Kružnice

2. podzimní série Termín odeslání: 10. listopadu 2014

Úloha 1. (3 body)
Nakreslete v rovině dvanáct kružnic tak, aby se každá z nich dotýkala právě pěti dalších.

Úloha 2. (3 body)
Filip si nakreslil trojúhelník ABC a na jeho nejdelší straně BC našel body K a L tak, aby platilo $|AB| = |BK|$ a $|AC| = |CL|$. Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku AKL splývá se středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

Úloha 3. (3 body)
Helča si pro změnu nakreslila trojúhelník DEF s vnitřními úhly $|\sphericalangle FDE| = 70°$, $|\sphericalangle DEF| = 60°$ a $|\sphericalangle EFD| = 50°$. Poté sestrojila přímky o, p a q, které byly po řadě osami úseček EF, FD a DE. Dále zobrazila bod D v osové souměrnosti podle přímky o, bod E podle přímky p a konečně bod F podle přímky q. Získala tak body D', E' a F'. Jaké jsou vnitřní úhly trojúhelníka $D'E'F'$?

Úloha 4. (5 bodů)
Je dán trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu A. Označme D patu jeho výšky z vrcholu A. Pro každý vnitřní bod X úsečky AD sestrojme bod Y tak, aby platilo $|\sphericalangle YBC| = 2|\sphericalangle XBC|$, $|\sphericalangle YCB| = 2|\sphericalangle XCB|$ a body X, Y ležely ve stejné polorovině určené přímkou BC. Dokažte, že hodnota $|YC| - |YB|$ nezávisí na volbě bodu X.

Úloha 5. (5 bodů)
Dokažte, že v tečnovém lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) se kružnice s průměry AD a BC dotýkají.

Úloha 6. (5 bodů)
Olin si vzal iracionální číslo $x \in (0, 1)$. Na kružnici o obvodu 1 zvolil libovolně bod X_1 a poté postupně ve směru hodinových ručiček vyznačil body $X_2, \ldots, X_n$ tak, aby délka oblouku mezi každými dvěma po sobě jdoucími byla x. Nakonec mezi body $X_1, \ldots, X_{n-1}$ našel X_a a X_b – sousedy bodu X_n. Dokažte, že $a + b \le n$.

Úloha 7. (5 bodů)
Je dán trojúhelník $A_1A_2A_3$ a sedm kružnic $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_7$, které splňují následující dvě podmínky:

(i) kružnice ω_1 prochází body A_1 a A_2, kružnice ω_2 body A_2 a A_3, kružnice ω_3 body A_3 a A_1 a tak dále, až kružnice ω_7 prochází body A_1 a A_2,

(ii) kružnice ω_i a ω_{i+1} mají vnější dotyk pro všechna $i = 1, 2, \ldots, 6$.

Dokažte, že kružnice ω_1 a ω_7 splývají.

Úloha 8. (5 bodů)
Je dána jednotková sféra. Najděte reálné číslo x takové, že pro každé $l < x$ lze na sféru nakreslit tři neprotínající[1] se oblouky hlavních kružnic[2] délky l, ale pro žádné $L > x$ už to možné není.

[1] Nesmějí se ani dotýkat.

[2] Hlavní kružnice je kružnice ležící na sféře, jejíž střed je zároveň středem sféry.

Kružnice

2. podzimní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

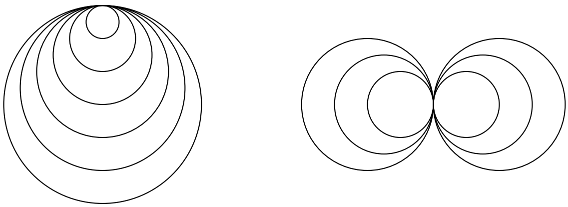
(134; 128; 2,90; 3,0)

Nakreslete v rovině dvanáct kružnic tak, aby se každá z nich dotýkala právě pěti dalších.

