Politika

1. jarní série — Termín odeslání: 9. února 2015

Úloha 1. (3 body)

Do druhého kola prezidentských voleb v PraSestánu postoupili tři kandidáti: Pašík, Čuník a Vepřík. Každý z milionu voličů zahlasoval tím způsobem, že tyto kandidáty nějak seřadil. Ukázalo se, že více než polovina voličů upřednostňuje Pašíka před Čuníkem a více než polovina voličů upřednostňuje Čuníka před Vepříkem. Musí už nutně dávat více než polovina voličů přednost Pašíkovi před Vepříkem?

Úloha 2. (3 body)

Některé dvojice z deseti ministerstev jsou propojené. Každé ministerstvo každý den v pravé poledne pošle všechny oběžníky (kopie), které má k dispozici, všem s ním propojeným ministerstvům. Zákon o oběžnících stanovuje, že pokud ministerstvo vyšle oběžník, musí jej do dvou dnů obdržet všechna ostatní ministerstva. Zákon o byrokracii dodává, že se to nikdy nesmí stihnout za jediný den. Navrhněte nějaké legální propojení ministerstev.

Úloha 3. (3 body)

Politik chce v rámci předvolební kampaně projet n měst. Začíná v hlavním městě[1] a každé město chce navštívit právě jednou. Mezi každými dvěma městy vede obousměrná silnice. Navíc chce projet všemi silnicemi, které nechal za předchozího volebního období opravit. Kolika způsoby to může uskutečnit, jestliže nechal opravit m silnic a z každého města vede nejvýše jedna opravená silnice?

Úloha 4. (5 bodů)

Každá ze tří politických stran má sto členů. Dále je známo, že každý člen má mezi členy zbylých dvou stran alespoň 101 přátel[2]. Dokažte, že existuje trojice lidí z různých stran, kde se přátelí každý s každým.

Úloha 5. (5 bodů)

Každý z milionu úředníků má svůj unikátní kód sestávající z šesti číslic. Kvůli problémům se zaměňováním vládla rozhodla, že kódy každých dvou úředníků se musejí lišit alespoň na dvou pozicích. Kolik nejméně úředníků musí být propuštěno?

Úloha 6. (5 bodů)

Město má tvar obdélníka. Jeho hlavní ulice jsou úsečky rovnoběžné s některým jeho okrajem (stranou obdélníka) a rozdělují jej na obdélníkové čtvrti. *Centrem* nazveme takovou čtvrť, která nesousedí s okrajem. Podle vyhlášky žádná hlavní ulice nevede napříč celým městem. Dokažte, že město má centrum.

---

[1] Hlavní město počítáme jako jedno z n měst.

[2] Přátelství je vzájemné.

Úloha 7. (5 bodů)

Na velkém nádvoří jsou na zemi vyznačeny vrcholy čtvercové sítě a na některých z nich stojí židle. Rozhodněte, zda lze na jakoukoliv takovou konfiguraci židlí usadit republikány a demokraty tak, aby na každé židli seděl právě jeden politik, aby se pro každou řadu počet v ní sedících demokratů lišil od počtu v ní sedících republikánů nejvýše o jedna a to samé aby platilo pro všechny sloupce.

Úloha 8. (5 bodů)

Ve volbách soupeřili dva kandidáti. První z nich dostal a hlasů, druhý b hlasů, přičemž $a > kb$ pro nějaké přirozené k. Hlasy se sčítaly v náhodném pořadí. Jaká je pravděpodobnost, že v průběhu celého sčítání měl první kandidát ostře víc hlasů, než byl k-násobek počtu dosud sečtených hlasů jeho soupeře, tj. že nerovnost platila pro všechny průběžné výsledky během sčítání?

Politika

1. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1. (85; 76; 2,62; 3,0)

Do druhého kola prezidentských voleb v PraSestánu postoupili tři kandidáti: Pašík, Čuník a Vepřík. Každý z milionu voličů zahlasoval tím způsobem, že tyto kandidáty nějak seřadil. Ukázalo se, že více než polovina voličů upřednostňuje Pašíka před Čuníkem a více než polovina voličů upřednostňuje Čuníka před Vepříkem. Musí už nutně dávat více než polovina voličů přednost Pašíkovi před Vepříkem?

