důkaz čeká.

První důkaz Věty o čtyřech barvách, jenž zatím nebyl vyvrácen[12], představili roku 1976 pánové Kenneth Appel a Wolfgang Haken, s mírnou pomocí od Johna Kocha. Poměrně velká část důkazu je ale řešená jenom na počítači, proto se důkaz mnohým matematikům nelíbil.

O dvacet let později, roku 1996, přišli Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour a Robin Thomas s novým důkazem této věty, jenž je jednodušší a kratší, použití počítače se ale nevyhnuli. Povedlo se jim najít 633 „zakázaných konfigurací", tedy grafů, jež se nemohou objevit v potenciálním minimálním protipříkladu (jinak by šly nahradit menším grafem, čímž bychom dostali ještě menší protipříklad). Na počítači pak ukázali, že by nutně každý minimální protipříklad některou z těchto konfigurací obsahoval. Tím ale dokázali, že žádný minimální protipříklad existovat nemůže a věta tedy platí **:)**.

Snad nám promineš, že Ti žádný z těchto důkazů neukážeme, ale na to bychom potřebovali vybudovat daleko rozsáhlejší teorii, než je pro seriál vhodné. Místo toho ukážeme důkaz mírně slabší věty.

Věta 15. (O pěti barvách) *Každý rovinný graf je 5-obarvitelný.*

Tuto větu vlastně dostaneme jako důsledek věty následující.

Věta 16. (Thomassen) *Každý rovinný graf je 5-vybíravý.*

Důkaz. Mějme rovinné nakreslení grafu G, které doplníme na skorotriangulaci.[13] Navíc si označme vrcholy na vnější kružnici postupně $v_1, \ldots, v_k$. Indukcí dle počtu vrcholů ukážeme, že G je B-obarvitelný, kdykoliv jsou splněny následující podmínky:

(1) $|B(v_1)| = |B(v_2)| = 1$ a $B(v_1) \cap B(v_2) = \emptyset$,

(2) $|B(v)| = 3$ pro každý vrchol $v = v_3, \ldots, v_k$,

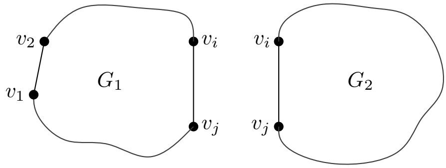
(3) $|B(v)| = 5$ pro všechny zbylé vrcholy v.

V případě nejvýše tří vrcholů musejí nutně všechny sousedit s vnější stěnou a pro každý máme dostatek možností na obarvení. Předpokládejme tedy, že vrcholy jsou alespoň čtyři.

1. Pokud existuje „tětiva" vnější kružnice (tedy hrana $\{v_i, v_j\}$ pro v_i a v_j nesousedící na kružnici), můžeme graf G podle této hrany rozdělit, čímž dostaneme dva menší grafy G_1, G_2. Právě jeden z nich obsahuje hranu $\{v_1, v_2\}$, ten označme G_1.

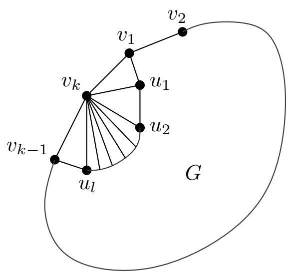
[12] Nejspíš tomu přispěl i fakt, že je natolik komplikovaný, že celý důkaz přečetlo a pochopilo poměrně málo lidí **:)**.

[13] Toto určitě udělat můžeme, protože každé obarvení této skorotriangulace je také obarvením původního grafu.



Snadno nahlédneme, že graf G_1 splňuje všechny tři podmínky, a proto existuje nějaké jeho B-obarvení b. Podobně je tomu u grafu G_2, tam ale není splněna podmínka (1), což snadno napravíme nastavením $B(v_i) = \{b(v_i)\}$ a $B(v_j) = \{b(v_j)\}$. Indukce nám pak už i pro graf G_2 zajistí takové B-obarvení, které se bude s obarvením G_1 shodovat na jejich společných vrcholech. Spolu tedy dají platné B-obarvení grafu G.