(Martina Vaváčková)

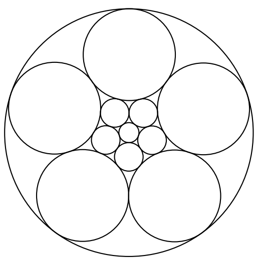
První řešení:

Sestrojíme dvě šestice kružnic tak, aby se všechny kružnice ze stejné šestice dotýkaly v jednom bodě a aby se žádné dvě kružnice z různých šestic nedotýkaly. Dostaneme dvanáct kružnic takových, že se každá dotýká pěti dalších.



Druhé řešení:

Umístíme deset středů kružnic do vrcholů dvou vhodně zvolených pravidelných pětiúhelníků a doplníme dvě kružnice jako na obrázku. Každá ze znázorněných kružnic se dotýká pěti dalších.



Poznámky:

Většina řešitelů měla úlohu samozřejmě správně. Někteří využili toho, že úkolem bylo nakreslit vyhovující obrázek a nebylo potřeba popisovat konstrukci, tudíž si troufli na komplikovanější rozmístění kružnic.

Řešení, která jsem neuznala za správná, spočívala ve splývajících totožných kružnicích. Ty mají nekonečně mnoho společných bodů, tudíž se nedotýkají, a navíc je považujeme za jednu.

(Míša Hubatová)

Úloha 2.

(126; 117; 2,80; 3,0)

Filip si nakreslil trojúhelník ABC a na jeho nejdelší straně BC našel body K a L tak, aby platilo $|AB| = |BK|$ a $|AC| = |CL|$. Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku AKL splývá se středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:
Ze zadání víme, že trojúhelníky ABK a ACL jsou rovnoramenné (se základnami AK, resp. AL). Pro rovnoramenný trojúhelník platí, že osa úhlu sevřeného jeho rameny splývá s osou základny. Tedy v našem případě osa úhlu při vrcholu B splývá s osou strany AK a osa úhlu při vrcholu C splývá s osou strany AL. Pak si již stačí jen vzpomenout, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na průsečíku os úhlů při vrcholech B a C a že střed kružnice opsané trojúhelníku AKL leží na průsečíku os stran AK a AL. Tedy středy obou kružnic splývají.

Poznámky:
Jako obvykle se našlo pár řešení, která se snažila „dokázat“ úlohu narýsováním. Jeden řešitel se vydal cestou počítání úhlů, které bylo velmi vyčerpávající, ale nakonec se dobral správného výsledku. Naprostá většina vyřešila úlohu bez problémů, často přímo vzorově. :-)

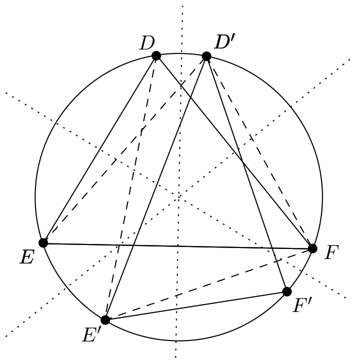
(Kristýna „Kikina“ Zemková)

Úloha 3.

(87; 60; 2,03; 3,0)

Helča si pro změnu nakreslila trojúhelník DEF s vnitřními úhly $|\sphericalangle FDE| = 70°$, $|\sphericalangle DEF| = 60°$ a $|\sphericalangle EFD| = 50°$. Poté sestrojila přímky o, p a q, které byly po řadě osami úseček EF, FD a DE. Dále zobrazila bod D v osové souměrnosti podle přímky o, bod E podle přímky p a konečně bod F podle přímky q. Získala tak body D', E' a F'. Jaké jsou vnitřní úhly trojúhelníka $D'E'F'$? *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:
Osa úsečky DD' prochází středem kružnice opsané $\triangle DEF$, a tedy jsou body D a D' od tohoto středu stejně vzdálené. Obdobně to platí i pro body E, E', resp. F, F'. Z toho plyne, že všech těchto šest bodů leží na jedné kružnici.