(Martin Hora)

ŘEŠENÍ:
Odpověď zní, že nemusí, což dokážeme nalezením protipříkladu. Hledáme způsob, jak mohou volby dopadnout, abychom dodrželi zadané podmínky, a přitom Pašíka před Vepříkem upřednostňovala méně než polovina lidí. Uvažujme tedy

- 499999 voličů, kteří hlasují v pořadí Čuník, Vepřík, Pašík,
- 499999 voličů, kteří hlasují v pořadí Vepřík, Pašík, Čuník a
- 2 voliče, kteří hlasují v pořadí Pašík, Čuník, Vepřík.

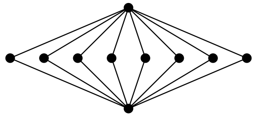
Snadno ověříme, že Pašíka před Čuníkem a Čuníka před Vepříkem preferuje více než polovina voličů. Naopak raději Pašíka než Vepříka mají jen dva voliči, což má do poloviny z milionu daleko.

POZNÁMKY:
Úloha byla jednoduchá, a proto se to ve výsledkové listině hemží trojkami. Jen někteří si nejspíš špatně přečetli zadání a řešili úlohu pro nějaký menší počet voličů. Když neokomentovali, že to pro milion bude fungovat podobně, strhla jsem jim jeden bod. *(Bára Kociánová)*

Úloha 2. (74; 69; 2,78; 3,0)

Některé dvojice z deseti ministerstev jsou propojené. Každé ministerstvo každý den v pravé poledne pošle všechny oběžníky (kopie), které má k dispozici, všem s ním propojeným ministerstvům. Zákon o oběžnících stanovuje, že pokud ministerstvo vyšle oběžník, musí jej do dvou dnů obdržet všechna ostatní ministerstva. Zákon o byrokracii dodává, že se to nikdy nesmí stihnout za jediný den. Navrhněte nějaké legální propojení ministerstev. *(David Hruška)*

ŘEŠENÍ:
Propojení znázorněme jako graf – vrcholy grafu jsou ministerstva a hrana mezi dvěma vrcholy značí, že odpovídající ministerstva jsou propojená. Uvažme propojení jako na obrázku. Potom pro každé ministerstvo platí, že poslední ministerstvo obdrží jeho oběžník druhý den.



Poznámky:
Úloha byla velmi jednoduchá a šlo ji vyřešit spoustou více či méně elegantních propojení. Asi nejčastějším řešením bylo úplné bipartitní zapojení (ministerstva jsou rozdělena do dvou skupin tak, že každá skupina obsahuje alespoň dvě ministerstva a ministerstva jsou spojená tehdy, když jsou v různých skupinách). *(Honza Krejčí)*

Úloha 3.

(48; 27; 1,58; 2,0)

Politik chce v rámci předvolební kampaně projet n měst. Začíná v hlavním městě[1] *a každé město chce navštívit právě jednou. Mezi každými dvěma městy vede obousměrná silnice. Navíc chce projet všemi silnicemi, které nechal za předchozího volebního období opravit. Kolika způsoby to může uskutečnit, jestliže nechal opravit m silnic a z každého města vede nejvýše jedna opravená silnice?*

(Alexander „Olin“ Slávik)

Řešení:
Výsledek úlohy závisí na tom, zda z hlavního města vede opravená silnice, nebo ne. Rozeberme nejprve situaci, kdy z hlavního města žádná opravená silnice nevede.

Uvědomme si, že jakmile politik navštíví město, z něhož vede opravená silnice, nemá potom jinou volbu, než odjet právě po ní. Nemá proto smysl uvažovat dvě města propojená opravenou silnicí jako dvě města – místo toho si je budeme představovat jako jedno *dvojměsto*. Dvojměst je m a obyčejných měst $n-2m-1$ (odečetli jsme hlavní město, protože to už politik navštívil). Dohromady tedy zbývá projet $n-m-1$ měst.

