Barevné úlohy

1. podzimní série — Termín odeslání: 6. října 2014

Úloha 1. (3 body)

Obarvěte políčka tabulky o rozměrech 4×4 pěti barvami tak, aby byla každá barva použita alespoň jednou a aby se v každém řádku i sloupci vyskytovaly nejvýše dvě různé barvy.

Úloha 2. (3 body)

Na úsečce AB se středem S vyrostlo sto dvojic tulipánů tak, že pro každou dvojici leží bod S ve středu spojnice jejích tulipánů. Sto tulipánů vykvetlo červeně, zbylé vykvetly žlutě. Dokažte, že součet vzdáleností žlutých tulipánů od bodu A je stejný jako součet vzdáleností červených tulipánů od bodu B.

Úloha 3. (3 body)

Martin sbírá bonbóny v barevných obalech. V každé z deseti krabiček má nějaký nenulový počet bonbónů, přičemž tento počet je pro každou krabičku jiný. Navíc v žádné krabičce nejsou dva bonbóny s obaly stejné barvy. Ukažte, že Martin může vybrat z každé krabičky jeden bonbón tak, aby získal obaly deseti různých barev.

Úloha 4. (5 bodů)

Políčka tabulky o rozměrech 3×7 jsou obarvena dvěma barvami. Dokažte, že existuje obdélník nebo čtverec z jejích políček, jehož všechna rohová políčka jsou různá a mají stejnou barvu.

Úloha 5. (5 bodů)

Velkoobchod s barvami má v každém z n měst svou pobočku a mezi každými dvěma z nich vede cesta. Bylo rozhodnuto, že je třeba nakreslit plánek těchto poboček a cest mezi nimi tak, aby

(i) každé město mělo jinou barvu než všechny cesty z něj vedoucí,
(ii) žádné dvě cesty vedoucí do stejného města neměly stejnou barvu.

Kolik nejméně barev bude k nakreslení plánku potřeba?

Úloha 6. (5 bodů)

Na každém políčku šachovnice o rozměrech 8×8 sedí jedna beruška. Když Štěpán zapíská, přesune se každá beruška na některé políčko, které stranou sousedí s políčkem, na němž byla dosud. Kolik nejvíce políček se tím může uvolnit? (Nezapomeňte dokázat, že více se jich uvolnit nemůže.)

Úloha 7. (5 bodů)

David si na kružnici nakreslil $4n$ různých bodů a pak je po směru hodinových ručiček střídavě obarvil modře a červeně. Červené body nějakým způsobem rozdělil do n dvojic a body v každé dvojici spojil červenou úsečkou. Podobně n modrými úsečkami pospojoval modré body. Všiml si, že žádné tři barevné úsečky neprocházejí jedním bodem a že každý průsečík modré a červené úsečky je fialový. Dokažte, že na obrázku našel alespoň n fialových bodů.

Úloha 8. (5 bodů)

Červená Karkulka a Vlk hrají hru. Vlk nejprve na pásek papíru namaluje sto puntíků, z nichž každý je buď modrý, nebo červený. Na začátku každého tahu se odstřihne puntík nejvíce vlevo. Je-li červený, namaluje Vlk na pravý konec řady další modrý nebo červený puntík dle vlastního výběru. V opačném případě udělá totéž Karkulka. Cílem Karkulky je zajistit, aby po nějakém tahu byly všechny puntíky červené. Může se jí to podařit, ať hraje Vlk jakkoliv?

Barevné úlohy

1. podzimní série Vzorové řešení

Úloha 1.

(207; 193; 2,84; 3,0)

Obarvěte políčka tabulky o rozměrech 4×4 pěti barvami tak, aby byla každá barva použita alespoň jednou a aby se v každém řádku i sloupci vyskytovaly nejvýše dvě různé barvy.

(Pepa Tkadlec)

Řešení:

Nejprve vybereme čtyři políčka tabulky tak, abychom měli z každého sloupce a každého řádku právě jedno políčko (např. políčka na diagonále). Ta vybarvíme čtyřmi různými barvami. Pak již stačí vybarvit zbytek tabulky pátou barvou a máme hotovo:

2	1	1	1
1	3	1	1
1	1	4	1
1	1	1	5

Poznámky:

Většina úlohu vyřešila bez problémů, občas někdo dokonce počítal, kolik je možných řešení (což úloha nevyžadovala). Jako řešení tentokrát stačil jen obrázek bez odůvodnění. Nakonec se našlo i několik řešitelů, kteří se snažili dokázat, že tabulku takto obarvit nelze.

