Matematický korespondenční seminář

Milý příteli!

Podzimní část letošního ročníku PraSete už patří minulosti. Kdo se v ní chtěl dobře umístit, musel se v jejím závěru poprat nejen s goniometrickými funkcemi, ale i s angličtinou. Málokdo se zalekl a hned čtyřiadvacet řešitelů získalo přes dvacet bodů! První dvě místa obsadili druhák *Pavel Turek* a zkušený matador *Radovan Švarc*. Neztratili v podzimní části ani bod, čímž si spolu s dvaadvaceti dalšími řešiteli vysloužili právo účasti na jarním soustředění.

Pokud ses na soustředění nedostal(a), nezoufej! Začala jarní část, a to, jak dopadne, je ještě ve hvězdách. (Doslova, jak Ti prozradí název třetí jarní série.) Tak popadni dalekohled a pozoruj jarní oblohu – třeba Tě políbí hvězdářská Múza a Ty vyřešíš všechny naše vypečené úlohy. Nebo se vrhni na seriál. V této závěrečné epizodě se prý PraSátko konečně potká se svou osudovou láskou, průnikovým grafem. Nenech si ujít strhující finále!

Příjemný zážitek divácký i hvězdářský Ti přeje

Kuba Krásenský

Co všechno je ve třetích komentářích?

- Vzorová řešení 4. podzimní a 1. jarní série
- Vzorové řešení 2. seriálové série
- Poslední díl seriálu Teorie grafů
- Výsledkové listiny

- Příloha: Zadání 3. a 4. jarní série a 3. seriálové série
- Příloha: Pozvánka na jarní výlet

Náboj

Hravá týmová matematická soutěž Náboj se uskuteční v pátek **13. března 2015** v Praze, Opavě, Bratislavě, Košicích, Pasově, Linci, Krakově a Budapešti. Kapacity v Praze jsou už beznadějně naplněny. Pokud máš zájem se zúčastnit a ještě ses se svým týmem neregistroval(a), podívej se na stránky *www.naboj.org*, zda ještě nejsou volná místa v Opavě. Upozorňujeme, že registrace končí už **6. března**!

Jarní výlet

Nepropásni ani tradiční jarní výlet – jedinečnou možnost, jak se potkat s organizátory i ostatními řešiteli a příjemně strávit den v přírodě. Uskuteční se den po Náboji, v sobotu 14. března. Vše potřebné se dočteš v přiložené pozvánce.

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

Trigonometric functions

4TH AUTUMN SERIES VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Problem 1.

(77; 69; 2,68; 3,0)

How many solutions of the equation $\sin(2014x) = 0$ *are there for* $x \in [0, \pi]$*?* *(Míša Hubatová)*

ŘEŠENÍ:

Funkce sinus má hodnotu nula právě v celočíselných násobcích čísla π. Proto jsou řešeními rovnice $\sin(2014x) = 0$ všechna x splňující $2014x = n\pi$ pro nějaké celé číslo n. Odtud pro $x \in \langle 0, \pi\rangle$[1] dostáváme, že všechna řešení dané rovnice jsou $x = \frac{n\pi}{2014}$, kde $n = 0, 1, \ldots, 2014$. Úloha má tedy 2015 řešení.

POZNÁMKY:

Máme-li určit počet všech řešení, nestačí nalézt 2015 čísel, která úlohu řeší. Je také potřeba vysvětlit, že neexistují žádná další řešení. *(Míša Hubatová)*

Problem 2.

(63; 48; 2,33; 3,0)

Show that every solution of the equation[2]

$$\tan\left(\sin^{2014} x\right) = \tan\left(\cos x^{2015}\right)$$

is also a solution of

$$\sin^{2014} x = \cos x^{2015}.$$

(Martin „E. T.“ Sýkora)

ŘEŠENÍ:

Chceme ukázat, že pokud x splňuje první rovnici, musejí být argumenty funkce tangens stejné. Víme, že funkce $\operatorname{tg} x$ je na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ rostoucí, tedy prostá. Proto pro každé $a, b \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, kde $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} b$, platí $a = b$. Zbývá nám zjistit, zda $\sin^{2014} x$, $\cos x^{2015}$ náleží tomuto intervalu.

Funkce $\sin x$ nabývá hodnot z $\langle -1, 1\rangle$ a pro každé $a \in \langle -1, 1\rangle$ je $a^{2014} \in \langle 0, 1\rangle$. Funkce $\cos x$ nabývá hodnot z $\langle -1, 1\rangle$ a umocněním x se obor hodnot nezmění, neboť x^{2015} stále probíhá všechna reálná čísla.

Zjevně $\langle -1, 1\rangle \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, čili tangens je prostý na $\langle -1, 1\rangle$. Pokud tedy x řeší rovnici

$$\operatorname{tg}(\sin^{2014} x) = \operatorname{tg}(\cos x^{2015}),$$

platí i $\sin^{2014} x = \cos x^{2015}$.

---

[1] Možná jste si všimli, že v zadání této série se uzavřené intervaly značily pomocí $[a, b]$ a funkce tangens pomocí tan, zatímco v řešení píšeme $\langle a, b\rangle$ a tg. Nespletli jsme se, jde pouze o rozdíl mezi češtinou a angličtinou. Pokud půjdete studovat matematiku na vysokou školu, uvidíte však, že hranaté závorky značí uzavřený interval zcela běžně i u nás.

[2] The notation $\sin^{2014} x$ means the same as $(\sin x)^{2014}$.

Poznámky:
Naprosté většině řešení nebylo co vytknout. Délka takových se pohybovala od tří vět do popsané stránky, podle toho, co kteří řešitelé považovali za zřejmé. Ačkoli samozřejmě platí, že pokud si nejste jistí známostí nějakého tvrzení, je lepší ho dokázat nebo aspoň vysvětlit, všeho s mírou. Například snad není třeba rozebírat, že funkce tangens je rostoucí na každém intervalu své periody.

Několik málo špatných řešení zapomnělo na periodičnost funkce tangens, případně ukazovalo, že pokud platí druhá rovnice, platí i první. Ano, druhá úloha bývá jednoduchá, ale ne až takto triviální. *(Bára Kociánová)*

Problem 3.

(67; 49; 2,33; 3,0)

Find all solutions of $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2$, *where* $x \in [0, 2\pi)$. *(Filip Hlásek)*

Řešení:
Upravujme nejprve zadanou rovnici:

$$\begin{aligned}\sin x - \sqrt{3}\cos x &= 2,\\ \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x &= 1,\\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x &= 1,\\ \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) &= 1.\end{aligned}$$

Funkce $\sin y$ je rovna jedné právě pro y tvaru $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. V našem případě tedy

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{takže} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

V zadaném intervalu leží jediná z těchto hodnot, a to $\frac{5\pi}{6}$.

Poznámky:
Uvedené řešení používající součtový vzorec je poměrně trikové, a proto jsem ho odměňoval imaginárním bodem. Běžnějším postupem bylo umocnění zadané rovnice na druhou, což vedlo ke dvěma řešením, z nichž jedno neprošlo zkouškou. Takový postup byl mnohem náchylnější na chyby a někteří řešitelé zkoušku vůbec neprovedli a tvrdili, že obě nalezené hodnoty jsou řešeními původní rovnice.

Na závěr bych ještě chtěl upozornit na to, že z rovnosti $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$ neplyne rovnost $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, neboť $\sin x$ může být i záporný. *(Filip Hlásek)*

Problem 4.

(49; 44; 4,53; 5,0)

Is there a function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *such that for all* $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x+y) + \sin x + \cos y| < 2\,?$$

(Alexander „Olin“ Slávik)

Řešení:
Uvažme pouze nerovnici $|\sin x + \cos y| < 2$. Ta je evidentně splněná pokaždé kromě těch situací, kdy sinus a kosinus nabývají stejných hodnot, a to 1 nebo -1. Tedy pokud chceme, aby funkce existovala, musí pro dvojice x, y, pro které vnitřek této absolutní hodnoty nabývá hodnoty 2 nebo -2, splňovat $f(x+y) \in (-4, 0)$, respektive $f(x+y) \in (0, 4)$. Ovšem první situace je dosaženo například pro $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ a druhé pro $x = \frac{3\pi}{2}$, $y = -\pi$. V obou případech je $x + y = \frac{\pi}{2}$. To znamená, že by v jednom bodě funkce musela nabývat dvou různých hodnot, a to odporuje definici funkce.

Poznámky:
Drtivá většina řešení byla správná. Řekl bych, že i anglický komentář byl na dobré úrovni. Všechna správná řešení se opírala o stejnou myšlenku jako autorské řešení, někdy byla pouze aplikovaná na jiný součet $x+y$. Dále se vyskytlo několik pokusů definovat danou funkci zvlášť pro součet 2, -2, a ostatní případy. Bohužel autoři zapomněli ověřit, zda zadané extrémní případy nesplývají. *(Honza Krejčí)*

Problem 5.

(53; 51; 4,43; 5,0)

The internal angles α, β, γ of triangle PIG satisfy

$$(\sin\alpha + \sin\beta) : (\sin\beta + \sin\gamma) : (\sin\alpha + \sin\gamma) = 7 : 8 : 9.$$

Find the value of $\cos\alpha$. *(Filip Hlásek)*

Řešení:
Zadání můžeme přepsat pomocí tří rovností

$$\sin\alpha + \sin\beta = 7x,$$
$$\sin\beta + \sin\gamma = 8x,$$
$$\sin\alpha + \sin\gamma = 9x$$

pro nějaké $x \in \mathbb{R}$. Sečtením prvních dvou rovností a odečtením třetí dostaneme $2\sin\beta = 6x$, tedy $\sin\beta = 3x$. Dosazením do druhé rovnosti pak dostaneme $\sin\gamma = 5x$, a konečně dosazením do třetí rovnosti zjistíme, že $\sin\alpha = 4x$. Platí tedy

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = 4 : 3 : 5.$$

Díky sinové větě víme, že délky stran trojúhelníka jsou ve stejném poměru jako siny protilehlých úhlů, takže můžeme psát

$$a : b : c = 4 : 3 : 5,$$

kde a, b, c jsou po řadě strany naproti úhlům α, β, γ. Délky stran splňují $a^2 + b^2 = c^2$, takže podle Pythagorovy věty je trojúhelník pravoúhlý s pravým úhlem γ. Hodnotu $\cos\alpha$ tedy snadno spočítáme jako $\frac{b}{c} = \frac{3}{5}$.