Nyní máme úlohu přeformulovanou: Politik chce v rámci předvolební kampaně navštívit ještě $n-m-1$ měst, přičemž m z nich jsou dvojměsta, v nichž si navíc může vybrat, jestli rozdává balónky nejdřív na levém, nebo na pravém břehu řeky. Určit počet možností je teď už jednoduchá kombinatorika. Nejprve stanovíme pro každé dvojměsto pořadí obou břehů; to dává 2^m. A potom je potřeba nějak seřadit všechna města, což lze udělat $(n-m-1)!$ způsoby. Dohromady má tedy politik na výběr z $2^m(n-m-1)!$ variant, jak svou spanilou jízdu uskutečnit.

Pokud z hlavního města naopak nějaká opravená silnice vede, musí ji politik využít hned na začátku (protože se do hlavního města nevrací – každé město má totiž navštívit právě jednou). Představíme-li si situaci poté, co politik tuto silnici projel, je shodná s předchozí částí příkladu, ale měst je o jedno méně a opravených silnic zrovna tak. V takovém případě je tedy počet způsobů roven

$$2^{m-1}((n-1)-(m-1)-1)! = 2^{m-1}(n-m-1)!.$$

Poznámky:
Na trojku se úloha ukázala býti dost zákeřnou. Správných řešení bylo zhruba stejně jako těch, v nichž řešitel zapomněl ošetřit případ, kdy z hlavního města vede opravená cesta. Tento prohřešek jsem trestal ztrátou bodu. Jak se dalo očekávat, další řešitelé zapomněli započíst to, že se opravené silnice dají projíždět oběma směry, což vedlo k chybnému výsledku $(n-m-1)!$ a ztrátě dvou bodů.

Největší problém mi při opravování dělali ti řešitelé, kteří si vyložili zadání jinak, než bylo myšleno: Uvažovali, že se politik po návštěvě posledního města vrací zpět do města hlavního. To ale ovlivní výsledek, protože potom by bylo možné opravenou silnici z hlavního města projet až při tomto návratu, a ne hned při první cestě. Protože zadání nebylo zcela jasné, byl jsem rozhodnutý těmto řešitelům udělit plný počet bodů, pokud pozměněnou úlohu vyřeší úplně správně, ale to nakonec nezvládl nikdo. Správným výsledkem by totiž v takovém případě měl být vzorec $2^m(n-m-1)!$, jenže až pro $n \geq 3$. Speciálně pro $n=2$, $m=1$ je ale počet možností roven jedné, což odpovídá $2^{1-1}(2-1-1)!$.

[1] Hlavní město počítáme jako jedno z n měst.

Svůj proslov skončím, jako správný politik, apelem: Když vám nebude jasné, jak je zadání myšleno, nebojte se napsat na *mks@mff.cuni.cz*. Pokud nám opravdu pomůžete odhalit nejednoznačnost v zadání, budeme vám zavázáni. *(Kuba Krásenský)*

Úloha 4.

(42; 21; 2,67; 2,0)

Každá ze tří politických stran má sto členů. Dále je známo, že každý člen má mezi členy zbylých dvou stran alespoň 101 *přátel*[2]*. Dokažte, že existuje trojice lidí z různých stran, kde se přátelí každý s každým.*

(Honza Krejčí)

Řešení:

Pro spor předpokládejme, že neexistuje trojice politiků z různých stran, kteří se všichni vzájemně přátelí. Uvažme politika a, jehož počet přátel (označme jej p) v jedné z cizích stran je maximální. Označme stranu politika a jako A, stranu s p přáteli politika a jako B a zbylou stranu C. Vzhledem k tomu, že politik a má nejméně 101 přátel, musí mít ve straně C alespoň jednoho přítele c. Ten má nejvýše $100-p$ přátel ve straně B (jinak by vznikl trojúhelník z a, c a jejich společného přítele). Přitom má opět alespoň 101 přátel, a tedy musí mít alespoň $p+1$ přátel ve straně A, což je spor s maximalitou p.