Osová souměrnost podle osy úsečky DD' zobrazí $\triangle FDE$ na $\triangle ED'F$, takže tyto dva trojúhelníky jsou podobné. Z toho získáme, že

$$|\sphericalangle DED'| = |\sphericalangle FED| - |\sphericalangle FED'| = 60° - 50° = 10°$$

a podobně

$$|\sphericalangle FEF'| = |\sphericalangle F'ED| - |\sphericalangle FED| = 60° - 50° = 10°.$$

Jelikož body leží na kružnici, tak

$$|\sphericalangle DED'| = |\sphericalangle DE'D'| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle FEF'| = |\sphericalangle FE'F'|.$$

Nyní už snadno dopočítáme, že

$$|\sphericalangle D'E'F'| = |\sphericalangle DE'F| - |\sphericalangle DE'D'| + |\sphericalangle F'E'F| = 60^\circ - 10^\circ + 10^\circ = 60^\circ.$$

Obdobně dopočítáme i velikosti zbylých úhlů $|\sphericalangle D'F'E'| = 80^\circ$ a $|\sphericalangle E'D'F'| = 40^\circ$.

Poznámky:

S úlohou si většina z vás poradila hezky. Někteří poslali jen obrázek s popiskem, že doplňovali úhly, až to vyšlo. Na obrázku bylo často hodně vyznačených úhlů, ale nešlo poznat, jestli si řešitelé obrázek nakreslili v GeoGebře, nebo počítali opravdu úporně. Za taková řešení jsem proto moc bodů nedával. *(Kuba Svoboda)*

Úloha 4.

(71; 54; 3,79; 5,0)

Je dán trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu A. Označme D patu jeho výšky z vrcholu A. Pro každý vnitřní bod X úsečky AD sestrojme bod Y tak, aby platilo $|\sphericalangle YBC| = 2|\sphericalangle XBC|$, $|\sphericalangle YCB| = 2|\sphericalangle XCB|$ a body X, Y ležely ve stejné polorovině určené přímkou BC. Dokažte, že hodnota $|YC| - |YB|$ nezávisí na volbě bodu X. (Pepa Tkadlec)

Řešení:

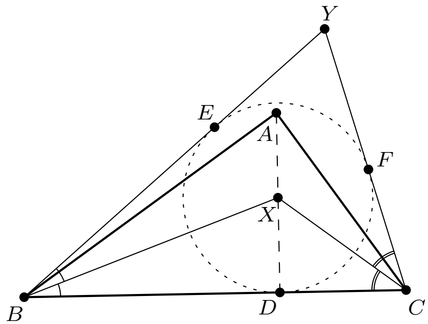
Vzhledem k podmínkám úlohy jsou přímky BX a CX osy vnitřních úhlů při vrcholech B, C trojúhelníku BCY. Průsečík BX a CX je tudíž střed kružnice vepsané trojúhelníku BCY. Označme si po řadě E a F body dotyku kružnice vepsané se stranami BY a CY. Vedeme-li z bodu dvě tečny ke kružnici, pak vzdálenost tohoto bodu od obou bodů dotyku je stejná. Proto

$$|EY| = |FY|, \quad |BE| = |BD| \quad \text{a} \quad |CF| = |CD|.$$

Rozdíl tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$|CY| - |BY| = |CF| + |FY| - |BE| - |EY| = |CD| - |BD|.$$

Poloha bodu D nezávisí na volbě bodu X, proto ani rozdíl $|CD| - |BD|$ na ní nezávisí.



Poznámky:

Většina řešení se opírala o stejnou myšlenku jako autorské řešení, nicméně mnoho z nich mělo společný neduh – často se rovnosti zmíněné v řešení objevily bez jakéhokoliv vysvětlení. Ačkoliv jsem za toto body nestrhával, je vždy dobré (alespoň krátce) zmínit, proč vlastnost platí. Dále se objevilo řešení využívající analytickou geometrii a několik hutných řešení, která využívala goniometrii. Bohužel několik řešitelů nabylo názoru, že bod Y musí ležet na polopřímce DA, což obecně není pravda. Tato úvaha velmi efektivně pohřbila další možný postup. Přes všechny tyto problémy lze řici, že si většina řešitelů s úlohou poradila. *(Honza Krejčí)*

Úloha 5. (116; 105; 4,55; 5,0)

Dokažte, že v tečnovém lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) se kružnice s průměry AD a BC dotýkají.