Poznámky:
Většina řešitelů postupovala podobně: nějak si upravili vztah ze zadání a pak použili sinovou větu, případně ještě kosinovou (pokud si neuvědomili, že trojúhelník je pravoúhlý). Někteří místo sinové, resp. kosinové věty využili součet úhlů v trojúhelníku a součtové vzorce, a k výsledku se tak dobrali o něco komplikovanější, avšak rovněž korektní cestou.

Častým nedostatkem ostatních řešení bylo, že jejich autoři si tipli nebo drze předpokládali, že trojúhelník bude pravoúhlý, a jiné možnosti nevyloučili. *(Ondra Cífka)*

Problem 6.

(34; 31; 3,24; 3,0)

A gadget has two buttons S and C and a display. At first, the display shows 1. If S (or C) is pressed when a number x is shown on the display, this number is rewritten to $\sin x$ (or $\cos x$). What is the minimum and the maximum value that can be displayed after 2015 presses? (Note that we can change the buttons during the process, so one can start with pressing C three times, then press S eight times and so on. Also assume that the gadget works with radians.)

(Alexander „Olin“ Slávik)

Řešení:

Představme si, že náš přístroj má místo tlačítka C tlačítko T, které z čísla x na displeji udělá číslo $\frac{\pi}{2}-x$. Jelikož platí identita $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, můžeme jeden stisk tlačítka C interpretovat jako stisk T a následně S. Ptáme se tedy na největší a nejmenší hodnotu, kterou můžeme na tomto pozměněném přístroji získat po 2015 stiscích tlačítka S.

Všimněme si, že všechna čísla, která se mohou na displeji přístroje objevit, patří do intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí nerovnost $\sin x < x$, takže stisk tlačítka S vždy způsobí zmenšení čísla na displeji.

Nyní indukcí ukážeme, že nejmenší hodnoty dosáhneme, budeme-li mít před každým stiskem S na displeji nejmenší možné číslo. Pro 2015-tý stisk to platí, neboť funkce sinus je na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ rostoucí. Předpokládejme nyní, že to platí pro $(2015-k)$-tý stisk, a ukažme to i pro $(2015-(k+1))$-tý stisk.

Kdyby mezi $(2015-(k+1))$-tým a $(2015-k)$-tým stiskem S bylo stisknuto tlačítko T, pak by před $(2015-k)$-tým stiskem S bylo na obrazovce číslo větší nebo rovné $\frac{\pi}{2}-1$. To ale není nejmenší možné – aplikováním T na začátku získáme $\frac{\pi}{2}-1$ a následným používáním S toto číslo snížíme, takže v důsledku dosáhneme menšího čísla. Proto mezi krokem $2015-(k+1)$ a $2015-k$ tlačítko T použito není, tedy po kroku $k+1$ je nejmenší možné číslo, a z toho, že je sin na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ rostoucí, je nejmenší možné číslo i před krokem $2015-(k+1)$.

Tím jsme dokonce získali algoritmus na získání nejmenšího čísla po 2015 krocích: Na začátku si vybereme, zda zmáčknout či nezmáčknout T, abychom dostali nižší číslo. Jelikož $1 > \frac{\pi}{2}-1$, tak tlačítko T zmáčkneme, a poté zmáčkneme 2015krát tlačítko S. V řeči původní kalkulačky zmáčkneme jednou C a pak 2014krát S.

A jak dostaneme maximum po 2015 krocích? Před posledním zmáčknutím S chceme na obrazovce naopak největší možné číslo. Kdybychom však bezprostředně předtím nezmáčkli T, nemohlo by číslo před posledním krokem být větší než 1. Pokud naopak T před posledním krokem zmáčknuto bylo, získáme největší možné číslo před 2015-tým krokem tak, že usilujeme o nejmenší možné číslo po provedení 2014-tého kroku. To již umíme obdobou minulého případu (v důkazu nahradíme 2015 za 2014) – zmáčknutím T a následně 2014krát S. Číslo před zmáčknutím druhého T je určitě menší než $\frac{\pi}{2}-1$, takže po zmáčknutí bude větší než 1. Tedy tento postup je určitě výhodnější, než když před posledním krokem T nezmáčkneme. Výsledný postup na neupravené kalkulačce tedy vypadá takto: Nejprve zmáčkneme C, potom 2013krát S a potom znovu C.

Poznámky:

Přestože řešení vypadá na první pohled složitě, jde pouze o to, rozmyslet si základní vlastnosti sinu a kosinu a neztratit se v nerovnostech (nebo doufat, že se opravující ztratí taky :)). Spousta z Vás úlohu vyřešila úplně správně, ještě více našlo správný algoritmus bez pořádného zdůvodnění. Většina chyb u druhé části řešitelů vycházela z toho, že automaticky předpokládali, že pokud chtějí nejmenší číslo na konci, musí samozřejmě chtít největší číslo v každém kroku, což však není bez zdůvodnění jasné (a například při hledání maxima už to neplatí). Líbil se mi nápad s prohozením tlačítek, protože potom už pracujeme pouze s jednou rostoucí funkcí (ještě je teda potřeba okomentovat prohazování argumentů, ale to už se udělá jednoduše). Za to si *Jan Soukup* a *Filip Bialas* vysloužili $+i$. Další $+i$ dostal *Danil Koženikov* za neobyčejně přehledné řešení, ze kterého by si většina řešitelů mohla (měla) vzít příklad :). Nebylo to zřejmé ze zadání, ale k získání plného počtu bodů stačil postup bez přesného výsledku. Přesto většina řešitelů napsala, že výsledné minimum je přibližně 0,03 a maximum asi 0,999. *(Martin Čech)*

Problem 7.

(16; 9; 2,75; 4,5)

Let x, y and z be positive real numbers such that $x+y+z=\pi/2$. Prove that

$$\cos(x-y)\cos(y-z)\cos(z-x) \geq 8\sin x \sin y \sin z.$$

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Řešení:
Jelikož $x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, platí $\cos x > 0$, $\sin 2x > 0$ a obdobně pro y a z. Díky tomu můžeme nerovnost vynásobit $8\cos x \cos y \cos z$ a dostaneme ekvivalentní nerovnost:

$$2\cos(x-y)\cos z \cdot 2\cos(y-z)\cos x \cdot 2\cos(z-x)\cos y \geq 64 \sin x \cos x \sin y \cos y \sin z \cos z.$$

Nyní si všimneme, že $2\cos(x-y)\cos z$ lze získat ze vzorců pro součet a rozdíl kosinu $x-y$ a z:

$$\begin{aligned} 2\cos(x-y)\cos z &= 2\cos\frac{(x-y+z)+(x-y-z)}{2}\cos\frac{(x-y+z)-(x-y-z)}{2} = \\ &= \cos(x-y+z)+\cos(x-y-z). \end{aligned}$$

Dosadíme-li $z = \frac{\pi}{2} - x - y$, dostaneme:

$$\begin{aligned} &\cos\left(x-y+\frac{\pi}{2}-x-y\right)+\cos\left(x-y-\left(\frac{\pi}{2}-x-y\right)\right) = \\ &= \cos\left(-2y+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin 2x + \sin 2y. \end{aligned}$$

Pokud nyní upravíme pravou stranu zadané nerovnosti podle vzorce pro sinus dvojnásobného úhlu $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, dostaneme, že zadaná nerovnost je ekvivalentní následující nerovnosti:

$$(\sin 2x + \sin 2y)(\sin 2y + \sin 2z)(\sin 2z + \sin 2x) \geq 8 \sin 2x \sin 2y \sin 2z.$$

Tato nerovnost je však součinem tří cyklických obměn AG nerovnosti

$$\sin 2x + \sin 2y \geq 2\sqrt{\sin 2x \sin 2y},$$

čímž je důkaz hotov.

Poznámky:
Přišlo relativně malé množství řešení a ještě méně jich bylo úspěšných. Chtěl bych vyzdvihnout řešení *Martina Vrabce*, který se použitím Mollweidova vzorce vyhnul většině goniometrických úprav. Ostatní se úpravám nejen nevyhnuli, ale občas je používali celkem „náhodně“ a doufali, že jim z toho nakonec nějak řešení vyjde. Bohužel se našlo i několik řešení, která po chvíli úprav končila mlhou o rychlosti klesání různých funkcí. V žádném z těchto řešení jsem ale pro takové úvahy nenašel důvěryhodné odůvodnění a tomu odpovídalo i jejich bodové hodnocení.

(Martin Töpfer)

Problem 8.
(9; 6; 3,00; 5,0)

Phil constructed a black box. Given any real number x as an input, this magical device was able to show $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ on its display as an output, as required by its operator.[3] *Phil then started to play with his product. First he chose 0 as the input. After that, when the box showed him the output, he used this output number as the next input. Show that by cleverly choosing the functions that the black box used in each step, Phil could generate any non-negative rational number in a finite sequence of steps. Note that the black box works in radians.* *(David Hruška)*

Řešení:
Dokážeme, že umíme získat dokonce každé číslo tvaru $\sqrt{\frac{a}{b}}$, kde $a, b \in \mathbb{N}$ a $(a, b) = 1$ (takové číslo budeme nazývat *odmocninou*). Postupujme indukcí podle $a+b$. Pokud $a+b=2$, máme

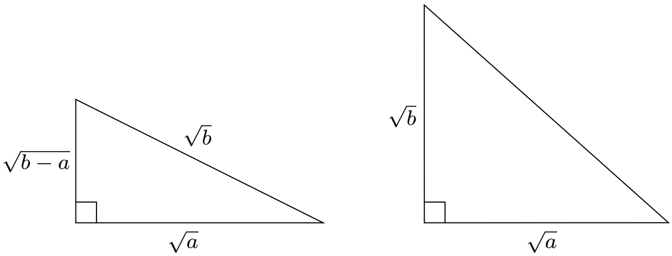
[3] If the required operation could have been done with the number.

