Letem grafovým světem

3. seriálová série Termín odeslání: 13. dubna 2015

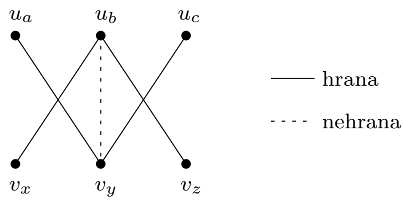
Úloha 1. (5 bodů)

Nalezněte souvislý permutační graf, jenž není intervalový ani bipartitní.

Úloha 2. (5 bodů)

Mějme bipartitní graf G s partitami U a V. Ukažte, že G umíme reprezentovat jako průnikový graf úseček pouze dvou různých směrů právě tehdy, když vrcholy lze očíslovat $U = \{u_1, \ldots, u_k\}$ a $V = \{v_1, \ldots, v_l\}$ tak, aby pro žádnou volbu $1 \leq a < b < c \leq k$, $1 \leq x < y < z \leq l$ nenastala situace na obrázku (zbylé dvojice mohou být propojeny libovolně). Jinými slovy, za předpokladu splnění uvedených nerovností platí implikace

$$\{u_a, v_y\}, \{u_c, v_y\}, \{u_b, v_x\}, \{u_b, v_z\} \in E \Rightarrow \{u_b, v_y\} \in E.$$



Úloha 3. (5 bodů)

Nechť G je doplněk intervalového grafu. Určete jeho barevnost, pokud víte, že velikost jeho největšího úplného podgrafu je n.[1]

[1] *Úplný podgraf* je podgraf izomorfní úplnému grafu; graf může obsahovat více úplných podgrafů stejné velikosti.

Letem grafovým světem

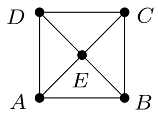
3. seriálová série Vzorové řešení

Úloha 1. (20; 17; 4,00; 5,0)

Nalezněte souvislý permutační graf, jenž není intervalový ani bipartitní.

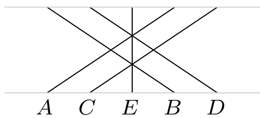
(Martin „E.T.“ Sýkora)

Řešení:
Ukažme, že zadání vyhovuje například graf na následujícím obrázku:



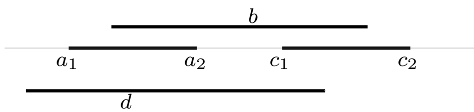
Graf G

Ihned vidíme, že je souvislý, a snadno si též rozmyslíme, že je permutační. „Permutační“ reprezentace grafu G může vypadat takto:



Dále si všimneme, že graf G obsahuje kružnici na lichém počtu vrcholů – konkrétně CED – tedy podle věty 38 z prvního dílu seriálu není bipartitní. Stačí tak ukázat, že není ani intervalový. To dokážeme sporem.

Pro spor předpokládejme, že má intervalovou reprezentaci. Odebráním intervalu odpovídajícího vrcholu E bychom dostali intervalovou reprezentaci indukovaného podgrafu $ABCD$, takže i tento podgraf by byl intervalový. Ukážeme ale, že to není možné: Nechť úsečky $a = (a_1, a_2)$ a $c = (c_1, c_2)$ reprezentují po řadě vrcholy A a C. Protože mezi těmito vrcholy nevede hrana, jsou úsečky a a b disjunktní. BÚNO můžeme předpokládat, že a leží „nalevo“ od b. Pak ale úsečka b reprezentující vrchol B musí obsahovat nějaký bod z a i c (protože vrchol B je spojen hranou jak s vrcholem A, tak s vrcholem C), tedy musí speciálně obsahovat bod a_2. Tentýž bod ale musí z obdobných důvodů obsahovat i úsečka d reprezentující vrchol D. Tím pádem ale úsečky b a d nejsou disjunktní. To je ve sporu s tím, že mezi vrcholy B a D nevede hrana.



Ilustrační obrázek

Tím jsme dokázali, že graf G není intervalový, a tedy vyhovuje zadání.