Poznámky:

Úloha se ukázala být docela zákeřnou. Našlo se několik řešitelů, kteří se ji snažili vyřešit kombinatoricky, ale tato cesta nevedla k úspěchu. Docela velká skupina úlohu řešila indukcí podle počtu přátel (kdy přes přátele těchto přátel šla úloha převést na předpoklad indukce). Rovněž se objevilo několik úspěšnějších či méně úspěšných rozebírání případů a také řešení opřená o extremální princip.

Častou chybou byla úvaha, že když má každý politik 101 známých, pak existuje politik, který má 100 známých v jedné straně. Toto tvrzení není pravdivé. Lze ho vyvrátit například rozdělením každé strany do dvou stejně početných skupin. Vhodným spřátelením skupin do dvou „trojúhelníků“ (v každých dvou skupinách trojúhelníku se zná každý s každým) obdržíme pro každého politika 100 známých. Stoprvní známost dostaneme tak, že vhodně najdeme skupiny, které ještě nejsou spřáteleny, a v této dvojici skupin přiřadíme každému politikovi právě jednoho kamaráda z druhé skupiny. *(Honza Krejčí)*

Úloha 5.

(48; 28; 2,15; 2,0)

Každý z milionu úředníků má svůj unikátní kód sestávající z šesti číslic. Kvůli problémům se zaměňováním vládla rozhodla, že kódy každých dvou úředníků se musejí lišit alespoň na dvou pozicích. Kolik nejméně úředníků musí být propuštěno?

(Míša Hubatová)

Řešení:

Dokážeme, že musí být propuštěno nejméně 900 000 úředníků.

Nejprve ukážeme, že může existovat nejvýše 100 000 kódů složených z šesti číslic takových, že se každé dva liší na alespoň dvou pozicích. Uvědomíme si, že pěticiferných kódů složených z číslic $0, \ldots, 9$ je právě 10^5. Pokud by existovalo více než 100 000 vyhovujících kódů, některé dva by se shodovaly na prvních pěti pozicích, a tedy se lišily na jediné pozici.

Nyní zkonstruujeme 100 000 kódů, z nichž se každé dva liší na alespoň dvou pozicích. Na prvních pět pozic volíme libovolně číslice $0, \ldots, 9$. Na šestou pozici doplníme zbytek ciferného součtu prvního pětičíslí po dělení deseti. Získáváme 10^5 kódů, z nichž se každé dva liší na alespoň

[2] Přátelství je vzájemné.

jedné z prvních pěti pozic. Liší-li se dva kódy právě na jedné z prvních pěti pozic, liší se nutně i na šesté pozici. Odtud máme 100 000 vyhovujících kódů.

Musíme propustit nejméně $10^6 - 10^5 = 900\,000$ úředníků.

Poznámky:

Řešení úlohy má dvě části. Zaprvé stanovení horního odhadu na počet vyhovujících kódů a zadruhé důkaz, že takový počet platných kódů skutečně existuje. Mnozí řešitelé provedli jen jednu z těchto částí, což nestačí, neboť zadání požaduje nejmenší počet úředníků, které je třeba propustit.

Zajímavostí je, že se v řešeních vyskytlo mnoho různých výsledků. *(Míša Hubatová)*

Úloha 6.

(46; 21; 1,96; 1,0)

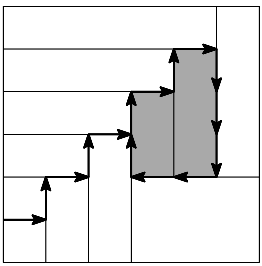
Město má tvar obdélníka. Jeho hlavní ulice jsou úsečky rovnoběžné s některým jeho okrajem (stranou obdélníka) a rozdělují jej na obdélníkové čtvrti. Centrem nazveme takovou čtvrť, která nesousedí s okrajem. Podle vyhlášky žádná hlavní ulice nevede napříč celým městem. Dokažte, že město má centrum.