$\sqrt{\frac{a}{b}} = 1 = \cos 0$. Nechť nyní $a + b > 2$, $a \neq b$ (jedničku už jsme vyrobili) a všechny odmocniny s nižším součtem čitatele a jmenovatele než $a + b$ již umíme dostat. Rozlišíme dva případy:

(1) Pokud $a < b$, pak

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b-a}}\right),$$

což snadno nahlédneme z pravoúhlého trojúhelníku s přeponou délky $\sqrt{b}$ a odvěsnami délek $\sqrt{a}$ a $\sqrt{b-a}$ (díky odmocninám a Pythagorově větě se skutečně jedná o pravoúhlý trojúhelník). Navíc odmocnina $\sqrt{\frac{a}{b-a}}$ má součet čitatele a jmenovatele $b < a+b$, takže ji z indukčního předpokladu umíme dostat. Hodnota $\operatorname{arctg} x$ náleží pro $x > 0$ intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, takže $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b-a}}$ je skutečně úhel v našem trojúhelníku naproti odvěsně délky $\sqrt{a}$.



(2) Pokud $a > b$, využijeme nejprve minulého kroku k získání $\sqrt{\frac{b}{a}}$ a poté máme

$$\operatorname{tg}\left(\arccos\left(\sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right)\right) = \sqrt{\frac{a}{b}},$$

což lze opět snadno ověřit v pravoúhlém trojúhelníku o odvěsnách délek $\sqrt{a}$ a $\sqrt{b}$. Postupně dostaneme úhel naproti odvěsně délky $\sqrt{b}$, pak jeho sinus, pak úhel naproti odvěsně délky $\sqrt{a}$ a nakonec kýženou odmocninu. Korektnost použití funkcí arctg a arccos si můžeme rozmyslet analogicky minulému případu.

Tím je důkaz indukcí ukončen.

Poznámky:

Na osmičku nebyla úloha moc těžká. Po odhalení finty s odmocninami už šlo jen o to, jak řešení co nejlépe uchopit, ke kterémuž účelu asi nejlépe posloužila právě indukce. Přesto se sešlo jen devět řešení – pět z nich obdrželo přes občasné drobné prohřešky plný počet bodů. Doufám, že to mohu aspoň částečně přičítat pozdě opravené chybě v zadání a příště se s osmou úlohou utká více řešitelů.

Dva řešitelé se pokoušeli dokázat, že lze získat každé kladné reálné číslo (resp. celý interval $(0, 1)$), což není možné, protože jakýkoliv interval obsahuje reálných čísel „moc“. Pro podrobné vysvětlení doporučuji nahlédnout do seriálu z 21. ročníku v našem archivu[4]. *(David Hruška)*

[4] *mks.mff.cuni.cz/archive/21/10.pdf*

Politika

1. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(85; 76; 2,62; 3,0)

Do druhého kola prezidentských voleb v PraSestánu postoupili tři kandidáti: Pašík, Čuník a Vepřík. Každý z milionu voličů zahlasoval tím způsobem, že tyto kandidáty nějak seřadil. Ukázalo se, že více než polovina voličů upřednostňuje Pašíka před Čuníkem a více než polovina voličů upřednostňuje Čuníka před Vepříkem. Musí už nutně dávat více než polovina voličů přednost Pašíkovi před Vepříkem?

(Martin Hora)

ŘEŠENÍ:

Odpověď zní, že nemusí, což dokážeme nalezením protipříkladu. Hledáme způsob, jak mohou volby dopadnout, abychom dodrželi zadané podmínky, a přitom Pašíka před Vepříkem upřednostňovala méně než polovina lidí. Uvažujme tedy

- 499999 voličů, kteří hlasují v pořadí Čuník, Vepřík, Pašík,
- 499999 voličů, kteří hlasují v pořadí Vepřík, Pašík, Čuník a
- 2 voliče, kteří hlasují v pořadí Pašík, Čuník, Vepřík.

Snadno ověříme, že Pašíka před Čuníkem a Čuníka před Vepříkem preferuje více než polovina voličů. Naopak raději Pašíka než Vepříka mají jen dva voliči, což má do poloviny z milionu daleko.

POZNÁMKY:

Úloha byla jednoduchá, a proto se to ve výsledkové listině hemží trojkami. Jen někteří si nejspíš špatně přečetli zadání a řešili úlohu pro nějaký menší počet voličů. Když neokomentovali, že to pro milion bude fungovat podobně, strhla jsem jim jeden bod. *(Bára Kociánová)*

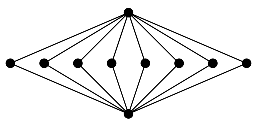
Úloha 2.

(74; 69; 2,78; 3,0)

Některé dvojice z deseti ministerstev jsou propojené. Každé ministerstvo každý den v pravé poledne pošle všechny oběžníky (kopie), které má k dispozici, všem s ním propojeným ministerstvům. Zákon o oběžnících stanovuje, že pokud ministerstvo vyšle oběžník, musí jej do dvou dnů obdržet všechna ostatní ministerstva. Zákon o byrokracii dodává, že se to nikdy nesmí stihnout za jediný den. Navrhněte nějaké legální propojení ministerstev. *(David Hruška)*

ŘEŠENÍ:

Propojení znázorněme jako graf – vrcholy grafu jsou ministerstva a hrana mezi dvěma vrcholy značí, že odpovídající ministerstva jsou propojená. Uvažme propojení jako na obrázku. Potom pro každé ministerstvo platí, že poslední ministerstvo obdrží jeho oběžník druhý den.



Poznámky:
Úloha byla velmi jednoduchá a šlo ji vyřešit spoustou více či méně elegantních propojení. Asi nejčastějším řešením bylo úplné bipartitní zapojení (ministerstva jsou rozdělena do dvou skupin tak, že každá skupina obsahuje alespoň dvě ministerstva a ministerstva jsou spojená tehdy, když jsou v různých skupinách). *(Honza Krejčí)*

Úloha 3.

(48; 27; 1,58; 2,0)

Politik chce v rámci předvolební kampaně projet n měst. Začíná v hlavním městě[5] a každé město chce navštívit právě jednou. Mezi každými dvěma městy vede obousměrná silnice. Navíc chce projet všemi silnicemi, které nechal za předchozího volebního období opravit. Kolika způsoby to může uskutečnit, jestliže nechal opravit m silnic a z každého města vede nejvýše jedna opravená silnice?

(Alexander „Olin“ Slávik)

Řešení:
Výsledek úlohy závisí na tom, zda z hlavního města vede opravená silnice, nebo ne. Rozeberme nejprve situaci, kdy z hlavního města žádná opravená silnice nevede.

Uvědomme si, že jakmile politik navštíví město, z něhož vede opravená silnice, nemá potom jinou volbu, než odjet právě po ní. Nemá proto smysl uvažovat dvě města propojená opravenou silnicí jako dvě města – místo toho si je budeme představovat jako jedno *dvojměsto*. Dvojměst je m a obyčejných měst $n-2m-1$ (odečetli jsme hlavní město, protože to už politik navštívil). Dohromady tedy zbývá projet $n-m-1$ měst.

Nyní máme úlohu přeformulovanou: Politik chce v rámci předvolební kampaně navštívit ještě $n-m-1$ měst, přičemž m z nich jsou dvojměsta, v nichž si navíc může vybrat, jestli rozdává balónky nejdřív na levém, nebo na pravém břehu řeky. Určit počet možností je teď už jednoduchá kombinatorika. Nejprve stanovíme pro každé dvojměsto pořadí obou břehů; to dává 2^m. A potom je potřeba nějak seřadit všechna města, což lze udělat $(n-m-1)!$ způsoby. Dohromady má tedy politik na výběr z $2^m(n-m-1)!$ variant, jak svou spanilou jízdu uskutečnit.

Pokud z hlavního města naopak nějaká opravená silnice vede, musí ji politik využít hned na začátku (protože se do hlavního města nevrací – každé město má totiž navštívit právě jednou). Představíme-li si situaci poté, co politik tuto silnici projel, je shodná s předchozí částí příkladu, ale měst je o jedno méně a opravených silnic zrovna tak. V takovém případě je tedy počet způsobů roven

$$2^{m-1}((n-1)-(m-1)-1)! = 2^{m-1}(n-m-1)!.$$

Poznámky:
Na trojku se úloha ukázala býti dost zákeřnou. Správných řešení bylo zhruba stejně jako těch, v nichž řešitel zapomněl ošetřit případ, kdy z hlavního města vede opravená cesta. Tento prohřešek jsem trestal ztrátou bodu. Jak se dalo očekávat, další řešitelé zapomněli započíst to, že se opravené silnice dají projíždět oběma směry, což vedlo k chybnému výsledku $(n-m-1)!$ a ztrátě dvou bodů.

Největší problém mi při opravování dělali ti řešitelé, kteří si vyložili zadání jinak, než bylo myšleno: Uvažovali, že se politik po návštěvě posledního města vrací zpět do města hlavního. To ale ovlivní výsledek, protože potom by bylo možné opravenou silnici z hlavního města projet až při tomto návratu, a ne hned při první cestě. Protože zadání nebylo zcela jasné, byl jsem rozhodnutý těmto řešitelům udělit plný počet bodů, pokud pozměněnou úlohu vyřeší úplně správně, ale to nakonec nezvládl nikdo. Správným výsledkem by totiž v takovém případě měl být vzorec $2^m(n-m-1)!$, jenže až pro $n \geq 3$. Speciálně pro $n=2$, $m=1$ je ale počet možností roven jedné, což odpovídá $2^{1-1}(2-1-1)!$.

[5] Hlavní město počítáme jako jedno z n měst.

Svůj proslov skončím, jako správný politik, apelem: Když vám nebude jasné, jak je zadání myšleno, nebojte se napsat na *mks@mff.cuni.cz*. Pokud nám opravdu pomůžete odhalit nejednoznačnost v zadání, budeme vám zavázáni. *(Kuba Krásenský)*

Úloha 4.