(Kristýna „Kikina“ Zemková)

Úloha 2.

(182; 130; 2,16; 3,0)

Na úsečce AB se středem S vyrostlo sto dvojic tulipánů tak, že pro každou dvojici leží bod S ve středu spojnice jejích tulipánů. Sto tulipánů vykvetlo červeně, zbylé vykvetly žlutě. Dokažte, že součet vzdáleností žlutých tulipánů od bodu A je stejný jako součet vzdáleností červených tulipánů od bodu B. *(Pepa Tkadlec)*

Standardní řešení:

Podívejme se nejprve na jednu dvojici tulipánů X a Y, kde X je blíže k A. Víme, že střed AB je S, a také víme, že střed XY je S, tedy

$$|AS| = |AX| + |XS| = |BS| = |BY| + |YS|.$$

Z toho vyplývá, že $|BY| = |AX|$, a z toho jasně $|AS| + |SY| = |BS| + |SX|$.

Nyní si dvojice rozdělíme do dvou skupinek, na stejnobarevné a různobarevné.

Pro různobarevnou dvojici k červeným vzdálenostem přičteme $|BY|$ nebo $|BS|+|SX|$ (podle toho, jestli je červený tulipán blíže B, či A) a ke žlutým součtům přičteme $|AX|$ nebo $|AS|+|SY|$. Různobarevné dvojice zvýší oba součty stejně, tedy je nemusíme uvažovat.

Pokud máme dvojici tulipánů stejné barvy, potom k hromádce příslušné barvy přičteme

$$|AS| + |SY| + |AX| = |AS| + |SY| + |BY| = |AB|$$

nebo

$$|BS| + |SX| + |BY| = |BS| + |SX| + |AX| = |AB|,$$

tedy ať má dvojice jakoukoliv barvu, potom k její hromádce přičteme $|AB|$.

Na různobarevné dvojice potřebujeme jeden červený a jeden žlutý tulipán. Z toho víme, že ve stejnobarevných dvojicích je stejně žlutých jako červených tulipánů. Tudíž je stejně celočervených dvojic jako celožlutých. Z toho vyplývá, že $|AB|$ přičteme ke žluté hromádce stejněkrát jako k červené.

Z výše uvedeného vyplývá, že součty žlutých vzdáleností jsou stejné jako součty červených vzdáleností.

Rychlé řešení:
Uvažme dvojici tulipánů ze zadání X, X'. Střed S leží ve středu úsečky AB i ve středu úsečky XX', proto ze středové souměrnosti $|X'A| = |XB| = |AB| - |XA|$.

Označme součet vzdáleností všech červených tulipánů od A jako c a součet vzdáleností žlutých od A jako z. Součet vzdáleností všech tulipánů od A můžeme sečíst po jednotlivých párech a z $|XA| + |X'A| = |AB|$ dostáváme $c + z = 100|AB|$ neboli $z = 100|AB| - c$.

Zbývá spočítat součet vzdáleností červených tulipánů od B. Červených tulipánů je sto, takže z $|XB| = |AB| - |XA|$ vychází tento součet $100|AB| - c$, tedy stejně jako z, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:
Většina správných řešení obsahovala jeden ze dvou přístupů. Drtivá většina řešitelů poslala řešení podobné prvnímu vzorovému. Menší část z řešitelů se potom snažila dokázat úlohu tak, že prve je tvrzení splněno pro triviální postavení bodů, a s těmi se potom hýbe. Toto řešení je také elegantní a hezké, ale při pokusu o něj se chyby vyskytovaly o něco málo častěji. Rychlé řešení, které by bylo za $+i$ a zabíjí korektně obě možnosti, nám nikdo neposlal, i když se k němu někteří blížili.

Při opravování jsem se snažil být hodný, ale moc se mi to nedařilo. Pokud jste něco odbyli jednoduchým „je to zřejmé“, tak se to často neobešlo bez ztráty bodu, hlavně pokud to zřejmé nebylo a šlo téměř o polovinu úlohy. Dalším častým jevem bylo, že jste sice ukázali, že pro stejněbarevné dvojice přičteme pokaždé $|AB|$, ale už jste neřekli, že je stejně žlutých dvojic jako těch červených. To bylo také za výchovný jeden bod.