Poznámky:

Většina řešitelů si s úlohou poradila bez větších problémů, všechna řešení byla víceméně shodná se vzorovým a lišila se nanejvýš použitím jiného (ale podobného) grafu nebo nepatrně stručnější argumentací. Za to jsem samozřejmě body nestrhával, stejně tak jako za jistou drobnou chybu, které se dopustilo několik řešitelů. Ti tvrdili, že jejich graf má za podgraf C_4, a proto není intervalový. Problém je v tom, že těmto řeštelům vypadlo slovo „indukovaný“ – například graf K_4 zjevně intervalový je, a přesto má C_4 za (neindukovaný) podgraf.

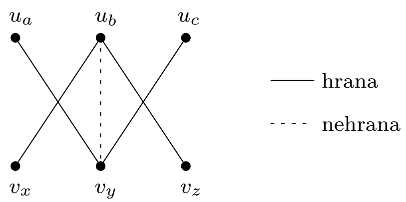
(Martin „E.T.“ Sýkora)

Úloha 2.

(5; 5; 4,60; 5,0)

Mějme bipartitní graf G s partitami U a V. Ukažte, že G umíme reprezentovat jako průnikový graf úseček pouze dvou různých směrů právě tehdy, když vrcholy lze očíslovat $U = \{u_1, \ldots, u_k\}$ a $V = \{v_1, \ldots, v_l\}$ tak, aby pro žádnou volbu $1 \le a < b < c \le k$, $1 \le x < y < z \le l$ nenastala situace na obrázku (zbylé dvojice mohou být propojeny libovolně). Jinými slovy, za předpokladu splnění uvedených nerovností platí implikace

$$\{u_a, v_y\}, \{u_c, v_y\}, \{u_b, v_x\}, \{u_b, v_z\} \in E \Rightarrow \{u_b, v_y\} \in E.$$



(Peter „πtr“ Korcsok)

Řešení:

Nejprve dokážeme, že graf se správným očíslováním vrcholů lze reprezentovat jako průnikový úseček dvou různých směrů. Uvažme jedno konkrétní očíslování vrcholů u_1, u_2, …, u_k a v_1, v_2, …, v_l. Vrchol u_i bude reprezentován vodorovnou úsečkou se souřadnicí $y = i$. Krajní body této úsečky budou odpovídat nejmenšímu, resp. největšímu indexu souseda vrcholu u_i vzhledem k očíslování vrcholů V. Například je-li vrchol u_4 spojen s vrcholy v_2, v_7, v_9, bude reprezentován úsečkou s krajními body $(2, 4)$ a $(9, 4)$. Analogicky budou vrcholy partity V reprezentovány svislými úsečkami. Vrcholy stupně maximálně jedna ale musíme vyřešit zvlášť: izolované vrcholy můžeme reprezentovat úsečkami nalevo od všech ostatních úseček, případně nad nimi; listy (vrcholy stupně jedna) jako krátké úsečky (například délky 0,5) kolem bodu, kterým mají procházet.

Zbývá ukázat, že popsaný průnikový graf obsahuje právě požadované hrany. Byla-li v G hrana $\{u_i, v_j\}$, určitě úsečka odpovídající u_i prochází souřadnicí $x = j$ a podobně úsečka odpovídající v_j prochází souřadnicí $y = i$. Zmíněné úsečky se protínají v bodě (j, i) a v uvedeném průnikovém grafu mezi nimi bude hrana. Dále uvažujme, že mezi vrcholy u_i a v_j nebyla v G hrana. Pro spor předpokládejme, že v průnikovém grafu mezi nimi hrana je. Tato hrana musí odpovídat průsečíku příslušných úseček v bodě (j, i). To znamená, že existují a, c, x, z takové, že

$$1 \le a < i < c \le k, \quad 1 \le x < j < z \le l$$

(a, c, x, z mohou odpovídat krajním bodům úseček představujících vrcholy v_j, u_i) a nastává zakázaná situace ze zadání (při $b = i$, $y = j$). To je ve sporu s předpokladem a důkaz této části je hotov.

V druhé části důkazu ukážeme, jak očíslovat vrcholy grafu reprezentovaného jako průnikový graf úseček dvou různých směrů. Předpokládejme jednodušší situaci, kde všechny vrcholy odpovídající úsečkám v jednom směru musejí být z téže partity[1]. Jednotlivé rovnoběžné úsečky očíslujeme postupně ve směru jejich společné kolmice. Mějme nyní libovolné $1 \leq a < b < c \leq k, 1 \leq x < y < z \leq l$ a nechť úsečka b se protíná s x a se z a zároveň y se protíná s a a s c. Potom se již nutně musí v našem uspořádání protínat také b s y.