(42; 21; 2,67; 2,0)

Každá ze tří politických stran má sto členů. Dále je známo, že každý člen má mezi členy zbylých dvou stran alespoň 101 *přátel*[6]*. Dokažte, že existuje trojice lidí z různých stran, kde se přátelí každý s každým.*

(Honza Krejčí)

Řešení:

Pro spor předpokládejme, že neexistuje trojice politiků z různých stran, kteří se všichni vzájemně přátelí. Uvažme politika a, jehož počet přátel (označme jej p) v jedné z cizích stran je maximální. Označme stranu politika a jako A, stranu s p přáteli politika a jako B a zbylou stranu C. Vzhledem k tomu, že politik a má nejméně 101 přátel, musí mít ve straně C alespoň jednoho přítele c. Ten má nejvýše $100-p$ přátel ve straně B (jinak by vzniknul trojúhelník z a, c a jejich společného přítele). Přitom má opět alespoň 101 přátel, a tedy musí mít alespoň $p+1$ přátel ve straně A, což je spor s maximalitou p.

Poznámky:

Úloha se ukázala být docela zákeřnou. Našlo se několik řešitelů, kteří se ji snažili vyřešit kombinatoricky, ale tato cesta nevedla k úspěchu. Docela velká skupina úlohu řešila indukcí podle počtu přátel (kdy přes přátele těchto přátel šla úloha převést na předpoklad indukce). Rovněž se objevilo několik úspěšnějších či méně úspěšných rozebírání případů a také řešení opřená o extremální princip.

Častou chybou byla úvaha, že když má každý politik 101 známých, pak existuje politik, který má 100 známých v jedné straně. Toto tvrzení není pravdivé. Lze ho vyvrátit například rozdělením každé strany do dvou stejně početných skupin. Vhodným spřátelením skupin do dvou „trojúhelníků“ (v každých dvou skupinách trojúhelníku se zná každý s každým) obdržíme pro každého politika 100 známých. Stoprvní známost dostaneme tak, že vhodně najdeme skupiny, které ještě nejsou spřáteleny, a v této dvojici skupin přiřadíme každému politikovi právě jednoho kamaráda z druhé skupiny. *(Honza Krejčí)*

Úloha 5.

(48; 28; 2,15; 2,0)

Každý z milionu úředníků má svůj unikátní kód sestávající z šesti číslic. Kvůli problémům se zaměňováním vládla rozhodla, že kódy každých dvou úředníků se musejí lišit alespoň na dvou pozicích. Kolik nejméně úředníků musí být propuštěno?

(Míša Hubatová)

Řešení:

Dokážeme, že musí být propuštěno nejméně 900 000 úředníků.

Nejprve ukážeme, že může existovat nejvýše 100 000 kódů složených z šesti číslic takových, že se každé dva liší na alespoň dvou pozicích. Uvědomíme si, že pěticiferných kódů složených z číslic $0, \dots, 9$ je právě 10^5. Pokud by existovalo více než 100 000 vyhovujících kódů, některé dva by se shodovaly na prvních pěti pozicích, a tedy se lišily na jediné pozici.

Nyní zkonstruujeme 100 000 kódů, z nichž se každé dva liší na alespoň dvou pozicích. Na prvních pět pozic volíme libovolně číslice $0, \dots, 9$. Na šestou pozici doplníme zbytek ciferného součtu prvního pětičíslí po dělení deseti. Získáváme 10^5 kódů, z nichž se každé dva liší na alespoň

[6] Přátelství je vzájemné.

jedné z prvních pěti pozic. Liší-li se dva kódy právě na jedné z prvních pěti pozic, liší se nutně i na šesté pozici. Odtud máme 100 000 vyhovujících kódů.

Musíme propustit nejméně $10^6 - 10^5 = 900\,000$ úředníků.

Poznámky:
Řešení úlohy má dvě části. Zaprvé stanovení horního odhadu na počet vyhovujících kódů a zadruhé důkaz, že takový počet platných kódů skutečně existuje. Mnozí řešitelé provedli jen jednu z těchto částí, což nestačí, neboť zadání požaduje nejmenší počet úředníků, které je třeba propustit.

Zajímavostí je, že se v řešeních vyskytlo mnoho různých výsledků. *(Míša Hubatová)*

Úloha 6.

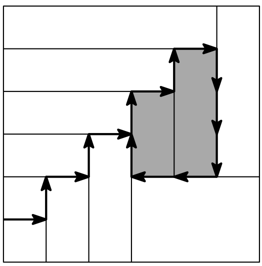
(46; 21; 1,96; 1,0)

Město má tvar obdélníka. Jeho hlavní ulice jsou úsečky rovnoběžné s některým jeho okrajem (stranou obdélníka) a rozdělují jej na obdélníkové čtvrti. Centrem nazveme takovou čtvrť, která nesousedí s okrajem. Podle vyhlášky žádná hlavní ulice nevede napříč celým městem. Dokažte, že město má centrum.

(David Hruška)

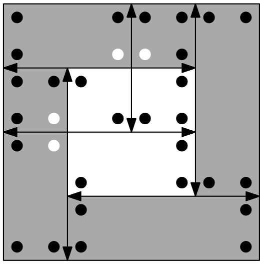
Kdybychom byli zcela exaktní, museli bychom říci, že zadání neplatí – kdyby ve městě nebyla žádná hlavní ulice, byla by splněna vyhláška, ale přesto by město nemělo centrum. Tuto chybu zadání odpustíme a budeme dále předpokládat, že se ve městě alespoň jedna hlavní ulice nachází. Jelikož jsou čtvrti obdélníkové, dokonce to znamená, že existuje nějaká hlavní ulice končící na okraji města.

Řešení projížďkou:
Projedeme se po městě. Vjedeme do něj některou hlavní ulicí a dojedeme až na konec této ulice (kde už nejde pokračovat rovně). Tento konec je kvůli vyhlášce uvnitř města, a protože jsou všechny čtvrti obdélníkové, jedná se o křižovatku tvaru T. Díky vyhlášce je alespoň jeden konec ulice, na kterou jsme narazili, opět uvnitř města. Vydáme se tedy na něj. Opět dojedeme na konec a proces opakujeme. Takto projíždíme městem tak dlouho, než dojedeme na místo, na kterém už jsme jednou byli. Mezi okamžikem, kdy jsme na tomto místě byli poprvé, a kdy jsme na něj dojeli podruhé, jsme objeli neprázdnou oblast, v níž je každá čtvrť centrem.



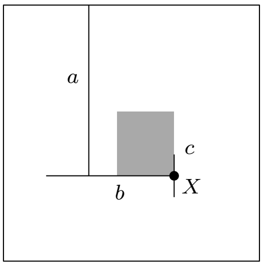
Řešení počítáním rohů:
Označme x počet čtvrtí, které sousedí s okrajem města. Každá čtvrť má 4 rohy, tedy máme pouze $4x$ rohů čtvrtí sousedících s okrajem. Když objedeme město kolem dokola po okraji, střídavě potkáváme čtvrti sousedící s okrajem a hlavní ulice, které je oddělují. Díky vyhlášce nepotkáme jednu hlavní ulici dvakrát, a proto je hlavních ulic alespoň x. Každá hlavní ulice má dva konce (okraj města nebo křižovatku tvaru T) a dvě ulice nemůžou končit na stejném místě, tedy celkem je alespoň $2x$ konců ulic. U každého konce ulice jsou právě dva rohy sousedních

čtvrtí, a navíc jsou v rozích města další 4 rohy čtvrtí – proto je celkem alespoň $4x+4$ rohů čtvrtí. Nemůžou všechny příslušet čtvrtím sousedícím s okrajem, takže některý z nich musí příslušet centru.



Řešení extremálním principem:

Označme a (některou) nejdelší hlavní ulici vycházející z některého (bez újmy na obecnosti severního) okraje města. Druhý konec této ulice nemůže být na okraji města, tedy ústí do jiné ulice – označme ji b. Alespoň jeden konec ulice b díky vyhlášce neleží na okraji města. Bez újmy na obecnosti se jedná o východní konec ulice b – označme tento konec X a ulici, do které ústí, označme c. Nyní se podíváme na čtvrť, jejíž roh leží severozápadně od bodu X. Tato čtvrť nemůže sousedit s východním, jižním ani západním okrajem města (kvůli ulicím a, b, c). Nemůže ale sousedit ani se severním okrajem města, protože by pak ulice c byla delší než a. Takže se jedná o centrum.



Poznámky:

Jak je vidno ze vzorového řešení, k úloze šlo přistupovat množstvím rozmanitých přístupů. Proto mě trochu mrzí, že na této úloze ztroskotala nejen řada nadějných nováčků, ale i někteří ostřílení borci. Typickou chybou bylo například prohlásit, že třetí ulice, kterou projíždíme při projížďce, musí ústit z opačného konce než první. Zatímco většina úspěšných řešení použila projížďku, imaginární bod jsem se rozhodl udělit Honzovi Šormovi s extremálním principem. Nejen za netradiční přístup, ale především za demonstraci toho, že kdyby mlžící řešitelé stavící postupně několik ulic (takových jsem potkal dost) byli co k čemu a použili pár vhodně mířených slov, mohli namísto jednoho bodu dostat plný počet. *(Mirek Olšák)*

Úloha 7.

(16; 8; 2,44; 2,0)

Na velkém nádvoří jsou na zemi vyznačeny vrcholy čtvercové sítě a na některých z nich stojí židle. Rozhodněte, zda lze na jakoukoliv takovou konfiguraci židlí usadit republikány a demokraty tak, aby na každé židli seděl právě jeden politik, aby se pro každou řadu počet v ní sedících demokratů lišil od počtu v ní sedících republikánů nejvýše o jedna a to samé aby platilo pro všechny sloupce.

(David Hruška)

Řešení:

Provedeme důkaz matematickou indukcí podle počtu židlí. Je-li na nádvoří pouze jedna židle, posadíme na ni republikána. Tím je zadání splněno.

Nyní předpokládejme, že pro libovolné rozestavení n židlí umíme politiky rozesadit za splnění podmínek ze zadání. Uvažujme nyní nějakou konfiguraci s $n+1$ židlemi. Mohou nastat dva případy.