2. Nechť tedy vnější kružnice žádnou tětivu nemá. Podívejme se na sousedství vrcholu v_k – tvoří ho popořadě vrcholy $v_1, u_1, \ldots, u_l, v_{k-1}$. Protože jsme vycházeli ze skorotriangulace, všechny hrany $\{v_1, u_1\}, \{u_1, u_2\}, \ldots, \{u_{l-1}, u_l\}, \{u_l, v_{k-1}\}$ existují. Navíc žádný z vrcholů u_i nemůže ležet na vnější kružnici, jinak bychom dostali tětivu.



Označme $X = B(v_k) \setminus B(v_1)$, případně, pokud $|X| = 3$, jednu libovolnou barvu z X odstraňme. Když nyní odebereme z množin $B(u_i)$ barvy z X (a případně ještě nějaké, aby zbyly pouze tři), splníme pro graf $G - v_k$ všechny tři podmínky a indukce nám už zaručí existenci B-obarvení b. Musíme ale ještě dobarvit vynechaný vrchol v_k. Tady nám pomůže způsob, jak jsme upravili množiny $B(u_i)$ – všechny jsou disjunktní s X, stejně tak barva vrcholu v_1 v X není, proto jediný soused potenciálně nabarvený barvou z X je v_{k-1}. V X máme ale barvičky dvě, proto vrchol v_k určitě obarvit umíme. □

Systém různých reprezentantů

Nyní na chvilku opustíme teorii grafů a popovídáme si o zajímavém praktickém problému. Představ si, že máš systém několika množin[14] a chceš z každé množiny vybrat jeden prvek tak, aby vybrané prvky byly navzájem různé. Výše slíbeným problémem pak je, jak rozhodnout, jestli je možné takovýto výběr provést. Nejprve si uvědomme, že někdy prvky vybrat lze, například ze systému $\{a\}, \{b\}$, a někdy ne, například ze systému $\{a\}, \{a\}$. Zabývat se touto otázkou tedy je nějakým způsobem zajímavé.

[14] *Systém množin* je něco jako množina množin, abychom se vyhnuli zmateným výrazům typu „množina všech podmnožin množiny přirozených čísel“. Navíc u systémů budeme povolovat i možné opakování jejich prvků, takže například $\{\{a\}, \{a\}\}$ je dvouprvkový systém a budeme ho zkráceně zapisovat jako $\{a\}, \{a\}$.

Ač se to na první pohled možná nezdá, tento problém skutečně je praktický. Můžeme ho totiž přeformulovat například tak, že máme několik skupin lidí (třeba organizátory PraSete, přátele Meryl Streepové na Facebooku a sdružení zedníků v obci Petřvald) a chceme z každé skupiny vybrat jednoho zástupce, přičemž každý člověk smí zastupovat jen jednu skupinu. (Jinými slovy, vybraní lidé z různých skupin musejí být různí.)

Z každé množiny tedy vždy vybíráme jednoho zástupce neboli reprezentanta, a proto se množině vybraných prvků říká systém různých reprezentantů, někdy též zkráceně SRR. Pořádně definujeme SRR takto:

Definice 17. Nechť $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ je nějaký systém konečných podmnožin množiny M. *Systémem různých reprezentantů* systému $\mathcal{S}$ potom budeme rozumět kteroukoliv množinu $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ navzájem různých prvků množiny M takových, že x_i náleží S_i pro všechna $1 \le i \le m$.

Nyní se můžeme vrátit k problému, jestli daný systém množin má SRR. Poměrně snadno lze nahlédnout, že pokud pro systém $\mathcal{S}$ existuje systém různých reprezentantů, pak pro všechny možné k-tice množin z $\mathcal{S}$ musí platit, že počet prvků jejich sjednocení je roven alespoň k.[15] Pokud totiž $\mathcal{S}$ má SRR, pak z definice SRR pro libovolnou k-tici množin z $\mathcal{S}$ existuje k „jejich reprezentantů“. Získali jsme tedy nutnou podmínku existence SRR pro systém $\mathcal{S}$. Často se jí říká Hallova podmínka pro systém $\mathcal{S}$. Zajímavé je, že jde dokonce o podmínku postačující, jak říká tzv. Hallova věta.