(David Hruška)

Kdybychom byli zcela exaktní, museli bychom říci, že zadání neplatí – kdyby ve městě nebyla žádná hlavní ulice, byla by splněna vyhláška, ale přesto by město nemělo centrum. Tuto chybu zadání odpustíme a budeme dále předpokládat, že se ve městě alespoň jedna hlavní ulice nachází. Jelikož jsou čtvrti obdélníkové, dokonce to znamená, že existuje nějaká hlavní ulice končící na okraji města.

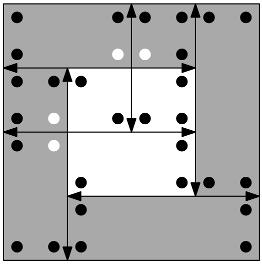
Řešení projížďkou:

Projedeme se po městě. Vjedeme do něj některou hlavní ulicí a dojedeme až na konec této ulice (kde už nejde pokračovat rovně). Tento konec je kvůli vyhlášce uvnitř města, a protože jsou všechny čtvrti obdélníkové, jedná se o křižovatku tvaru T. Díky vyhlášce je alespoň jeden konec ulice, na kterou jsme narazili, opět uvnitř města. Vydáme se tedy na něj. Opět dojedeme na konec a proces opakujeme. Takto projíždíme městem tak dlouho, než dojedeme na místo, na kterém už jsme jednou byli. Mezi okamžikem, kdy jsme na tomto místě byli poprvé, a kdy jsme na něj dojeli podruhé, jsme objeli neprázdnou oblast, v níž je každá čtvrť centrem.



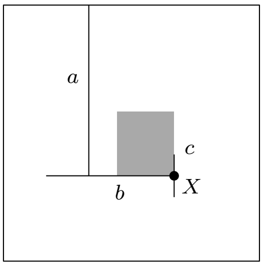
Řešení počítáním rohů:

Označme x počet čtvrtí, které sousedí s okrajem města. Každá čtvrť má 4 rohy, tedy máme pouze $4x$ rohů čtvrtí sousedících s okrajem. Když objedeme město kolem dokola po okraji, střídavě potkáváme čtvrti sousedící s okrajem a hlavní ulice, které je oddělují. Díky vyhlášce nepotkáme jednu hlavní ulici dvakrát, a proto je hlavních ulic alespoň x. Každá hlavní ulice má dva konce (okraj města nebo křižovatku tvaru T) a dvě ulice nemůžou končit na stejném místě, tedy celkem je alespoň $2x$ konců ulic. U každého konce ulice jsou právě dva rohy sousedních čtvrtí, a navíc jsou v rozích města další 4 rohy čtvrtí – proto je celkem alespoň $4x+4$ rohů čtvrtí. Nemůžou všechny příslušet čtvrtím sousedícím s okrajem, takže některý z nich musí příslušet centru.



Řešení extremálním principem:

Označme a (některou) nejdelší hlavní ulici vycházející z některého (bez újmy na obecnosti severního) okraje města. Druhý konec této ulice nemůže být na okraji města, tedy ústí do jiné ulice – označme ji b. Alespoň jeden konec ulice b díky vyhlášce neleží na okraji města. Bez újmy na obecnosti se jedná o východní konec ulice b – označme tento konec X a ulici, do které ústí, označme c. Nyní se podíváme na čtvrť, jejíž roh leží severozápadně od bodu X. Tato čtvrť nemůže sousedit s východním, jižním ani západním okrajem města (kvůli ulicím a, b, c). Nemůže ale sousedit ani se severním okrajem města, protože by pak ulice c byla delší než a. Takže se jedná o centrum.