Pokud existuje řádek nebo sloupec s lichým počtem židlí (nechť je to bez újmy na obecnosti řádek), odebereme libovolnou židli z tohoto řádku. Na zbylých n židlí pomocí indukčního předpokladu posadíme politiky tak, aby jejich rozesazení splňovalo zadání. Následně vrátíme odebranou židli na její místo a posadíme na ni politika, jehož strana je v příslušném sloupci zastoupena méněkrát (v případě shodného zastoupení zvolíme jakéhokoli). Tím zajistíme, že ve sloupci přidané židle bude splněna podmínka. V řádku této židle bude také splněna podmínka, protože v tomto řádku původně seděl sudý počet politiků, tedy stejně republikánů jako demokratů. Ostatní řádky a sloupce jsme nezměnili, takže jsme dosáhli vyhovujícího rozesazení.

V opačném případě je ve všech řádcích i sloupcích sudý počet židlí. Pak odeberme libovolnou židli. Na zbylých n židlí opět rozesadíme politiky dle indukčního předpokladu a odebranou židli na nádvoří vrátíme. Počet dosud usazených politiků je lichý, a tak některá politická strana S v počtu politiků převažuje nad druhou stranou T. V každém řádku kromě toho s odebranou židlí sedí sudý počet politiků, a proto jsou v nich obě politické strany zastoupeny stejně. Z toho plyne, že aby strana S celkově převažovala, musí převažovat v řádku s odebranou židlí. Stejně tak musí strana S převažovat i ve sloupci s odebranou židlí, a tedy usazením politika ze strany T na tuto židli docílíme vyhovujícího zasedacího pořádku – v každém řádku i sloupci bude stejný počet demokratů jako republikánů.

Pro libovolnou konfiguraci $n+1$ židlí tedy umíme posadit politiky dle zadání.

Z principu matematické indukce tedy plyne, že lze rozesadit demokraty i republikány dle zadání pro jakoukoliv konfiguraci židlí.

Alternatovní řešení (podle Františka Coufa):

Uvažme graf, jehož vrcholy budou jednotlivé sloupce a řádky čtvercové mřížky. Mezi vrcholem reprezentujícím i-tý sloupec a vrcholem reprezentujícím j-tý řádek vede hrana právě tehdy, když se na nádvoří nachází židle v i-tém sloupci a v j-tém řádku. Nyní chceme dokázat, že hrany tohoto grafu lze obarvit dvěma barvami (označme je R a D) tak, aby se u každého vrcholu počty hran jednotlivých barev, které z tohoto vrcholu vychází, lišily nejvýše o jedna.

Tento graf je bipartitní, jelikož všechny hrany spojují vrchol sloupce a vrchol řádku. Neexistuje žádná hrana mezi dvěma vrcholy sloupců ani dvěma vrcholy řádků. Z bipartity plyne, že všechny kružnice v grafu mají sudou délku.

Graf obarvíme následujícím postupem. Dokud je v grafu nějaká kružnice, tak na její hrany střídavě používáme barvy R a D a následně obarvené hrany z grafu odebereme.

Po obarvení všech kružnic nám zbyde les. Ten budeme obarvovat po jednotlivých komponentách (stromech). Strom obarvíme například takto: Vybereme si libovolný vrchol, odkud začneme. Hrany, které z tohoto vrcholu vychází, obarvíme střídavě barvami R a D. Následně se věnujeme vrcholům, do kterých již vede jedna obarvená hrana. U těchto vrcholů opět dobarvíme ostatní hrany střídavě barvami R a D. Přitom vždy začínáme obarvovat opačnou barvou, než jakou má hrana, která do tohoto vrcholu už vede.

Tak dostaneme vyhovující obarvení stromu, a tedy i původního grafu, protože přidáváním na střídačku obarvených kružnic neměníme rozdíl počtu zastoupených barev u pevného vrcholu.

Poznámky:
Zhruba polovina řešitelů si s úlohou správně poradila. Každý z nich se k cíli dobral jiným postupem. Většina však nějakým způsobem využívala matematickou indukci. Imaginární bod si zasloužil *František Couf* se svou originální aplikací grafů. *(Martin Hora)*

Úloha 8. (8; 4; 2,63; 3,0)

Ve volbách soupeřili dva kandidáti. První z nich dostal a hlasů, druhý b hlasů, přičemž $a > kb$ pro nějaké přirozené k. Hlasy se sčítaly v náhodném pořadí. Jaká je pravděpodobnost, že v průběhu celého sčítání měl první kandidát ostře víc hlasů, než byl k-násobek počtu dosud sečtených hlasů jeho soupeře, tj. že nerovnost platila pro všechny průběžné výsledky během sčítání?

(David Hruška)

Řešení:
Nechť $P(a,b)$, kde $a \geq kb$, značí hledanou pravděpodobnost. Matematickou indukcí podle součtu $a+b$ dokážeme, že

$$P(a,b) = \frac{a-kb}{a+b}.$$

Naše bázové kroky budou $P(a,kb)$, která opravdu vyjde 0, protože nerovnost určitě neplatí po posledním hlasu, a $P(a,0)$, která zřejmě vyjde 1. Nyní předpokládejme, že $a > kb$ a $b \neq 0$ a rovnost platí pro každé $P(a',b')$, kde $a'+b' < a+b$ a $a' \geq kb'$. Pravděpodobnost, že poslední z $a+b$ hlasů získá první politik, je $\frac{a}{a+b}$. Pravděpodobnost, že poslední z $a+b$ hlasů získá druhý politik, je $\frac{b}{a+b}$. Pokud podmínka platí v celém průběhu sčítání, pak musí také platit během $a+b-1$ prvních hlasů. Naopak pokud podmínka platí během $a+b-1$ prvních hlasů, pak bude také platit i po posledním hlasu, tedy v celém průběhu sčítání, neboť $a > kb$. Dostáváme tedy vztah

$$\begin{aligned} P(a,b) &= \frac{a}{a+b}P(a-1,b) + \frac{b}{a+b}P(a,b-1) = \\ &= \frac{a(a-1-kb)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{b(a-kb+k)}{(a+b)(a+b-1)} = \frac{(a-kb)(a+b-1)}{(a+b)(a+b-1)} = \frac{a-kb}{a+b}. \end{aligned}$$

Poznámky:
Sešlo se osm řešení a půlka z nich byla správná. Na stejný výsledek se dalo přijít jiným způsobem, a to tak, že všechny průběhy sčítání hlasů rozdělíme do skupin s nejvýše $a+b$ prvky, které se dají na sebe převést cyklickou záměnou – pak výše nalezená pravděpodobnost platí v každé takto vytvořené skupině. Myslím si, že osmička této série nebyla těžká, ale řešitelé se jí jenom báli. :)

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Letem grafovým světem

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1. (30; 17; 2,73; 2,0)

Jakou hranovou barevnost má bipartitní graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň d?

(Peter „πtr“ Korcsok)

ŘEŠENÍ:

Obarvíme-li hrany daného grafu méně než d barvami, povedou z libovolného vrcholu alespoň dvě hrany stejné barvy. Hranová barevnost grafu je tedy alespoň d.

Dále ukážeme, že d barev na obarvení každého takového grafu stačí. Pro $d = 0$ je hranová barevnost grafu triviálně rovna nule. Dále uvažujme pouze kladné d. Dokážeme, že ve zkoumaném grafu existuje perfektní párování. Hrany toho párování obarvíme jednou barvou, a potom už zbývá jen obarvit graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň $d - 1$. Stejně budeme postupovat dále, dokud neobarvíme všechny hrany[7].

Zbývá ukázat, že zkoumaný graf má perfektní párování. K tomu využijeme Hallovu větu[8]. Nejprve ověřme, že náš graf splňuje její předpoklady. Uvažme dvě partity grafu A, B a libovolnou podmnožinu vrcholů A (označme ji P). Sporem ukážeme, že množina P má alespoň $|P|$ sousedů v množině B. Z P vede celkem $d \cdot |P|$ hran, a pokud by vedly do méně než $|P|$ vrcholů z B, alespoň jeden ze sousedů by měl stupeň větší než d. Z Hallovy věty dostáváme takovou množinu hran, že z každého vrcholu z A vede právě jedna hrana, a ty navíc vedou do různých vrcholů v B. Neboť z každého vrcholu grafu vede stejný počet hran, platí $|A| = |B|$ a jedná se o perfektní párování, čímž je dokončen důkaz obarvitelnosti hran grafu d barvami.

POZNÁMKY:

Překvapilo mě, jak málo řešení bylo správných. Ta chybná se často snažila postupovat matematickou indukcí. Z grafu se stupni vrcholů d vyrobila grafy se stupni $d + 1$ a z obarvení původního grafu vyrobila obarvení nového grafu. Bohužel není jisté, zda takto vytvoříme všechny grafy. Pouze ukazujeme, že všechny obarvitelné grafy umíme obarvit postupně. Jedná se o nechvalně známý typ důkazu kruhem. *(Filip Hlásek)*

Úloha 2. (14; 7; 2,57; 3,0)

Mějme libovolný rovinný graf G, jenž neobsahuje most a jehož všechny vrcholy mají stupeň tři. Ukažte, že jeho duální graf G^* je vrcholově 4-obarvitelný právě tehdy, když je G hranově 3-obarvitelný.

(Peter „πtr“ Korcsok)

[7] Formálně bychom to mohli obhájit matematickou indukcí: pro všechny grafy se stupni vrcholů $d - 1$ obarvení existuje, proto pro každý graf se stupni vrcholů d existuje také.

[8] Viz úvodní text k sérii, str. 10, **Věta 19.** (Hallova, grafová varianta)

Řešení:

Graf G^* je vrcholově 4-obarvitelný, právě když lze v grafu G obarvit stěny pomocí čtyř barev tak, aby spolu nesousedily žádné dvě stejnobarevné stěny. Pro obarvování stěn použijeme modrou, žlutou, zelenou a bílou barvu. Přitom modrou a žlutou budeme považovat za základní barvy, zelenou budeme vnímat jako modrou a žlutou současně a bílé zůstanou stěny, které neobarvíme jinou barvou. Stejné barvy použijeme na obarvování hran, ale vyhneme se bílé. Nyní přeformulujeme zadání do této terminologie.

Obarvení hran grafu G vyhovuje, právě když jsou splněny následující podmínky:

(i) Každá hrana je obarvená alespoň jednou základní barvou.

(ii) Oba podgrafy tvořené jednou základní barvou jsou 2-regulární (tedy všechny vrcholy mají stupeň 2).