Nejvíce však bylo řešitelů, kteří zapomněli na stejnobarevné dvojice a řešili jen ty různobarevné (takových bylo hodně), a nebo naopak (těch bylo méně, ale taky se vyskytli).

(Kuba Svoboda)

Úloha 3. (178; 165; 2,53; 3,0)

Martin sbírá bonbóny v barevných obalech. V každé z deseti krabiček má nějaký nenulový počet bonbónů, přičemž tento počet je pro každou krabičku jiný. Navíc v žádné krabičce nejsou dva bonbóny s obaly stejné barvy. Ukažte, že Martin může vybrat z každé krabičky jeden bonbón tak, aby získal obaly deseti různých barev. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:
Seřaďme si krabičky vzestupně podle počtu bonbónů v nich a označme a_i počet bonbónů v i-té krabičce. Ze zadání plyne, že $a_i \geq i$. Nejprve si Martin vezme libovolný bonbón z první krabičky, poté postupně vybírá z dalších krabiček v řadě. Předpokládejme, že si už vybral n různých bonbónů z prvních n krabiček, tudíž si nyní vybírá z krabičky $n + 1$. Ovšem počet bonbónů v této krabičce je roven $a_{n+1} \geq n + 1$, přičemž si Martin zatím vzal jen n různých bonbónů, takže se v této krabičce se nachází alespoň jeden druh, který si zatím nevybral. Vždy tedy existuje alespoň jeden bonbón, který si Martin může z následující krabičky vybrat, tudíž je schopen získat z deseti krabiček deset různých barev bonbónů.

Poznámky:
Přestože byla úloha celkem jednoduchá, přibližně čtvrtina z vás se snažila v různých variacích tvrdit, že „v každé další krabičce se nachází nová barva bonbónu oproti předchozí krabičce, tu si Martin vybere“, což ale bohužel není pravda, neboť například ve třetí krabičce se mohou vyskytovat pouze bonbóny z předchozích dvou, přičemž rozdílný bonbón mezi druhou a třetí krabičkou už si Martin musel vzít z první krabičky. Těmto řešením jsem poté strhával jeden bod. Zcela špatných řešení však bylo minimum a většinou bylo příčinou nepochopení zadání (pobavila mě první věta jednoho řešení, která tvrdila, že v zadání je chyba :-)) *(Tomáš Novotný)*

Úloha 4.

(157; 117; 3,75; 5,0)

Políčka tabulky o rozměrech 3×7 jsou obarvena dvěma barvami. Dokažte, že existuje obdélník nebo čtverec z jejích políček, jehož všechna rohová políčka jsou různá a mají stejnou barvu.
(Jarda Hančl)

Řešení:
Budeme uvažovat tabulku se třemi řádky a sedmi sloupci. Z Dirichletova principu bude v každém sloupci jedna z barev zastoupena alespoň dvakrát. Dále z Dirichletova principu plyne, že ze sedmi sloupců bude ve čtyřech převažovat jedna barva. Nicméně počet různých dvojic políček ve sloupci je jen tři. To znamená, že při vybarvování políček převažující barvou bude v nejméně dvou sloupcích vybarvena stejná dvojice políček. Důkaz je hotov.

Poznámky:
Většina správných řešení se opírala o Dirichletův princip v mnoha různých variantách (od snadno popsatelného použití ve sloupcích až k těžkopádnějším použitím v řádcích). V několika řešeních se vyskytla chyba, že řešitel bez diskuze přeskočil možnost vybarvení celého sloupce jednou barvou. Ačkoliv je jednoduché zdůvodnit, proč nám toto obarvení úlohu zjednodušuje, je nutné to do řešení zahrnout. Ta méně správná řešení velmi často nedokazovala požadovanou vlastnost pro všechna obarvení, nebo řešitel spatně pochopil zadání. *(Honza Krejčí)*

Úloha 5.

(156; 86; 2,20; 2,0)

Velkoobchod s barvami má v každém z n měst svou pobočku a mezi každými dvěma z nich vede cesta. Bylo rozhodnuto, že je třeba nakreslit plánek těchto poboček a cest mezi nimi tak, aby

(i) *každé město mělo jinou barvu než všechny cesty z něj vedoucí,*
(ii) *žádné dvě cesty vedoucí do stejného města neměly stejnou barvu.*

Kolik nejméně barev bude k nakreslení plánku potřeba? *(Bětka Kadlecová)*

Řešení:
Z libovolného města vede $n - 1$ cest do ostatních měst, přičemž tyto cesty musí podle (ii) mít po dvou různé barvy. Navíc město musí podle (i) mít barvu různou od barvy každé z cest, takže k obarvení plánku bude potřeba minimálně n barev. Ukážeme, že k obarvení plánku n barev stačí.