Věta 18. (Hallova) *Systém množin $\mathcal{S}$ má SRR právě tehdy, když splňuje Hallovu podmínku, tedy když pro každý jeho podsystém $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ platí $|\bigcup \mathcal{T}| \ge |\mathcal{T}|$.*

Důkaz. Jednu implikaci už jsme dokázali v odstavci výše. Zbývá ukázat, že Hallova podmínka je postačující. Důkaz této implikace je poměrně pracný, ale nevyžaduje žádné speciální znalosti, tak se do něj rovnou pustíme. Budeme postupovat indukcí podle počtu množin v systému $\mathcal{S}$. Tento počet si pro jednoduchost označíme k. Pro $k = 0$ a $k = 1$ implikace zjevně platí.

V indukčním kroku budeme ukazovat platnost implikace pro systém alespoň dvou množin, pokud víme, že implikace platí pro všechny „menší“ systémy, tedy systémy s menším počtem množin. Celou situaci si rozdělíme na dva případy.

1. Pro všechny vlastní podsystémy[16] $\mathcal{S}$ platí Hallova podmínka dokonce s ostrou nerovností. Tedy pokud $\emptyset \subsetneq \mathcal{T} \subsetneq \mathcal{S}$, pak $|\bigcup \mathcal{T}| > |\mathcal{T}|$ neboli $|\bigcup \mathcal{T}| \ge |\mathcal{T}| + 1$. Pak si vybereme libovolnou množinu $A \in \mathcal{S}$ a z ní její libovolný prvek a. (To, že žádná množina v $\mathcal{S}$ není prázdná, a tím pádem z ní lze nějaký prvek vybrat, si můžeš rozmyslet jako jednoduché cvičení.) Uvažme systém $\mathcal{S}'$, který z $\mathcal{S}$ vznikne odebráním množiny A a prvku a z každé zbylé množiny. Nyní ověříme, že pro systém $\mathcal{S}'$ platí Hallova podmínka. Víme totiž, že v $\mathcal{S}'$ je méně množin než v $\mathcal{S}$, takže z indukčního předpokladu bychom pak věděli, že pro $\mathcal{S}'$ existuje SRR. Zjevně a nenáleží do tohoto SRR, takže přidáním a bychom snadno získali SRR systému $\mathcal{S}$.

   Libovolný podsystém $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{S}'$ lze vyjádřit jako $\big\{S_1 \setminus \{a\}, S_2 \setminus \{a\}, \ldots, S_m \setminus \{a\}\big\}$, kde jednotlivé S_i jsou prvky $\mathcal{S}$. Proto z našeho dodatečného předpokladu platí

$$|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m| \ge m + 1.$$

[15] Tuto podmínku můžeme ekvivalentně přeformulovat tak, že pro každý jeho podsystém $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ je počet prvků, které se vyskytují alespoň v jedné množině z $\mathcal{T}$, větší nebo roven počtu množin v $\mathcal{T}$. Pro zkrácení budeme tuto podmínku zapisovat jako $|\bigcup \mathcal{T}| \ge |\mathcal{T}|$.

[16] *Podsystémem* systému $\mathcal{S}$ nazveme systém, ve kterém se vyskytuje každý jeho prvek nejvýše tolikrát, kolikrát se vyskytuje v systému $\mathcal{S}$. *Vlastním podsystémem* pak rozumíme podsystém, který není prázdný a nerovná se systému $\mathcal{S}$.

Přitom

$$\left|\big(S_1 \setminus \{a\}\big) \cup \big(S_2 \setminus \{a\}\big) \cup \cdots \cup \big(S_m \setminus \{a\}\big)\right| = \left|(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m) \setminus \{a\}\right| \geq m,$$

takže pro $\mathcal{S}'$ Hallova podmínka platí.