Skutečně, máme-li modro-žluto-zelené hranové obarvení grafu G, kde jsou u každého vrcholu právě tyto tři barvy, zjevně platí obě podmínky. Naopak, pokud platí podmínky, u každého vrcholu máme dvě modré hrany, třetí musí být žlutá. Další žlutá se překryje s právě jednou modrou, jedná se tedy o vyhovující obarvení.

Obarvení stěn vyhovuje, právě když pro každou hranu existuje základní barva, která je na právě jedné stěně u této hrany.

Nyní zbývá ukázat ekvivalenci přeformulovaných podmínek. Nejdříve uvažme vyhovující obarvení stěn. Pro každou základní barvu se podíváme na oblast, která jí je obarvena, a její hranici touto barvou obtáhneme. Z toho, že se jednalo o vyhovující obarvení, plyne podmínka (i). Jakékoli obtáhnutí oblasti bude mít v každém vrcholu sudý stupeň, přičemž díky podmínce (i) tento stupeň nemůže být roven 0, tedy platí i podmínka (ii).

Naopak, když máme obarvení hran splňující obě podmínky, bude díky podmínce (ii) podgraf tvořený jednou základní barvou b vždy stěnově 2-obarvitelný. Obarvíme tedy stěny pomocí barvy b a bílé. Kvůli podmínce (i) se bude jednat o vyhovující obarvení stěn.

Poznámky:

Naprostá většina řešitelů místo důkazu druhé implikace použila větu o čtyřech barvách pro G^*. To je jistě korektní řešení, ale je nutné říct, že duální graf rovinného grafu je také rovinný, a navíc se vypořádat s tím, že duální graf je obecně multigraf. Je tedy potřeba buď vynechat smyčky a násobnost hran (a zdůvodnit, proč nám to nevadí), nebo dokázat, že díky tomu, že G neobsahuje most a všechny vrcholy jsou stupně tři, smyčky ani násobné hrany nevzniknou (což je o dost těžší). *(Martin Töpfer)*

Úloha 3.

(15; 14; 4,20; 5,0)

Nechť $S_i = \{i-1, i, i+1\} \cap \{1, \ldots, n+1\}$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Kolik systémů různých reprezentantů má množinový systém $\{S_1, \ldots, S_n\}$? *(Peter „πtr“ Korcsok)*

Řešení:

Zadaný množinový systém vypadá takto:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{1, 2\}, \\ S_2 &= \{1, 2, 3\}, \\ S_3 &= \{2, 3, 4\}, \\ &\vdots \\ S_n &= \{n-1, n, n+1\}. \end{aligned}$$

Označme $f(n)$ počet SRR tohoto systému pro dané n.

Nejprve spočítáme $f(n)$ pro malá n. Pro $n = 1$ máme pouze množinu $S_1 = \{1, 2\}$, tedy dva různé SRR. Pro $n = 2$ máme množiny S_1 a S_2; z S_1 můžeme opět vybrat 1 nebo 2. V obou případech pak máme dvě možnosti výběru reprezentanta pro S_2, takže $f(2) = 4$.

Indukcí dokážeme, že $f(n) = F_{n+3} - 1$, kde F_i je i-tý člen Fibonacciho posloupnosti. Pro $n = 1, 2$ už jsme to ověřili. Předpokládejme, že $n > 2$ a rovnost platí pro $n - 1$ a $n - 2$, a uvažme množinový systém pro n. Jak pro něj můžeme vybrat systém různých reprezentantů? Rozebereme tři případy:

(i) Z S_1 vybereme za reprezentanta 1. Pak nám zbývá vybrat reprezentanty pro systém $S_2 \setminus \{1\}, S_3, S_4, \ldots, S_n$, což můžeme udělat $f(n-1)$ způsoby.
(ii) Z S_1 vybereme 2 a z S_2 vybereme 1. Pak nám zbývá systém $S_3 \setminus \{2\}, S_4, S_5, \ldots, S_n$, který má $f(n-2)$ SRR.
(iii) Z S_1 vybereme 2 a z S_2 vybereme 3. Z S_3 už pak musíme nutně vybrat 4, z S_4 musíme zvolit 5 atd. Konečně z S_n nezbývá než zvolit $n + 1$. Takový SRR tedy existuje jen jeden.

Z toho plyne, že

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) + 1 = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} - 1 + 1 = F_{n+3} - 1,$$

což jsme chtěli dokázat.

POZNÁMKY:
Systém různých reprezentantů byl v seriálu poněkud nešťastně definován jako množina,[9] což umožnilo vyložit si zadání tak, že nezáleží na tom, které množině přiřadíme kterého reprezentanta. Tento výklad (s řešením $f(n) = n + 1$) jsem uznával také, přestože nebyl úmyslný a dost úlohu ulehčil.

Navzdory tomuto omylu ale většina řešitelů kupodivu úlohu pochopila tak, jak byla původně myšlena. Vyjádřit $f(n)$ pomocí Fibonacciho posloupnosti zvládla jen menší část z nich, ale většina přišla na správný rekurentní vztah, což k hodnocení plným počtem bodů stačilo.

(Ondra Cífka)

[9] Někdy se SRR definuje jako prostá funkce, která každé množině ze systému přiřadí nějaký její prvek.

Seriál – Letem grafovým světem III

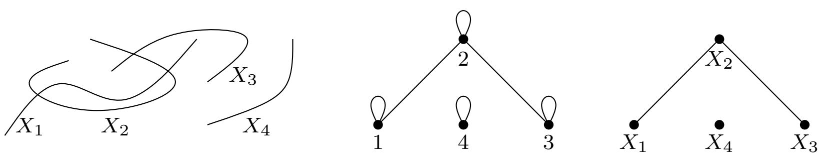
Vítáme Tě u třetího dílu seriálu o teorii grafů. Tentokrát se ponoříme do studia takzvaných průnikových grafů. Než to ale uděláme, dovolíme si Tě před něčím varovat, nebo lépe řečeno na něco Tě upozornit. Průnikové grafy jsou poměrně obsáhlé a výhradně vysokoškolské téma, takže mnoho poznatků o nich značně přesahuje rámec našeho seriálu. Zároveň se jedná o velmi teoretické téma, které sice má svá uplatnění (například při značkování map nebo v biologii při rekonstrukci genomu), ale ta opět většinou přesahují rámec seriálu natolik, že si je nebudeme schopni nijak podrobně popsat. Tento díl tedy považuj za jakousi stručnou sondu do světa průnikových grafů, o kterých se budeme bavit, protože nám přijdou zajímavé, a ne proto, že bychom díky nim chtěli uspět v matematické olympiádě nebo udělat dojem na kamarády nematematiky. Dost už ale bylo řečí kolem, pusťme se do toho!

Základy aneb průnikové grafy pro zelenáče

Definice 1. Mějme systém (ne nutně různých) množin $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Potom můžeme následujícím způsobem definovat *průnikový graf G systému $\mathcal{X}$*: vrcholy G jsou $1, 2, \ldots, n$ a hrana je mezi vrcholy i a j právě tehdy, když $X_i \cap X_j \neq \emptyset$. O grafu pak řekneme, že je *průnikový*, pokud je izomorfní průnikovému grafu nějakého systému množin.

Poznámka 2. V takovém grafu vzniknou smyčky, ale my je budeme ignorovat. Dále se budeme dopouštět drobných nekorektností – například, pokud tím nedojde ke zmatení, budeme vrcholy označovat stejně jako příslušné množiny; dokonce často budeme vrcholy a množiny zaměňovat.

Na následujícím obrázku můžeš vidět systém množin bodů v rovině a jeho průnikový graf nejprve se smyčkami (důsledně podle definice) a pak bez smyček, jak jej budeme chápat ve zbytku textu.



Důsledná a volnější interpretace definice průnikového grafu

Definice průnikových grafů se na první pohled může zdát trošku odtažitá. Nejedná se ale o nic složitého – s průnikovými grafy jsme se už setkali. Konkrétně hranový graf $L(G)$ grafu G je průnikovým grafem systému hran grafu G, kde hrany bereme v souladu s definicí jako dvojice vrcholů, a ne jako křivky na papíře. Ba co víc, každý graf, který jsme v dosavadním průběhu seriálu zmínili, byl průnikový. Platí totiž dokonce následující věta.

Věta 3. *Každý graf je průnikový.*

Důkaz. Mějme graf $G = (V, E)$. Pro každý vrchol $v \in V$ definujeme $S_v = \{e \in E \mid v \in e\}$. Z definice S_v snadno nahlédneme, že pro všechna $u \neq v \in V$ platí $\{u, v\} \in E$ právě tehdy, když $S_u \cap S_v \neq \emptyset$. □

Z předchozí věty si můžeme odnést několik zajímavých závěrů. Zaprvé to je fakt, že každý graf lze reprezentovat jako průnikový, takže zkoumat tuto třídu grafů může být užitečné. Zadruhé fakt, že obecné průnikové grafy nejsou nijak zvlášť zajímavé – jsou to prostě všechny grafy. Dává tedy smysl nějakým způsobem omezit systém množin, jež pronikáme, například na přímky v rovině, koule v prostoru nebo tříprvkové podmnožiny přirozených čísel. Poté můžeme zkoumat, jaké třídy grafů lze reprezentovat různými typy systémů množin. A právě tím se budeme na následujících stránkách zaobírat i my.

Nejprve si definujme několik základních tříd průnikových grafů.

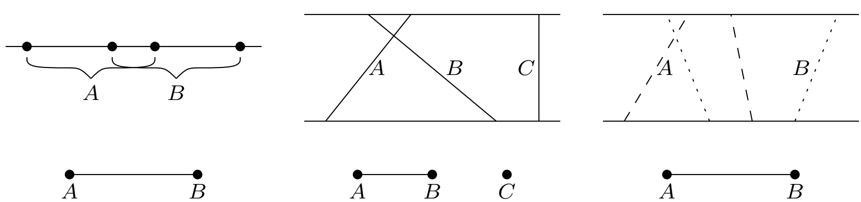
Definice 4. O grafu řekneme, že je

(1) *průnikový graf intervalů* (na přímce), nebo též zkráceně *intervalový*, pokud jej lze reprezentovat jakožto průnikový graf nějakého systému úseček na jedné předem dané přímce.