(Pepa Tkadlec)

Řešení:

Z úvodního textu k sérii víme, že pro tečnový čtyřúhelník je součet délek obou dvojic protilehlých stran stejný. Pro tečnový lichoběžník $ABCD$ tedy platí, že $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$. Označme K střed strany BC a L střed strany AD. Body K a L jsou pak středy kružnic nad průměry BC a AD. Úsečka KL je střední příčkou lichoběžníka, a proto platí, že

$$|KL| = \frac{|AB| + |CD|}{2} = \frac{|BC| + |AD|}{2}.$$

Poloměr kružnice nad BC je roven $\frac{1}{2}|BC|$ a poloměr kružnice nad AD je $\frac{1}{2}|AD|$. Sočet poloměrů obou kružnic je roven vzdálenosti jejich středů a z toho již plyne, že se tyto kružnice dotýkají.

Poznámky:

Většina řešitelů sepsala řešení podobné vzorovému. Někteří dokonce dokázali, že se kružnice s průměry BC a AD dotýkají ve středu kružnice vepsané lichoběžníku $ABCD$. To však úloha nepožadovala. Úloha byla jednoduchá, a tak téměř všichni obdrželi plný počet bodů. *(Martin Hora)*

Úloha 6. (33; 11; 1,82; 1,0)

Olin si vzal iracionální číslo $x \in (0, 1)$. Na kružnici o obvodu 1 zvolil libovolně bod X_1 a poté postupně ve směru hodinových ručiček vyznačil body $X_2, \ldots, X_n$ tak, aby délka oblouku mezi každými dvěma po sobě jdoucími byla x. Nakonec mezi body $X_1, \ldots, X_{n-1}$ našel X_a a X_b – sousedy bodu X_n. Dokažte, že $a + b \leq n$. *(Alexander „Olin“ Slávik)*

Řešení:

Nejprve si dokažme, že žádné dva body nemohou splývat, tedy že pro libovolná navzájem různá $p, q \leq n$ platí $X_p \neq X_q$. (Z tohoto pozorování vyplývá, že je smysluplné definovat sousedy nějakého bodu, a navíc jej v dalším řešení využijeme.) Kdyby platilo $X_p = X_q$, pak by nutně $(p - q)x = z$ pro nějaké z celé, tedy $x = \frac{z}{p-q}$. A protože i $p - q$ je celé nenulové, bylo by x racionální, což je spor se zadáním.

Nyní se můžeme pustit do samotného důkazu. Postupujme sporem a předpokládejme, že pro dané sousedy bodu X_n platí $a + b > n$. Dále bez újmy na obecnosti předpokládejme, že X_b je soused X_n proti směru hodinových ručiček (jinak si X_a přeznačíme na X_b a naopak). Budeme chtít ukázat, že na oblouku X_bX_a obsahujícím X_n leží ještě nějaký jiný Olinem vyznačený bod X_c. Ten by pak ležel buď na oblouku X_bX_n nebo X_nX_a (jakožto podobloucích oblouku X_bX_a obsahujícího X_n) a jeden z bodů X_a, X_b by nebyl sousedem X_n. Tím bychom dostali kýžený spor. Ukažme, že $c = a - (n - b)$.

Z předpokladu $a + b > n$ snadno získáme $a - (n - b) > 0$ a z $a < n$, $b < n$ dostaneme $a - (n - b) = a + b - n < n$, takže bod $X_{a-(n-b)}$ jsme na kružnici někam vyznačili. Navíc z faktu $a - (n - b) < n$ a pozorování v prvním odstavci dostáváme $X_{a-(n-b)} \neq X_n$. Dále si uvědomme, že když z bodu X_n přejdeme do bodu X_b, snížíme index o $n - b$ a přitom se posuneme o určitou vzdálenost y proti směru hodinových ručiček. Při přechodu z X_a do $X_{a-(n-b)}$ také snížíme index o $n - b$ a tím pádem se také posuneme o y proti směru hodinových ručiček. Protože je ale vzdálenost X_aX_b proti směru hodinových ručiček větší než y, leží bod $X_{a-(n-b)}$ skutečně uvnitř oblouku X_bX_a obsahujícího X_n a není roven bodu X_n, čímž získáváme hledaný spor.