Pro $n = 1$ obarvíme jedno město jednou barvou. Pro $n = 2$ obarvíme obě města první barvou a cestu mezi nimi druhou barvou. Pro $n \geq 3$ si plánek zakreslíme tak, že města budou vrcholy pravidelného n-úhelníku U a cesty budou všechny strany a úhlopříčky U. Každé ose symetrie U přiřaďme jednu barvu. Jak známo, pravidelný n-úhelník má n os symetrie, použijeme tedy n barev. Každou cestu obarvíme barvou její osy. Jelikož jsou nyní každé dvě stejně barevné cesty rovnoběžné, nemohou mít společné město, a podmínka (ii) je splněna.

Dokažme, že osa (nazvěme ji O) každé cesty je zároveň osou symetrie U (a tedy jsme tuto cestu obarvili). Cesta je tětivou kružnice opsané U, tedy O prochází jejím středem. Osová souměrnost podle O proto zobrazuje kružnici opsanou samu na sebe a zároveň zobrazuje město na město (protože O je osa cesty). Pravidelný n-úhelník je jednoznačně určen kružnicí opsanou, jedním vrcholem a číslem n, tedy U se v osové souměrnosti podle O zobrazí na U, což jsme chtěli dokázat.

Nyní obarvěme města. Jelikož do každého města vede $n - 1$ cest (které mají $n - 1$ barev), zbývá nám jedna barva na obarvení města taková, že vyhovuje podmínce (i).

Alternativní řešení (podle Jana Jurky):
Stejně jako v předchozím řešení ukážeme, že barev potřebujeme alespoň n. Nyní zkonstruujeme vyhovující obarvení pomocí n barev. Města očíslujme $0, 1, \ldots, n-1$ a barvy očíslujme rovněž $0, 1, \ldots, n-1$. Barvu města m považujme za barvu cesty vedoucí z města m do něj samého. Cestu z města i do města j vybarvěme barvou $(i+j) \bmod n$. Dokažme, že toto obravení splňuje podmínky v zadání. Pro spor předpokládejme, že cesty mezi městy i, j a i, k, kde $j \neq k$, mají stejnou barvu. Pak platí $i + j \equiv i + k \pmod n$, tedy $j \equiv k \pmod n$. Jelikož $0 \leq j, k < n$, dostáváme $j = k$, což je spor.

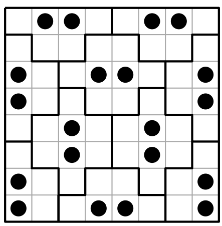
Poznámky:
Většina z Vás přišla na správný výsledek, ale jen malé části se podařilo dokázat jeho správnost. Někteří se spokojili s pozorováním, že méně než n barev nestačí. Další si uvědomili, že k řešení je třeba obarvení n barvami najít, ale nenašli ho a předpokládali, že cesty bude možné n barvami obarvit „tak, aby to vyšlo“. Nakonec ti, kteří obarvení nalezli a úlohu tak vyřešili, většinou používali jednu ze dvou výše popsaných konstrukcí nebo podobnou. Našli se i tací, co využili Vizingovu větu, díky níž se řešení úlohy stalo triviálním. *(Tonda Češík)*

Úloha 6.

(128; 62; 1,74; 1,0)

Na každém políčku šachovnice o rozměrech 8×8 sedí jedna beruška. Když Štěpán zapíská, přesune se každá beruška na některé políčko, které stranou sousedí s políčkem, na němž byla dosud. Kolik nejvíce políček se tím může uvolnit? (Nezapomeňte dokázat, že více se jich uvolnit nemůže.) *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:
Dokážeme, že maximální počet uvolněných políček je 44. K tomu stačí dokázat, že po přesunu obsadí berušky nejméně 20 políček. Rozdělíme šachovnici 8×8 na deset oblastí následujícím způsobem:



V každé oblasti umíme berušky přemístit do jednoho ze dvou políček označených tečkou, a proto se berušky po přesunu vejdou do 20 políček.