(2) *permutační*, pokud jej lze reprezentovat jakožto průnikový graf nějakého systému úseček propojujících dvě předem dané různé rovnoběžné přímky.[10] Koncové body těchto úseček se přitom musejí lišit.

(3) *lichoběžníkový*, pokud jej lze reprezentovat jakožto průnikový graf nějakého systému lichoběžníků takových, že pokud protáhneme dvě rovnoběžné strany jednoho z nich na přímky, bude na každé z obou vzniklých přímek ležet právě jedna strana každého lichoběžníku.

K lepšímu pochopení Ti snad pomůže následující obrázek.



Příklad intervalového, permutačního a lichoběžníkového grafu

Nyní vyslovíme a dokážeme jedno tvrzení, které dává výše definované třídy grafů do souvislosti. Jeho důkaz je ale poměrně jednoduchý, takže si ho můžeš provést sám (sama) jako cvičení.

Věta 5. *Každý intervalový graf a stejně tak každý permutační graf je zároveň lichoběžníkovým grafem.*

[10] Těmto grafům říkáme permutační, protože systém úseček vlastně popisuje permutaci (neboli zpřeházení) několika prvků. De facto pak bereme tyto prvky za vrcholy a hranu kreslíme mezi ty vrcholy, jejichž pořadí permutace prohodila.

Důkaz. Nejprve si dokažme část o intervalových grafech. Máme nějaký systém intervalů na přímce a chceme najít systém lichoběžníků, které se protínají „stejným způsobem" jako dané úsečky. Můžeme volit například speciální případ lichoběžníků – obdélníky – a sice takové, že jedna jejich strana vždy splývá s jedním daným intervalem a druhá má nějakou pevnou délku d. Tyto obdélníky se pak protínají stejně jako zadané úsečky a definují lichoběžníkový graf.

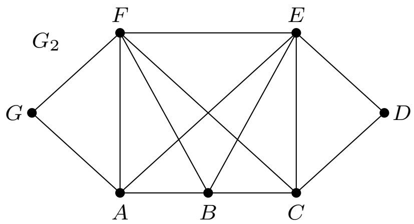
Dále si dokažme část o grafech permutačních. Máme nějaký systém úseček odpovídajících definici a podobně jako v předchozí části z něj chceme „vyrobit" systém rovnoběžníků.[11] Idea je ta, že úsečka je vlastně „nekonečně úzký rovnoběžník" a my tedy tyto úsečky jen nepatrně rozšíříme a tím z nich vytvoříme opravdové rovnoběžníky, které mají vhodné průsečíky. Podrobněji řečeno, z dané úsečky a vyrobíme rovnoběžník tak, že vezmeme všechny body ve vzdálenosti maximálně l od a a tuto množinu pronikneme s pásem vymezeným dvěma danými přímkami. Zbývá jen určit, jak velké má být l, aby se lichoběžníky protínaly tak, jak chceme (a jestli takové vůbec existuje).

Každé dvě úsečky od sebe mají nějakou vzdálenost – buď se protínají, a pak je nulová, nebo ne, a pak je kladná. Těchto vzdáleností je konečně mnoho, takže existuje nejmenší z těch kladných. Označme ji k. Rozmysli si, že pak libovolné kladné $l < \frac{k}{2}$ vyhovuje – není to těžké. Tím je důkaz hotov. □

Cvičení 6. V posledním odstavci důkazu je poměrně malá, ale zásadní chyba, kvůli které je důkaz špatně. Najdi a oprav ji – jedná se skutečně o chybu, ne jen o vypuštění posledního kroku.

Pokud nemáš tušení, v čem je problém, napovíme Ti, že v opomenutí jednoho speciální případu. Své řešení si stejně jako v minulých dílech budeš moci ověřit na konci tohoto textu.

V porovnávání lichoběžníkových, permutačních a intervalových grafů ale můžeme pokračovat. Z první úlohy 3. seriálové série víme, že existuje souvislý permutační graf, který není intervalový. Nějaký takový graf označme G_1. Dále existuje i graf, který je intervalový, ale není permutační. Jako příklad takového grafu lze uvést graf G_2 na následujícím obrázku.



Příklad intervalového grafu, který není permutační

Pokud Ti vadí absence důkazu vlastností grafu G_2, můžeš si ho provést sám (sama) jako cvičení, jež nevyžaduje žádnou složitou teorii, pouze jistou dávku zkoušení nebo dobrý nápad.[12] Avšak není na něm nic moc zajímavého a jedná se spíš o rozebírání možností, takže ho klidně můžeš, stejně jako my, vynechat.

Cvičení 7. Ukaž, že graf G_2 je intervalový, ale není permutační.

A k čemu vlastně grafy G_1 a G_2 jsou? Zaprvé nám říkají, že ani jedna z tříd intervalových či permutačních grafů neobsahuje tu druhou. Zadruhé pak snadno najdeme graf, který je lichoběžníkový, ale není ani permutační, ani intervalový. Takovým grafem je například graf se dvěma komponentami, z nichž jedna je izomorfní G_1 a druhá G_2.

[11] Každý rovnoběžník je lichoběžníkem.

[12] Nápověda k němu je uvedena na konci textu.

O permutačních grafech navíc platí jedno poměrně zajímavé tvrzení s velmi pěkným důkazem, které Ti ponecháme jako cvičení. Až ho vyřešíš, budeš se moci pustit do barvení průnikových grafů.

Cvičení 8. Ukaž, že třída permutačních grafů je rovna třídě doplňků permutačních grafů, tedy že libovolný graf G je permutační právě tehdy, když jeho doplněk $\overline{G}$ je permutační.

Pokud chceš malé pošťouchnutí, rozmysli si, že stačí ukázat jeden směr, tedy že doplněk libovolného permutačního grafu je permutační. Větší nápovědu (vlastně už skoro řešení) si opět můžeš přečíst na konci seriálu.

Průnikové grafy a barevnost

Dovol nám se na chvíli vrátit k barvení grafů. Sice to nejspíš není po přečtení definic úplně zřejmé, ale průnikové grafy částečně s barevností souvisejí – a to jednak společnými aplikacemi v běžném životě, jednak tím, že poskytují nástroj, jak určovat barevnost grafu.

Nejspíš poměrně dobře znáš způsob, jakým se překrývají okna na pracovní ploše počítače. Vzdalme se mírně od různých oblých tvarů oken a představme si je všechny jako obdélníky, jejichž strany jsou rovnoběžné s okraji obrazovky. Když se podíváme na průnikový graf těchto obdélníků, můžeme z něho získat několik informací – třeba jeho barevnost nám určuje maximální počet vrstev oken.

Neměli bychom také zapomenout na dluh z minulého dílu, kde jsme si (pouze) zadefinovali skutečně netradiční způsob barvení – $L(p,q)$-značkování.[13] Tam jsme od sousedních vrcholů požadovali „rozdíl“ barev alespoň p a od těch „sousedících ob jeden vrchol“ rozdíl alespoň q.

K čemu je takováto zrůda dobrá a proč ji zmiňujeme zrovna teď? Protože s něčím podobným se potkáváš i Ty téměř každý den. Představ si třeba mobilní síť, která pokrývá většinu území (nejen) České republiky. K tomu je potřeba určité množství vysílačů, přičemž každý z nich zajišťuje signál v jiné lokalitě. Přesto existuje spousta míst, na kterých je možné chytit signál dvou nebo i více vysílačů zároveň. Pokud by všechny vysílaly na stejné frekvenci, navzájem by se rušily a my bychom z toho nic neměli. Pro bezpečný provoz se musejí vždy lišit alespoň o určitou hodnotu, stejně tak by se měly (o něco méně) lišit i vysílače, které mají společného souseda.

Pokud si tedy vezmeme území pokrytá jednotlivými vysílači jako výchozí množiny a vytvoříme průnikový graf tohoto systému, pak přiřazení vysílacích frekvencí vysílačům odpovídá vhodnému obarvení našeho grafu. A když minimální rozdíly frekvencí označíme jako p a q, dostáváme se právě k slibovanému $L(p,q)$-značkování.

Dále jsme v rámci cvičení zjistili, že barevnost úplného grafu K_n je právě n. Je ale možné nalézt graf, jehož barevnost je vysoká, přestože se v něm nevyskytuje žádný výrazně velký úplný podgraf?

Věta 9. *Pro každé přirozené číslo k existuje průnikový graf úseček v rovině, jehož barevnost je alespoň k, ačkoli neobsahuje trojúhelník jako podgraf.*

Třeba pro $k = 3$ to není až tak těžké dokázat – stačí vzít kružnici C_5, na jejíž obarvení potřebujeme alespoň tři barvy. Pro větší hodnoty k to už tak snadno nejde, pomůžeme si ale novým pojmem.

Definice 10. *Součástkou* nazveme trojici $S = (R, \mathcal{U}, Z)$, kde R je obdélník se stranami rovnoběžnými s osami roviny (*rámeček* součástky), $\mathcal{U}$ je nějaká množina úseček v rámečku R a $Z = \{z_1, \ldots, z_l\}$ je množina *zářezů* – po dvou disjunktních obdélníků orientovaných stejně jako

[13] Pokud si tento pojem chceš připomenout, podívej se na stranu 25 předchozích komentářů.

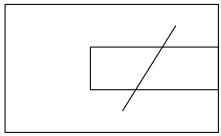
rámeček, jejichž pravý okraj je součástí pravé hranice rámečku R. Navíc vyžadujeme následující vlastnosti:

(i) Průnikový graf úseček $\mathcal{U}$ neobsahuje trojúhelník.
(ii) Pokud úsečka protíná nějaký zářez, tak protíná jeho horní a dolní okraj, speciálně tedy nekončí uvnitř.
(iii) Každé dvě úsečky protínající stejný zářez jsou disjunktní.

Jak taková součástka vypadá a hlavně to, jak se s ní pracuje, bude zřejmé z následujícího důkazu. A jak je v teorii grafů dobrým zvykem, dokážeme si mírně složitější větu, která nám ale umožní použít matematickou indukci.