Poznámky:

První důležitou poznámkou je fakt, že (ač to zadání nezmiňovalo) musíme předpokládat $n \geq 2$, aby měla úloha smysl. Protože se ale jedná o speciální degenerovaný případ, do hodnocení jsem jeho diskusi nijak nezapočítával.

Celkově se úloha ukázala být velmi těžkou, obtížnostně by odpovídala spíše sedmičce. Tomu odpovídá i počet správných řešení, který nepřesahuje deset. Na druhou stranu jen dvě ze správných řešení měla stejný postup (který přibližně odpovídal tomu vzorovému). Ostatní řešitelé dokázali vyřešit úlohu přímo, různými typy indukce nebo dokonce i různými typy důkazu sporem. Úloha se tedy dala řešit takřka „ze všech stran".

Bohužel většina řešení byla nedostatečná. Řešitelé argumentovali tím, že dokud obíháme kružnici poprvé, je tvrzení jasně pravdivé. Při druhém oběhu také platí, a tak se prý dá pokračovat dál. Ano, je pravda, že se tak skutečně pokračovat dál dá, ale pokud chcete důkaz tímto způsobem provést pořádně, dá to nemálo práce a zabere nemálo času. Proto jsem za řešení tohoto typu dával jen ve výjimečně dobře rozebraných případech více než jeden bod. *(Martin „E.T." Sýkora)*

Úloha 7.

(57; 38; 3,32; 5,0)

Je dán trojúhelník $A_1A_2A_3$ a sedm kružnic $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_7$, které splňují následující dvě podmínky:

(i) *kružnice ω_1 prochází body A_1 a A_2, kružnice ω_2 body A_2 a A_3, kružnice ω_3 body A_3 a A_1 a tak dále, až kružnice ω_7 prochází body A_1 a A_2,*

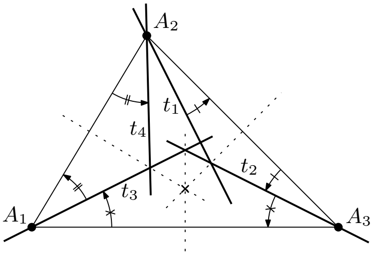
(ii) *kružnice ω_i a ω_{i+1} mají vnější dotyk pro všechna $i = 1, 2, \dots, 6$.*

Dokažte, že kružnice ω_1 a ω_7 splývají. *(Alexander „Olin" Slávik)*

Řešení:

Nechť o_1, o_2, o_3 značí osy úseček A_2A_3, resp. A_3A_1, A_1A_2. Dále t_i značí společnou tečnu kružnic ω_i a ω_{i+1} pro všechna i od 1 do 6 a nakonec t_7 značí tečnu kružnice ω_7 v bodě A_2.

Kružnice ω_i a ω_{i+1} mají bod dotyku v A_{i+1} (indexy vrcholů a os stran bereme cyklicky modulo 3), a proto jejich společná tečna t_{i+1} prochází bodem A_{i+1}. Přímky t_i a t_{i+1} jsou tečny ke kružnici ω_{i+1} v bodech A_{i+1} a A_{i+2}, a tedy se v osové souměrnosti podle o_i zobrazí navzájem na sebe. Z toho plyne, že tečna t_1 se postupně po 6 osových souměrnostech podle přímek t_1, t_2, t_3, t_1, t_2, t_3 dostane na přímku t_7. Abychom dokázali, že kružnice ω_1 a ω_7 splývají, stačí ukázat, že přímka t_1 je přímka t_7. Kružnice s tětivou A_1A_2 a fixní tečnou t_1 v bodě A_2 je totiž jednoznačně určena.