2. Existuje vlastní podsystém $\emptyset \subsetneq \mathcal{T} \subsetneq \mathcal{S}$ takový, že $|\bigcup \mathcal{T}| = |\mathcal{T}|$. Pro tento systém zjevně platí Hallova podmínka – nerovnost platí pro všechny podsystémy $\mathcal{S}$, takže platí i pro všechny podsystémy $\mathcal{T}$. Z $\mathcal{T}$ tedy lze vybrat SRR o velikosti $|\mathcal{T}|$. Ze zbylých $|\mathcal{S}| - |\mathcal{T}|$ množin bychom chtěli vybrat dalších $|\mathcal{S}| - |\mathcal{T}|$ prvků tak, abychom získali SRR pro $\mathcal{S}$. To uděláme podobně jako v minulém případě – uvážíme $\mathcal{S}'$, který z $\mathcal{S}$ vznikne odebráním všech množin z $\mathcal{T}$ a následným odebráním všech jejich prvků ze zbylých množin. Dále ukážeme, že $\mathcal{S}'$ má SRR.

   Analogicky jako v minulém případě můžeme uvážit libovolný podsystém $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{S}'$ a vyjádřit jej jako $\{S_1 \setminus (\bigcup \mathcal{T}), S_2 \setminus (\bigcup \mathcal{T}), \ldots, S_m \setminus (\bigcup \mathcal{T})\}$, kde jednotlivé S_i jsou prvky $\mathcal{S}$. Pak můžeme vyjádřit počet jeho prvků následovně:[17]

$$\begin{aligned}\left|\bigcup \mathcal{T}'\right| &= \left|\left(S_1 \setminus \left(\bigcup \mathcal{T}\right)\right) \cup \left(S_2 \setminus \left(\bigcup \mathcal{T}\right)\right) \cup \cdots \cup \left(S_m \setminus \left(\bigcup \mathcal{T}\right)\right)\right| \\ &= \left|(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m) \setminus \left(\bigcup \mathcal{T}\right)\right| \\ &= \left|(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m) \cup \left(\bigcup \mathcal{T}\right)\right| - \left|\bigcup \mathcal{T}\right|.\end{aligned}$$

   Přitom první množina („před znaménkem mínus“) je sjednocením $m + |\mathcal{T}|$ množin z $\mathcal{S}$, pro který platí Hallova podmínka, a tedy počet jejích prvků je alespoň $m + |\mathcal{T}|$. Z dodatečného předpokladu ale platí $|\bigcup \mathcal{T}| = |\mathcal{T}|$, takže počet prvků v $\bigcup \mathcal{T}'$ je větší nebo roven $m + |\mathcal{T}| - |\mathcal{T}| = m$, a tím pádem $\mathcal{S}'$ splňuje Hallovu podmínku. □

Poznámka. Další možnou aplikací SRR a Hallovy věty je řešení následujícího problému: Máme několik žen a několik mužů. Ženy jsou vybíravé a každá má seznam mužů, které je ochotna si vzít. Muži vybíraví nejsou a s radostí se ožení s každou dámou, které se líbí. Za jakých podmínek jde všechny ženy provdat tak, aby všechny byly šťastné? (To, že se skutečně jedná jen o přeformulování problému, který řeší Hallova věta, Ti opět necháme jako cvičení.) Díky této aplikaci se větě v angličtině říká *Hall's marriage theorem* (Hallova sňatková věta) a Hallově podmínce *Marriage condition* (sňatková podmínka).

A proč si o Hallově větě vůbec povídáme v seriálu o grafech? Protože ji lze ekvivalentně formulovat jako větu z teorie grafů.

