Letem grafovým světem

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE | TERMÍN ODESLÁNÍ: 9. ÚNORA 2015

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)
Jakou hranovou barevnost má bipartitní graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň d?

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)
Mějme libovolný rovinný graf G, jenž neobsahuje most a jehož všechny vrcholy mají stupeň tři. Ukažte, že jeho duální graf G^* je vrcholově 4-obarvitelný právě tehdy, když je G hranově 3-obarvitelný.

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)
Nechť $S_i = \{i-1, i, i+1\} \cap \{1, \ldots, n+1\}$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Kolik systémů různých reprezentantů má množinový systém $\{S_1, \ldots, S_n\}$?

Letetem grafovým světem

2. seriálová série Vzorové řešení

Úloha 1. (30; 17; 2,73; 2,0)

Jakou hranovou barevnost má bipartitní graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň d?

(Peter „πtr“ Korcsok)

Řešení:

Obarvíme-li hrany daného grafu méně než d barvami, povedou z libovolného vrcholu alespoň dvě hrany stejné barvy. Hranová barevnost grafu je tedy alespoň d.

Dále ukážeme, že d barev na obarvení každého takového grafu stačí. Pro $d = 0$ je hranová barevnost grafu triviálně rovna nule. Dále uvažujme pouze kladné d. Dokážeme, že ve zkoumaném grafu existuje perfektní párování. Hrany toho párování obarvíme jednou barvou, a potom už zbývá jen obarvit graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň $d - 1$. Stejně budeme postupovat dále, dokud neobarvíme všechny hrany[1].

Zbývá ukázat, že zkoumaný graf má perfektní párování. K tomu využijeme Hallovu větu[2]. Nejprve ověřme, že náš graf splňuje její předpoklady. Uvažme dvě partity grafu A, B a libovolnou podmnožinu vrcholů A (označme ji P). Sporem ukážeme, že množina P má alespoň $|P|$ sousedů v množině B. Z P vede celkem $d \cdot |P|$ hran, a pokud by vedly do méně než $|P|$ vrcholů z B, alespoň jeden ze sousedů by měl stupeň větší než d. Z Hallovy věty dostáváme takovou množinu hran, že z každého vrcholu z A vede právě jedna hrana, a ty navíc vedou do různých vrcholů v B. Neboť z každého vrcholu grafu vede stejný počet hran, platí $|A| = |B|$ a jedná se o perfektní párování, čímž je dokončen důkaz obarvitelnosti hran grafu d barvami.

Poznámky:

Překvapilo mě, jak málo řešení bylo správných. Ta chybná se často snažila postupovat matematickou indukcí. Z grafu se stupni vrcholů d vyrobila grafy se stupni $d + 1$ a z obarvení původního grafu vyrobila obarvení nového grafu. Bohužel není jisté, zda takto vytvoříme všechny grafy. Pouze ukazujeme, že všechny obarvitelné grafy umíme obarvit postupně. Jedná se o nechvalně známý typ důkazu kruhem. *(Filip Hlásek)*

Úloha 2. (14; 7; 2,57; 3,0)

Mějme libovolný rovinný graf G, jenž neobsahuje most a jehož všechny vrcholy mají stupeň tři. Ukažte, že jeho duální graf G^* je vrcholově 4-obarvitelný právě tehdy, když je G hranově 3-obarvitelný.

(Peter „πtr“ Korcsok)

[1] Formálně bychom to mohli obhájit matematickou indukcí: pro všechny grafy se stupni vrcholů $d - 1$ obarvení existuje, proto pro každý graf se stupni vrcholů d existuje také.

[2] Viz úvodní text k sérii, str. 10, **Věta 19.** (Hallova, grafová varianta)

Řešení:

Graf G^* je vrcholově 4-obarvitelný, právě když lze v grafu G obarvit stěny pomocí čtyř barev tak, aby spolu nesousedily žádné dvě stejnobarevné stěny. Pro obarvování stěn použijeme modrou, žlutou, zelenou a bílou barvu. Přitom modrou a žlutou budeme považovat za základní barvy, zelenou budeme vnímat jako modrou a žlutou současně a bílé zůstanou stěny, které neobarvíme jinou barvou. Stejné barvy použijeme na obarvování hran, ale vyhneme se bílé. Nyní přeformulujeme zadání do této terminologie.

Obarvení hran grafu G vyhovuje, právě když jsou splněny následující podmínky:

(i) Každá hrana je obarvená alespoň jednou základní barvou.
(ii) Oba podgrafy tvořené jednou základní barvou jsou 2-regulární (tedy všechny vrcholy mají stupeň 2).

Skutečně, máme-li modro-žluto-zelené hranové obarvení grafu G, kde jsou u každého vrcholu právě tyto tři barvy, zjevně platí obě podmínky. Naopak, pokud platí podmínky, u každého vrcholu máme dvě modré hrany, třetí musí být žlutá. Další žlutá se překryje s právě jednou modrou, jedná se tedy o vyhovující obarvení.