Zavedeme orientovaný úhel $\sphericalangle(x, y)$, který nám říká, o kolik musíme otočit přímku x v kladném směru, abychom dostali přímku y. Podle vlastnosti osové souměrnosti snadno dopočteme $(t_1, A_2A_3) = (A_2A_3, t_2) = (A_2A_3, A_3A_1) - (t_2, A_3A_1)$. Analogicky vyjádříme (t_2, A_3A_1) a postupně dostaneme:

$$(t_1, A_2A_3) = (A_2A_3, A_3A_1) - (A_3A_1, A_1A_2) + (A_1A_3, A_3A_2) - (t_4, A_2A_3),$$
$$(t_4, A_2A_3) = (A_2A_3, A_3A_1) - (A_3A_1, A_1A_2) + (A_1A_3, A_3A_2) - (t_7, A_2A_3).$$

Odečtením dvou výše uvedených vztahů získáme $(t_1, A_2A_3) = (t_7, A_2A_3)$. Úhel mezi t_1 a A_2A_3 v kladném směru je tedy stejný jako mezi t_7 a A_2A_3, tudíž přímka t_1 je opravdu t_7.

Poznámky:
Většina došlých řešení porovnala buď úhel mezi t_1 a A_2A_3 s úhlem mezi t_7 a A_2A_3, nebo úhly nad oblouky A_2A_3 v kružnicích ω_1 a ω_7. Zapomněla ale na to, že zmíněná rovnost není postačující, abychom mohli prohlásit, že kružnice ω_1 a ω_7 splývají. Je potřeba vyloučit případ, kdy t_1 a t_7 leží na opačných polorovinách oddělených přímkou A_2A_3. Za tento nedostatek jsem body nestrhával, ale chci pochválit řešitele, kteří si na to vzpomněli. Jedna z možností, jak obejít diskuzi o polohách bodů, je uvědomit si, že složení tří souměrností s osami procházejícími jedním bodem je pouze jedna osová souměrnost. (Obecně se jedná o osovou souměrnost s nějakým posunutím, ale zde existuje pevný bod, který je středem kružnice opsané trojúhelníku $A_1A_2A_3$, a proto posunutí je nulové.) Hezké využití kruhové inverze měl *Radovan Švarc*, který si tak zasloužil jediný pozitivní imaginární bod.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Úloha 8.

(31; 12; 1,71; 0,0)

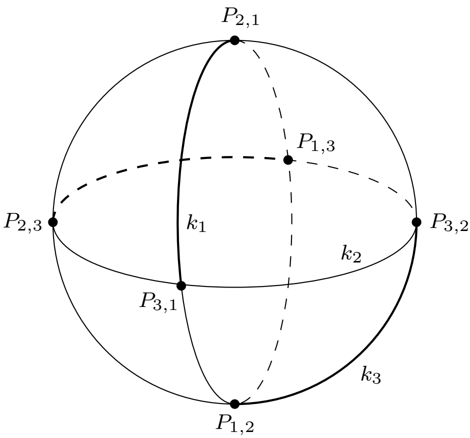
Je dána jednotková sféra. Najděte reálné číslo x takové, že pro každé $l < x$ lze na sféru nakreslit tři neprotínající[1] se oblouky hlavních kružnic[2] délky l, ale pro žádné $L > x$ už to možné není.

(Martina Vaváčková)

Řešení:
Hledané $x = \frac{5}{3}\pi$.

Sporem ukážeme, že nenajdeme 3 oblouky b_1, b_2, b_3 délky $L > \frac{5}{3}\pi$. Předpokládejme tedy, že existují. Odpovídající hlavní kružnice označíme k_1, k_2, k_3.

Uvažme dva ze tří zadaných oblouků b_i, b_j. Kružnice k_i, k_j nemohou být totožné – to by se na ně nevešly ani oblouky o délce π. Kružnice k_i a k_j se tedy protínají, a to (protože jsou hlavní) ve dvou protilehlých bodech. Průsečíky označme $P_{i,j}$, $P_{j,i}$. Jak b_i, tak b_j má délku větší než π, takže každý z nich obsahuje alespoň jeden z bodů $P_{i,j}$, $P_{j,i}$. Protože se nesmí dotýkat, tak oba oblouky obsahují právě jeden z těchto bodů. BÚNO $P_{i,j} \in b_i$, $P_{j,i} \in b_j$.