Pro pořádek bychom měli ještě dokázat, že pokud má bipartitní graf reprezentaci pomocí úseček dvou směrů, pak má i takovou, kde navíc žádné dvě úsečky neleží na jedné přímce. Tuto část jsme ale nezamýšleli jako součást zadání a našli jsme pro ni jen poměrně dlouhý a ne moc hezký důkaz, proto ho tady neuvedeme. Za chybu se omlouváme. Ale máme pro Tebe nabídku: Můžeš toto tvrzení pojmout jako dobrovolné cvičení. Pokud autory seriálu přesvědčíš o tom, žes ho vyřešil, a navíc budeš první, můžeš se těšit na čokoládu.

Poznámky:

Úlohu odeslalo velice málo lidí, nejspíše kvůli děsivě znějícímu zadání. Na druhou stranu v podstatě všechna řešení byla správná, samotná úloha tedy tak náročná nebyla.

(Filip Hlásek)

Úloha 3.

(6; 5; 4,17; 5,0)

Nechť G je doplněk intervalového grafu. Určete jeho barevnost, pokud víte, že velikost jeho největšího úplného podgrafu je n.[2] *(Peter „πtr“ Korcsok)*

Řešení:

Zo zadania vieme, že graf G obsahuje úplný podgraf veľkosti n – automaticky teda potrebujeme aspoň n farieb. Ukážeme, že nám tento počet stačí.

Pretože G je doplnok intervalového grafu, môžeme si vrcholy predstavovať ako intervaly určitej priamky, pričom rovnakú farbu môžu dostať iba tie, ktoré majú neprázdny prienik. Bude sa nám hodiť označiť jeden „koniec“ tejto priamky ako ľavý a ten druhý ako pravý – potom budeme tvrdiť, že interval $\langle a, b\rangle$ je „ostro vľavo“ od intervalu $\langle c, d\rangle$, pokiaľ platí $b < c$.

Vytvorme množinu M_1, kam dáme všetky vrcholy, ktoré nemajú žiaden iný interval ostro vľavo. Každá dvojica z týchto intervalov sa musí nutne pretínať, teda ich môžeme všetky nafarbiť farbou 1 a ďalej ich už uvažovať nemusíme. Tento krok teraz budeme opakovať: ako množinu M_2 označíme opäť všetky vrcholy, ktoré nemajú (v grafe $G \setminus M_1$) žiaden interval ostro vľavo. Znovu platí, že sa každá dvojica intervalov v M_2 musí pretínať, preto im môžeme dať farbu 2. Takto pokračujeme až do momentu, keď budú všetky vrcholy nafarbené. Dostaneme tak množiny $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Že ich je aspoň n, už vieme, ale prečo ich nebude viac?

Na to si stačí uvedomiť, že pre každý interval I z M_i existuje nejaký interval I' v M_{i-1}, ktorý je od neho ostro vľavo – inak by sme pri vytváraní množiny M_{i-1} zaradili aj interval I. Ak by sme teda potrebovali viac ako n množín, vieme postupne nájsť $n+1$ navzájom disjunktných intervalov, čo je ale spor s veľkosťou najväčšieho úplného podgrafu.

---

[1] Bohužel nám ze zadání vypadl předpoklad, že žádné dvě úsečky neleží v jedné přímce. Naštěstí s tím ale všichni řešitelé počítali.

[2] *Úplný podgraf* je podgraf izomorfní úplnému grafu; graf může obsahovat více úplných podgrafů stejné velikosti.

Poznámky:
Väčšina z došlých riešení postupovala podobne, ako v našom riešení. *Jakub Löwit* sa ale rozhodol využiť znalosti z celého seriálu a existenciu ofarbenia s n farbami dokazoval pomocou Hallovej vety. Toto riešenie tiež funguje, ale je výrazne komplikovanejšie a dlhšie na napísanie.

(Peter „πtr“ Korcsok)