Dále dokážeme, že méně políček už nestačí. Berušky na označených políčkách nemohou svoji oblast opustit. V každé oblasti se přitom nachází dvě takové berušky. Žádné dvě z nich nemůžou skočit na stejné políčko, a proto se každá z těchto 20 berušek přesune na jiné místo. Potřebujeme tedy nejméně 20 políček.

Poznámky:
Asi polovina z vás přišla na správný výsledek a rozmístění berušek napsané ve vzorovém řešení, ale jen malé části se podařilo minimalitu dokázat – většinou výše uvedeným způsobem. Ostatní řešení se snažila různé situace rozebírat a ukázat, že na několika políčkách musejí skončit méně než čtyři berušky. U takových řešení se vyskytla zásadní chyba: tiše se předpokládalo, že políčka musejí být obsazená po dvojicích nebo se musejí k pokrytí šachovnice použít určité „nejvýhodnější“ útvary. *(Anh Dung „Tonda“ Le)*

Úloha 7. (101; 29; 1,31; 1,0)

David si na kružnici nakreslil $4n$ různých bodů a pak je po směru hodinových ručiček střídavě obarvil modře a červeně. Červené body nějakým způsobem rozdělil do n dvojic a body v každé dvojici spojil červenou úsečkou. Podobně n modrými úsečkami pospojoval modré body. Všiml si, že žádné tři barevné úsečky neprocházejí jedním bodem a že každý průsečík modré a červené úsečky je fialový. Dokažte, že na obrázku našel alespoň n fialových bodů. *(David Hruška)*

Řešení:
Udělejme si následující procházku: Začneme v libovolném modrém bodě a vydáme se z něj po modré úsečce. Kdykoli narazíme na průsečík s jinou modrou úsečkou, odbočíme po ní doprava, a jakmile narazíme na fialový bod (průsečík s červenou úsečkou), zastavíme se.

Uvědomíme si dvě věci. Zaprvé, nikdy se nezacyklíme. Kdybychom se totiž ocitli v nějakém bodě, který už jsme předtím navštívili, byli bychom do něj museli přijít po jiné úsečce než poprvé, ale to by znamenalo, že jsme v tomto bodě zapomněli na tuto úsečku odbočit.

Zadruhé, nikdy se nedostaneme zpět na kružnici. Uvažme, co by se stalo, kdyby se nám to povedlo. Procházka by pak začínala i končila v nějakém modrém bodě, a na oblouku mezi nimi (napravo od prošlé cesty) by se tedy musel nacházet lichý počet barevných bodů. Alespoň z jednoho z těchto bodů by tedy musela vést úsečka mimo tento oblouk a ta by protínala naši procházku. Tím by ale opět vznikla buď „křižovatka“, na které jsme zapomněli odbočit, nebo fialový bod, ve kterém jsme se nezastavili.

Z každého modrého bodu tedy musíme nutně dojít do nějakého fialového bodu. Naopak pokud z tohoto fialového bodu vyrazíme nazpátek a na křižovatkách budeme zatáčet vždy doleva, dojdeme vždy jednoznačně zpět do startovního modrého bodu. Protože pro každý fialový bod jsou dva různé modré směry, kterými se dá odejít, lze se do něj dostat nejvýše ze dvou různých modrých bodů. Těch je $2n$, takže fialových bodů musí být alespoň $\frac{2n}{2} = n$.

Poznámky:
Většina z vás se snažila vymyslet, jak body pospojovat tak, aby vzniklo co nejméně fialových bodů. Jenže tím, že se vám nepodařilo najít způsob, jak jich získat méně než n, jste ještě nedokázali, že jich opravdu aspoň n musí být.

Další velká skupina řešitelů se snažila každý fialový bod „naúčtovat“ nějaké úsečce a takto dokázat, že fialových bodů musí být aspoň tolik, kolik je úseček jedné barvy. Zapomněli ale, že se může stát, že některý bod naúčtují více úsečkám zároveň a omylem ho tak započítají vícekrát. Jiní si ani neuvědomili, že ne každou úsečku musí protínat úsečka druhé barvy.

Objevily se i pokusy řešit úlohu indukcí podle n, ale jen jeden z nich byl korektní – ostatní řešitelé se snažili z menších případů sestrojit větší a nikoli naopak, což vedlo k tomu, že nevyřešili všechny možné případy. *(Ondra Cífka)*

Úloha 8.