Pro body X, Y na sféře budeme symbolem $|XY|$ značit jejich nejkratší možnou vzdálenost po povrchu sféry (tedy délku kratšího oblouku hlavní kružnice procházející X a Y).

Na kružnici k_1 leží body $P_{2,1}$, $P_{3,1}$ nenáležící oblouku b_1. Jelikož je délka oblouku b_1 větší než $\frac{5}{3}\pi$, je $|P_{2,1}P_{3,1}| < \frac{\pi}{3}$. Analogicky $|P_{1,3}P_{2,3}| < \frac{\pi}{3}$ a $|P_{3,2}P_{1,2}| < \frac{\pi}{3}$. Ze středové symetrie podle

[1] Nesmějí se ani dotýkat.

[2] Hlavní kružnice je kružnice ležící na sféře, jejíž střed je zároveň středem sféry.

středu sféry je $|P_{1,3}P_{2,3}| = |P_{3,1}P_{3,2}|$, takže sférická lomená čára $P_{2,1}P_{3,1}P_{3,2}P_{1,2}$ má každý ze svých tří oblouků kratší než $\frac{\pi}{3}$. To znamená, že musí být kratší než π, ale současně musí vést z bodu $P_{2,1}$ do protějšího $P_{1,2}$, což je spor.

Konstrukci provedeme obráceně – dostaneme l takové, že $l < \frac{5}{3}\pi$ a začneme s lomenou čarou $P_{2,1}P_{3,1}P_{3,2}P_{1,2}$, která má každý úsek kratší než $2\pi - l$ a také (pro jistotu) kratší než π, neshodují se v ní žádné dvě hlavní kružnice a její krajní body jsou naproti sobě.

Tu sestrojíme například tak, že bod $P_{2,1}$ umístíme do severního pólu, bod $P_{3,1}$ na rovnoběžku $30°$ severní šířky a nultý poledník, bod $P_{3,2}$ na rovnoběžku $30°$ jižní šířky a poledník kladné východní délky menší než $\frac{5}{3}\pi - l$ a nakonec bod $P_{1,2}$ umístíme do jižního pólu. Pak totiž bude

$$|P_{2,1}P_{3,1}| = |P_{3,2}P_{2,1}| = \frac{\pi}{3} < 2\pi - l \quad \text{a} \quad |P_{3,2}P_{3,1}| < \frac{\pi}{3} + \left(\frac{5}{3}\pi - l\right) = 2\pi - l.$$

Nakonec sestrojíme body $P_{1,3}$, $P_{2,3}$ coby středové obrazy bodů $P_{3,1}$, $P_{3,2}$. Pak stačí vést oblouk b_1 skrz $P_{1,2}$, $P_{1,3}$, aby se vyhnul bodům $P_{2,1}$, $P_{3,1}$, oblouk b_2 skrz $P_{2,1}$, $P_{2,3}$, aby se vyhnul bodům $P_{1,2}$, $P_{3,2}$ a oblouk b_3 skrz $P_{3,1}$, $P_{3,2}$, aby se vyhnul bodům $P_{1,3}$, $P_{2,3}$.

Poznámky:

Opět ne příliš obtížná osmička, jen bych si pro příště přál méně mlhy „A když už tenhle trojúhelník bude skoro placatý a tenhle skoro rovník, tak to vyjde, ale ne úplně, ale to vlastně nevadí, protože se nekonečně blížíme… A tady se to bude dotýkat, ale ne úplně…“ a více jasných formulací. Někteří takto obhajovali správnou konstantu $\frac{5}{3}\pi$ (což byl základ k dosažení nějakého bodového zisku) jiní obdobnou mlhou tvrdili, že $x = \frac{3}{2}\pi$ či $x = 2\pi$. Ostatně konstanta $\frac{3}{2}\pi$ byla vůbec populární – po 11 správně určených x bylo 9 pokusů o $x = \frac{3}{2}\pi$, následovalo čtyřikrát $x = \pi$, dvakrát $x = 2\pi$ a nakonec jedno řešení přišlo na to, že $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$. *(Mirek Olšák)*