Poznámky:

Jak je vidno ze vzorového řešení, k úloze šlo přistupovat množstvím rozmanitých přístupů. Proto mě trochu mrzí, že na této úloze ztroskotala nejen řada nadějných nováčků, ale i někteří ostřílení borci. Typickou chybou bylo například prohlásit, že třetí ulice, kterou projíždíme při projížďce, musí ústit z opačného konce než první. Zatímco většina úspěšných řešení použila projížďku, imaginární bod jsem se rozhodl udělit Honzovi Šormovi s extremálním principem. Nejen za netradiční přístup, ale především za demonstraci toho, že kdyby mlžící řešitelé stavící postupně několik ulic (takových jsem potkal dost) byli co k čemu a použili pár vhodně mířených slov, mohli namísto jednoho bodu dostat plný počet. *(Mirek Olšák)*

Úloha 7. (16; 8; 2,44; 2,0)

Na velkém nádvoří jsou na zemi vyznačeny vrcholy čtvercové sítě a na některých z nich stojí židle. Rozhodněte, zda lze na jakoukoliv takovou konfiguraci židlí usadit republikány a demokraty tak, aby na každé židli seděl právě jeden politik, aby se pro každou řadu počet v ní sedících demokratů lišil od počtu v ní sedících republikánů nejvýše o jedna a to samé aby platilo pro všechny sloupce.

(David Hruška)

Řešení:

Provedeme důkaz matematickou indukcí podle počtu židlí. Je-li na nádvoří pouze jedna židle, posadíme na ni republikána. Tím je zadání splněno.

Nyní předpokládejme, že pro libovolné rozestavení n židlí umíme politiky rozesadit za splnění podmínek ze zadání. Uvažujme nyní nějakou konfiguraci s $n+1$ židlemi. Mohou nastat dva případy.

Pokud existuje řádek nebo sloupec s lichým počtem židlí (nechť je to bez újmy na obecnosti řádek), odebereme libovolnou židli z tohoto řádku. Na zbylých n židlí pomocí indukčního předpokladu posadíme politiky tak, aby jejich rozesazení splňovalo zadání. Následně vrátíme odebranou židli na její místo a posadíme na ni politika, jehož strana je v příslušném sloupci zastoupena méněkrát (v případě shodného zastoupení zvolíme jakéhokoli). Tím zajistíme, že ve sloupci přidané židle bude splněna podmínka. V řádku této židle bude také splněna podmínka, protože v tomto řádku původně seděl sudý počet politiků, tedy stejně republikánů jako demokratů. Ostatní řádky a sloupce jsme nezměnili, takže jsme dosáhli vyhovujícího rozesazení.

V opačném případě je ve všech řádcích i sloupcích sudý počet židlí. Pak odeberme libovolnou židli. Na zbylých n židlí opět rozesadíme politiky dle indukčního předpokladu a odebranou židli na nádvoří vrátíme. Počet dosud usazených politiků je lichý, a tak některá politická strana S v počtu politiků převažuje nad druhou stranou T. V každém řádku kromě toho s odebranou židlí sedí sudý počet politiků, a proto jsou v nich obě politické strany zastoupeny stejně. Z toho plyne, že aby strana S celkově převažovala, musí převažovat v řádku s odebranou židlí. Stejně tak musí strana S převažovat i ve sloupci s odebranou židlí, a tedy usazením politika ze strany T na tuto židli docílíme vyhovujícího zasedacího pořádku – v každém řádku i sloupci bude stejný počet demokratů jako republikánů.

Pro libovolnou konfiguraci $n+1$ židlí tedy umíme posadit politiky dle zadání.

Z principu matematické indukce tedy plyne, že lze rozesadit demokraty i republikány dle zadání pro jakoukoliv konfiguraci židlí.

Alternatovní řešení (podle Františka Coufa):

Uvažme graf, jehož vrcholy budou jednotlivé sloupce a řádky čtvercové mřížky. Mezi vrcholem reprezentujícím i-tý sloupec a vrcholem reprezentujícím j-tý řádek vede hrana právě tehdy, když se na nádvoří nachází židle v i-tém sloupci a v j-tém řádku. Nyní chceme dokázat, že hrany tohoto grafu lze obarvit dvěma barvami (označme je R a D) tak, aby se u každého vrcholu počty hran jednotlivých barev, které z tohoto vrcholu vychází, lišily nejvýše o jedna.

Tento graf je bipartitní, jelikož všechny hrany spojují vrchol sloupce a vrchol řádku. Neexistuje žádná hrana mezi dvěma vrcholy sloupců ani dvěma vrcholy řádků. Z bipartity plyne, že všechny kružnice v grafu mají sudou délku.