(85; 14; 0,71; 0,0)

Červená Karkulka a Vlk hrají hru. Vlk nejprve na pásek papíru namaluje sto puntíků, z nichž každý je buď modrý, nebo červený. Na začátku každého tahu se odstřihne puntík nejvíce vlevo. Je-li červený, namaluje Vlk na pravý konec řady další modrý nebo červený puntík dle vlastního výběru. V opačném případě udělá totéž Karkulka. Cílem Karkulky je zajistit, aby po nějakém tahu byly všechny puntíky červené. Může se jí to podařit, ať hraje Vlk jakkoliv?

(Pepa Tkadlec)

Řešení:

Karkulka má následující vyhrávající strategii. Pomyslně rozdělí hru na *kola* po 100 tazích. V každém kole maluje samé červené, dokud vlk v tomto kole nezahraje modrou. Od té doby v tomto kole maluje samé modré.

Zbývá ukázat, že s takovou strategií Karkulka vyhraje. Jednotlivá kola si budeme namísto odstřihávání puntíků představovat tak, že se pouze prochází puntíky jeden po druhém – červený může vlk proměnit na modrý nebo ponechat, modrý může Karkulka proměnit na červený nebo ponechat. Stav po proběhnutí kola bude v takové představě stejný jako v původním zadání.

Definujeme ještě *barevné číslo* náležící hernímu stavu – modré puntíky interpretujeme jako nuly, červené jako jedničky a celý pásek přečteme coby binární číslo odzadu (tedy první puntík náleží místu jednotek, druhý místu dvojek, třetí místu čtyřek, ...). Během každého kola mohou nastat dvě možnosti:

(i) Vlk nikdy nenamaluje modrou – to znamená, že po proběhnutí kola jsou všechny puntíky červené a Karkulka vyhrála.

(ii) Vlk promění některý červený puntík na modrý – v takovém případě se tato cifra barevného čísla sníží. Žádná z následujících cifer barevného čísla se již na základě Karkulčiny strategie nezvýší (všechny následující nuly zachová). To znamená, že se během celého kola barevné číslo jako celek sníží.

Během každého kola tak Karkulka buď vyhraje, nebo sníží barevné číslo. Barevné číslo nelze snižovat do nekonečna (může nabývat nejvýše 2^{100} hodnot), takže v konečném čase Karkulka vyhraje.

Poznámky:

Řešení poslední úlohy se sešlo nečekaně mnoho, zdaleka ne všechna však byla správně a často jsem měl pocit, že řešitelé nechápou, co se po nich chce. Původně jsem měl v plánu spočítat, u kolika řešitelů vyhraje vlk a u kolika Karkulka – bylo to zhruba půl na půl, ale měl jsem problém zařadit řešení stylu „Když hraje vlk blbě a Karkulka dobře, vyhraje Karkulka, ale když hraje vlk dobře a Karkulka blbě, hra nikdy neskončí.“ Pokud chcete napsat řešení matematické hry, měli byste postupovat následovně:

(i) Řeknete, který hráč má vyhrávající strategii.

(ii) Přesně ji popíšete. Rozhodně nestačí psát třeba „Karkulka se snaží tvořit co největší bloky modrých, ale občas vlkovi pohrozí tím, že dává červené.“ Strategie musí být tak jasná, aby se podle ní mohl řídit dejme tomu počítačový program.

(iii) Dokážete, že tato strategie funguje proti jakékoli hře protihráče. Rozhodně nestačí říct třeba „Vlkovi se vyplatí dávat samé modré, protože při samých červených vyhraje Karkulka. To ale Karkulce stačí dávat taky modré, a až budou všechny modré, přebarvit je na červeno.“ Strategie popsaná v předchozím bodu musí být tak silná, že vlk s příslušným „Karkulčiným počítačovým programem“ prohraje, i kdyby byl vlk nekonečně inteligentní a dokonce Karkulčinu strategii znal. A nejen to, musíte přesvědčit opravovatele, že taková ta strategie opravdu je.

Popravdě jsou i jiné možnosti, jak se s matematickou hrou vypořádat (třeba když chcete dokázat, že první hráč má v piškvorkách neprohrávající strategii) – zájemcům o tuto problematiku doporučuji předloňský seriál o teorii her od Alči Skálové, který najdete na našich stránkách v sekci Matematika / Minulé ročníky. *(Mirek Olšák)*