Věta 19. (Hallova, grafová varianta) *Nechť $G = (A \cup B, E)$ je bipartitní graf, jehož všechny hrany jsou tvaru $\{a, b\}$, kde $a \in A$ a $b \in B$. Dále předpokládejme, že pro každou podmnožinu vrcholů A (označme ji P_i) platí, že počet vrcholů, které jsou hranou spojeny alespoň s jedním z vrcholů z P_i (tuto množinu označme $N(P_i)$), je větší nebo roven počtu vrcholů v P_i. Jinak řečeno, pro všechna P_i platí $|N(P_i)| \geq |P_i|$. Pak lze z E vybrat několik hran tak, že každý z vrcholů z A bude jednou z těchto hran spojen s jedním vrcholem v B a navíc budou tyto body různé.*[18]

Důkaz. Víme-li, že platí kombinatorická varianta Hallovy věty, můžeme pro libovolný graf G splňující podmínky grafové varianty uvážit systém $|A|$ množin, které pojmenujeme stejně jako vrcholy v A a pro každé $x \in A$ bude množina x definována jako $N\big(\{x\}\big)$. Pak je pro

[17] Při poslední rovnosti využíváme toho, že pro libovolné dvě množiny M, N platí $|M \setminus N| = |M \cup N| - |N|$.

[18] Tomu říkáme, že v G existuje párování pokrývající vrcholy z A.

vzniklý systém množin splněna Hallova podmínka, a tedy existuje SRR. Z E tudíž můžeme vybrat několik hran, z nichž každá bude spojovat vrchol x s reprezentantem množiny x. Tím získáme hledané párování. Vidíme tedy, že z platnosti kombinatorické varianty vyplývá platnost té grafové. Protože kombinatorickou verzi už dokázanou máme, platí i grafová varianta. $\square$

Naopak pokud platí grafová verze a máme systém množin $\mathcal{S}$ splňující podmínky kombinatorické verze, můžeme uvážit graf $G = (A \cup B, E)$, $A = \mathcal{S}$ (vrcholy z A mají stejná jména jako množiny v $\mathcal{S}$) a B jsou prvky všech množin z $\mathcal{S}$. Navíc hranu nakreslíme jen mezi S_i a vrcholy y z B, pokud $y \in S_i$. Graf G pak splňuje podmínky grafové varianty Hallovy věty, a tedy v něm existuje párování pokrývající vrcholy z A. Toto párování nám přitom vybírá SRR pro $\mathcal{S}$, takže z platnosti grafové varianty plyne platnost kombinatorické varianty, a tím pádem jsou obě věty ekvivalentní.[19]

V textu jsme použili pojem párování. Abychom tomuto slovu dali význam, uvedeme si jednu definici.

Definice 20. *Párováním* v grafu G rozumíme podmnožinu jeho hran takovou, že žádné dvě hrany z této podmnožiny nemají společný vrchol. *Perfektní párování* v grafu je takové párování, které pokrývá všechny vrcholy.

Párování si tedy můžeme představit tak, že každý vrchol buď nespojuje s žádným jiným, nebo jej spojí právě s jedním vrcholem. (Čímž vrcholy „popáruje“.) Perfektní párování pak „popáruje“ všechny vrcholy. Vybaven(a) touto znalostí se můžeš vrhnout na následující cvičení:

Cvičení 21. Nechť graf G splňuje podmínky Hallovy věty a navíc $|A| = |B|$. Ukaž, že potom v G existuje perfektní párování.

A abychom si ukázali, že Hallovu větu lze uplatnit i tam, kde bychom to na první pohled nečekali, ukážeme si, že každý latinský obdélník se dá doplnit na latinský čtverec. Předtím si ale musíme oba pojmy definovat.

Definice 22. *Latinským čtvercem* rozumíme čtvercovou mřížku $n \times n$ vyplněnou čísly $1, \ldots, n$ tak, že v každém řádku i sloupci je každé číslo použito právě jednou. *Latinským obdélníkem* rozumíme mřížku $k \times n$, $k \leq n$ (budeme se na ni koukat tak, že má k řádků a n sloupců) vyplněnou čísly $1, \ldots, n$ tak, že v každém řádku i sloupci je každé číslo použito nejvýše jednou a do každého políčka je vepsáno právě jedno číslo.

Rovnou uvádíme jeden z mnoha latinských čtverců 5×5.