Graf obarvíme následujícím postupem. Dokud je v grafu nějaká kružnice, tak na její hrany střídavě používáme barvy R a D a následně obarvené hrany z grafu odebereme.

Po obarvení všech kružnic nám zbyde les. Ten budeme obarvovat po jednotlivých komponentách (stromech). Strom obarvíme například takto: Vybereme si libovolný vrchol, odkud začneme. Hrany, které z tohoto vrcholu vychází, obarvíme střídavě barvami R a D. Následně se věnujeme vrcholům, do kterých již vede jedna obarvená hrana. U těchto vrcholů opět dobarvíme ostatní hrany střídavě barvami R a D. Přitom vždy začínáme obarvovat opačnou barvou, než jakou má hrana, která do tohoto vrcholu už vede.

Tak dostaneme vyhovující obarvení stromu, a tedy i původního grafu, protože přidáváním na střídačku obarvených kružnic neměníme rozdíl počtu zastoupených barev u pevného vrcholu.

Poznámky:
Zhruba polovina řešitelů si s úlohou správně poradila. Každý z nich se k cíli dobral jiným postupem. Většina však nějakým způsobem využívala matematickou indukci. Imaginární bod si zasloužil *František Couf* se svou originální aplikací grafů. *(Martin Hora)*

Úloha 8.

(8; 4; 2,63; 3,0)

Ve volbách soupeřili dva kandidáti. První z nich dostal a hlasů, druhý b hlasů, přičemž $a > kb$ pro nějaké přirozené k. Hlasy se sčítaly v náhodném pořadí. Jaká je pravděpodobnost, že v průběhu celého sčítání měl první kandidát ostře víc hlasů, než byl k-násobek počtu dosud sečtených hlasů jeho soupeře, tj. že nerovnost platila pro všechny průběžné výsledky během sčítání?

(David Hruška)

Řešení:
Nechť $P(a, b)$, kde $a \geq kb$, značí hledanou pravděpodobnost. Matematickou indukcí podle součtu $a + b$ dokážeme, že

$$P(a, b) = \frac{a - kb}{a + b}.$$

Naše bázové kroky budou $P(a, kb)$, která opravdu vyjde 0, protože nerovnost určitě neplatí po posledním hlasu, a $P(a, 0)$, která zřejmě vyjde 1. Nyní předpokládejme, že $a > kb$ a $b \neq 0$ a rovnost platí pro každé $P(a', b')$, kde $a' + b' < a + b$ a $a' \geq kb'$. Pravděpodobnost, že poslední z $a+b$ hlasů získá první politik, je $\frac{a}{a+b}$. Pravděpodobnost, že poslední z $a+b$ hlasů získá druhý politik, je $\frac{b}{a+b}$. Pokud podmínka platí v celém průběhu sčítání, pak musí také platit během $a+b-1$ prvních hlasů. Naopak pokud podmínka platí během $a+b-1$ prvních hlasů, pak bude také platit i po posledním hlasu, tedy v celém průběhu sčítání, neboť $a > kb$. Dostáváme tedy vztah

$$\begin{aligned} P(a, b) &= \frac{a}{a+b} P(a-1, b) + \frac{b}{a+b} P(a, b-1) = \\ &= \frac{a(a-1-kb)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{b(a-kb+k)}{(a+b)(a+b-1)} = \frac{(a-kb)(a+b-1)}{(a+b)(a+b-1)} = \frac{a-kb}{a+b}. \end{aligned}$$

Poznámky:
Sešlo se osm řešení a půlka z nich byla správná. Na stejný výsledek se dalo přijít jiným způsobem, a to tak, že všechny průběhy sčítání hlasů rozdělíme do skupin s nejvýše $a + b$ prvky, které se dají na sebe převést cyklickou záměnou – pak výše nalezená pravděpodobnost platí v každé takto vytvořené skupině. Myslím si, že osmička této série nebyla těžká, ale řešitelé se jí jenom báli. :)

(Anh Dung „Tonda“ Le)