Obarvení stěn vyhovuje, právě když pro každou hranu existuje základní barva, která je na právě jedné stěně u této hrany.

Nyní zbývá ukázat ekvivalenci přeformulovaných podmínek. Nejdříve uvažme vyhovující obarvení stěn. Pro každou základní barvu se podíváme na oblast, která jí je obarvena, a její hranici touto barvou obtáhneme. Z toho, že se jednalo o vyhovující obarvení, plyne podmínka (i). Jakékoli obtáhnutí oblasti bude mít v každém vrcholu sudý stupeň, přičemž díky podmínce (i) tento stupeň nemůže být roven 0, tedy platí i podmínka (ii).

Naopak, když máme obarvení hran splňující obě podmínky, bude díky podmínce (ii) podgraf tvořený jednou základní barvou b vždy stěnově 2-obarvitelný. Obarvíme tedy stěny pomocí barvy b a bílé. Kvůli podmínce (i) se bude jednat o vyhovující obarvení stěn.

Poznámky:

Naprostá většina řešitelů místo důkazu druhé implikace použila větu o čtyřech barvách pro G^*. To je jistě korektní řešení, ale je nutné říct, že duální graf rovinného grafu je také rovinný, a navíc se vypořádat s tím, že duální graf je obecně multigraf. Je tedy potřeba buď vynechat smyčky a násobnost hran (a zdůvodnit, proč nám to nevadí), nebo dokázat, že díky tomu, že G neobsahuje most a všechny vrcholy jsou stupně tři, smyčky ani násobné hrany nevzniknou (což je o dost těžší). *(Martin Töpfer)*

Úloha 3.

(15; 14; 4,20; 5,0)

Nechť $S_i = \{i-1, i, i+1\} \cap \{1, \ldots, n+1\}$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Kolik systémů různých reprezentantů má množinový systém $\{S_1, \ldots, S_n\}$? *(Peter „πtr“ Korcsok)*

Řešení:

Zadaný množinový systém vypadá takto:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \{1, 2\},\\
S_2 &= \{1, 2, 3\},\\
S_3 &= \{2, 3, 4\},\\
&\;\vdots\\
S_n &= \{n-1, n, n+1\}.
\end{aligned}
$$

Označme $f(n)$ počet SRR tohoto systému pro dané n.

Nejprve spočítáme $f(n)$ pro malá n. Pro $n = 1$ máme pouze množinu $S_1 = \{1, 2\}$, tedy dva různé SRR. Pro $n = 2$ máme množiny S_1 a S_2; z S_1 můžeme opět vybrat 1 nebo 2. V obou případech pak máme dvě možnosti výběru reprezentanta pro S_2, takže $f(2) = 4$.

Indukcí dokážeme, že $f(n) = F_{n+3} - 1$, kde F_i je i-tý člen Fibonacciho posloupnosti. Pro $n = 1, 2$ už jsme to ověřili. Předpokládejme, že $n > 2$ a rovnost platí pro $n - 1$ a $n - 2$, a uvažme množinový systém pro n. Jak pro něj můžeme vybrat systém různých reprezentantů? Rozebereme tři případy:

(i) Z S_1 vybereme za reprezentanta 1. Pak nám zbývá vybrat reprezentanty pro systém $S_2 \setminus \{1\}, S_3, S_4, \ldots, S_n$, což můžeme udělat $f(n-1)$ způsoby.

(ii) Z S_1 vybereme 2 a z S_2 vybereme 1. Pak nám zbývá systém $S_3 \setminus \{2\}, S_4, S_5, \ldots, S_n$, který má $f(n-2)$ SRR.

(iii) Z S_1 vybereme 2 a z S_2 vybereme 3. Z S_3 už pak musíme nutně vybrat 4, z S_4 musíme zvolit 5 atd. Konečně z S_n nezbývá než zvolit $n + 1$. Takový SRR tedy existuje jen jeden.

Z toho plyne, že

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) + 1 = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} - 1 + 1 = F_{n+3} - 1,$$

což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:

Systém různých reprezentantů byl v seriálu poněkud nešťastně definován jako množina,[3] což umožnilo vyložit si zadání tak, že nezáleží na tom, které množině přiřadíme kterého reprezentanta. Tento výklad (s řešením $f(n) = n + 1$) jsem uznával také, přestože nebyl úmyslný a dost úlohu ulehčil.

Navzdory tomuto omylu ale většina řešitelů kupodivu úlohu pochopila tak, jak byla původně myšlena. Vyjádřit $f(n)$ pomocí Fibonacciho posloupnosti zvládla jen menší část z nich, ale většina přišla na správný rekurentní vztah, což k hodnocení plným počtem bodů stačilo.

(Ondra Cífka)

[3] Někdy se SRR definuje jako prostá funkce, která každé množině ze systému přiřadí nějaký její prvek.