2	4	5	3	1
5	1	2	4	3
1	3	4	2	5
3	2	1	5	4
4	5	3	1	2

Tvrzení 23. *Každý latinský obdélník se dá doplnit na latinský čtverec.*

Důkaz. Ukažme, že každý latinský obdélník $k \times n$, $k < n$ lze doplnit na latinský obdélník $(k + 1) \times n$. To k důkazu stačí, protože pak můžeme doplňovat řádky postupně, až dostaneme latinský čtverec $n \times n$. K důkazu využijeme grafovou variantu Hallovy věty.

[19] Přesněji (pro hnidopichy) – byly by ekvivalentní, kdybychom grafovou variantu formulovali jako ekvivalenci. My jsme ji pro jednoduchost vyslovili jen jako implikaci, ale určitě si rozmyslíš, že i její opačná implikace je ekvivalentní s příslušnou implikací kombinatorické verze.

Mějme latinský obdélník $k \times n$, $k < n$. Následným způsobem si definujeme graf $G = (V, E)$. Množina vrcholů bude $V = A \cup B$, kde $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ představuje množinu sloupců našeho obdélníku a $B = \{1, 2, \ldots, n\}$. Hranu nakreslíme mezi vrcholy a_i a j právě tehdy, když j není obsaženo v i-tém sloupci. Jiné hrany do grafu nepřidáme.

Z definice vyplývá, že stupeň vrcholu a_i je počet čísel, která se nevyskytují v i-tém sloupci. Pro všechna i je tedy tento stupeň $n - k$. Stupeň vrcholu j je potom počet sloupců, ve kterých není j obsaženo. Avšak j je obsaženo v každém z k řádků právě jednou a v žádném sloupci se nenachází dvakrát. Je tedy obsaženo v k sloupcích, a proto je stupeň j pro všechna j také roven $n - k$.

Máme tedy bipartitní graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň $n - k$. Ukažme, že G splňuje podmínky Hallovy věty. Vezměme libovolnou m-prvkovou podmnožinu A a označme ji X. Pak z X vychází přesně $m(n - k)$ hran, které vedou do $N(X)$. Každý vrchol v $N(x)$ má ale stupeň $n - k$, takže může z těchto hran „přijmout“ nejvýše $n - k$. Proto musí být v $N(X)$ alespoň m vrcholů, čímž máme splněny podmínky Hallovy věty.

Navíc triviálně $|A| = |B|$, tudíž existuje perfektní párování grafu G. Nyní můžeme doplnit další řádek obdélníku tak, že na jeho i-tou pozici umístíme číslo, které je v grafu G spárované s a_i. Vzniklý obdélník pak zůstane latinský. $\square$

Ještě můžeme prozradit, že pokud nalezneme dostatek latinských čtverců splňujících podmínku ortogonality[20], umíme z nich nepřímo vytvořit kód odolný vůči několika málo chybám při přenosu. Tímto bychom se ale příliš vzdálili od grafů, proto se jimi víc zabývat nebudeme.

K závěru

Těmito řádky se s Tebou rozloučíme. Těší nás, že jsme Tě neztratili někde v průběhu a že ses zdárně dočetl(a) až sem.

Podobně jako v prvním dílu, i teď nabízíme řešení cvičení pro kontrolu:

4. $\chi(K_n) = n$, $\chi'(K_n) = n$ pro liché n a $n - 1$ pro sudé n; $\chi(C_n) = \chi'(C_n) = 3$ pro liché n a 2 pro sudé n; $\chi(P_n) = \chi'(P_n) = 2$; $\chi(Q_n) = 2$, $\chi'(Q_n) = n$.

6. Jsou to právě kružnice.

Věříme, že se Ti tento díl líbil, a přejeme hodně štěstí v soutěžní sérii. Doufáme v opětovné setkání nad závěrečným dílem, kde se podíváme na mladý, ale hezký svět průnikových grafů.

---

[20] Volně řečeno: dva čtverce jsou *ortogonální*, pokud „průchodem“ všech souřadnic čtverce a zapsáním dvojic hodnot z obou čtverců na daném místě dostaneme všech n^2 možných dvojic.