Věta 11. *Pro každé přirozené číslo k existuje součástka S_k taková, že pro libovolné dobré obarvení průnikového grafu úseček S_k existuje zářez protnutý úsečkami k různých barev.*[14]

Důkaz. Pro $k = 1$ nám stačí vzít následující součástku:



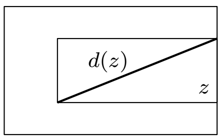
S_1

Po zbytek důkazu předpokládejme, že věta platí pro nějaké k. Takže existuje součástka $S_k = (R, \mathcal{U}_k, Z)$, z níž chceme vytvořit součástku S_{k+1}. Pro každý zářez z označme $d(z)$ jeho diagonálu z levého dolního do pravého horního rohu. Pokud bychom se pokusili přidat $d(z)$ mezi úsečky, porušili bychom třetí podmínku. Vytvořme proto nové zářezy z^D a z^H tak, aby

(i) zářez z^D protínal právě úsečky protínající zářez z (ale už ne úsečku $d(z)$), volíme ho tedy jako úzký zářez „při spodním okraji" zářezu z,
(ii) zářez z^H protínal právě úsečku $d(z)$, bude to proto krátký zářez v pravém horním rohu. Jelikož nesmíme zapomenout na druhou podmínku, zářez z^H neumístíme přímo na horní okraj zářezu z, ale o kousek níž.

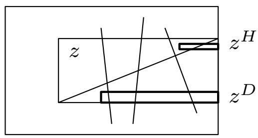
Následující obrázky by měly tyto pojmy trochu přiblížit.

S_k



Nová úsečka $d(z)$

S_k



Nové zářezy z^D a z^H

Definujme dále součástku S^* předpisem

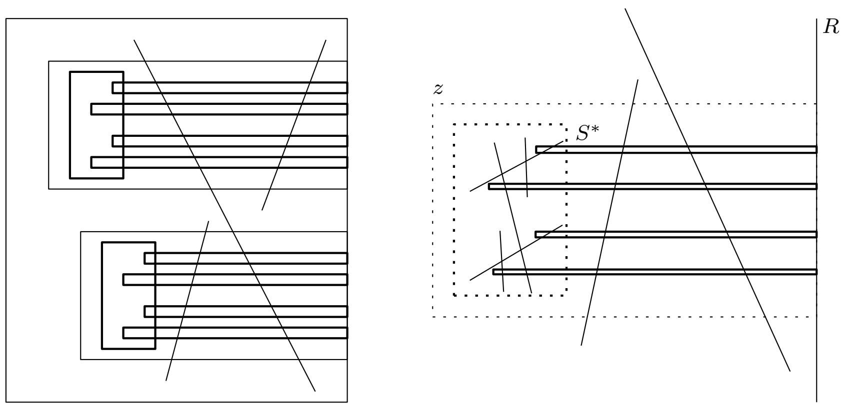
$$S^* = \left(R, \mathcal{U}^* = \mathcal{U}_k \cup \{d(z) \mid z \in Z\}, \bigcup_{z \in Z} \left\{ z^D, z^H \right\} \right).$$

[14]Tady bychom správně měli barvit vrcholy průnikového grafu, ale i v důkazu se nám bude hodit barvit přímo úsečky reprezentující vrcholy. Rozmysli si, že ve skutečnosti je to to samé.

Snad není potřeba dokazovat, že S^* je skutečně součástkou. Určitě taky platí, že pro každé dobré obarvení úseček $\mathcal{U}^*$ nalezneme zářez z původní S_k, jenž obsahuje[15] alespoň $k+1$ různobarevných úseček z $\mathcal{U}^*$. Z indukčního předpokladu totiž existuje zářez z součástky S_k, jenž protíná k různobarevných úseček, diagonála $d(z)$ se ale kříží se všemi těmito úsečkami, a proto musí dostat novou barvu.

Na první pohled by se mohlo zdát, že jsme dosáhli cíle, protože máme skupinu $k+1$ úseček, jež musejí mít vzájemně různé barvy. Ale ještě tomu tak není. Aby nám správně fungovala indukce, musíme opravdu zaručit, aby všech $k+1$ úseček protínalo jediný zářez. Speciálně se dle třetí podmínky nesmějí protínat navzájem.

Vytvořme tedy součástku S_{k+1} ze součástky S_k tím, že do každého zářezu nakreslíme jednu zmenšenou kopii součástky S^* tak, aby byla nalevo od všech úseček protínajících daný zářez. Původní zářezy S_k smažeme a místo nich „prodloužíme“ zářezy každé kopie S^* až na pravý okraj rámečku. Můžeme dostat něco podobného následujícímu obrázku.



Sestrojení součástky S_{k+1} — Detail na jeden zářez původní S_k

Ponechme stranou dost technické a ničím nezajímavé dokazování, že „místa máme dostatek“. Dál si stačí uvědomit, že „vlepením“ kopie S^* nepřidáme žádné nové křížení úseček, proto první a třetí podmínka zůstávají v platnosti. No a pokud nějaká úsečka protínala zářez z, po této operaci protne všechny zářezy vzniklé prodloužením zářezů dané kopie S^*, proto S_{k+1} splňuje i druhou podmínku a je skutečně součástkou.

K čemu nám to všechno vlastně pomůže? Už víme, že v S^* nalezneme zářez z (původní) součástky S_k takový, že na obarvení všech úseček z $\mathcal{U}^*$ protínajících z^D nebo z^H potřebujeme $k+1$ barev (pojmenujme tyto úsečky $\mathcal{U}^*_z$). Když se pak podíváme na stejný zářez z v originální (velké) součástce S_k, nalezneme množinu „velkých“ úseček $\mathcal{U}_z$, na jejíž obarvení potřebujeme alespoň k barev. Tyto úsečky ale protínají jak nový zářez z^D, tak i z^H.

Teď si už stačí jenom uvědomit, že na obarvení množiny $\mathcal{U}^*_z$ potřebujeme alespoň o jednu barvu víc a příslušná úsečka s „barvou navíc“ musí protnout právě jeden ze zářezů z^D a z^H. Ten pak obsahuje úsečky $k+1$ různých barev, čímž jsme splnili podmínky znění věty. □

[15] Tady výjimečně povolujeme i úsečky, které začínají nebo končí uvnitř nebo na okraji zářezu.

Boxicita grafu

Již jsme si ukázali intervalové grafy, což jsou průnikové grafy intervalů na reálné ose. Dále jsme si krátce představili průnikové grafy obdélníků v rovině, jejichž strany jsou rovnoběžné s x-ovou a y-ovou osou – protože tyto grafy nemají žádný ustálený název, pojmenujme je například *obdélníkové* grafy. Podobným způsobem bychom mohli definovat grafy *kvádrové*, *hyperkvádrové* a kopu dalších.

Jaké vztahy platí mezi těmito třídami? Odpověď Ti ponecháváme do následujícího cvičení.

Cvičení 12. Promysli si, že intervalové grafy jsou zároveň obdélníkové a ty jsou zároveň kvádrové. Pokračuje to tak i k vyšším dimenzím?

To nás přivádí k otázce, kolik rozměrů potřebujeme, abychom daný graf G uměli reprezentovat jako průnikový graf vhodných hyperkvádrů.

Definice 13. *Boxicitou*[16] grafu G nazýváme minimální dimenzi d, pro kterou je G reprezentovatelný jako průnikový graf d-dimenzionálních kvádrů, přičemž všechny jejich hrany jsou rovnoběžné s některou z d os prostoru. Tuto hodnotu často značíme $\mathrm{box}(G)$.

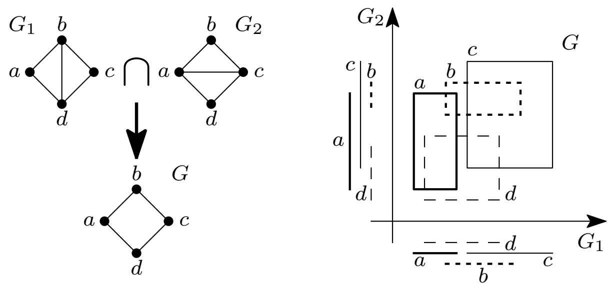
Na začátek si zkusme všimnout jednoho faktu. Není to těžké tvrzení, ale rozhodně vyžaduje chvilku rozmýšlení a trochu představivosti.

Pozorování 14. *Pro každý graf G platí*[17]

$$\mathrm{box}(G) = \min\left\{ d \,\middle|\, \text{existují intervalové grafy } G_1, \ldots, G_d \colon G = \bigcap_{i=1}^{d} G_i \right\}.$$

Obsah tohoto podivného tvrzení Ti snad přiblíží následující příklad.

Příklad 15. Boxicita kružnice C_4 je dva, protože není intervalovým grafem, ale umíme ji dostat jako průnik dvou intervalových grafů. Na základě této znalosti je snadné sestavit příslušný obdélníkový graf, jak vidno na obrázku.



Kružnice C_4 jako průnik dvou intervalových grafů

Možná Tě napadlo, má-li každý graf konečnou boxicitu. Odpověď je poměrně snadná.

Věta 16. *Pro každý graf $G = (V, E)$ s n vrcholy platí* $\mathrm{box}(G) \le \binom{n}{2}$.

---

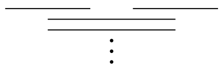
[16] Do češtiny bychom to mohli přeložit například jako *krabičkovost* grafu, ale držme se raději běžného názvosloví.

[17] Pokud máme několik grafů $G_i = (V, E_i)$ na stejné množině vrcholů, pak grafem $\bigcap_i G_i$ rozumíme graf $G = (V, \bigcap_i E_i)$.

Důkaz. Nechť G_e označuje úplný graf K_n bez hrany e, tedy $G_e = K_n - e$. Pak zřejmě platí

$$G = \bigcap_{e \in \binom{V}{2} \setminus E} G_e.$$

Teď už stačí, pokud si všimneme, že každý graf G_e je intervalový, což ukazuje následující obrázek.



Intervalová reprezentace $K_n - e$

Protože „nehran“ může být nejvýše $\binom{n}{2}$, z předchozího tvrzení dostaneme požadovanou nerovnost. □

Tento odhad boxicity ale umíme výrazně zlepšit.

Věta 17. *Pro každý graf* $G = (V, E)$ *s* $n = |V|$ *vrcholy platí* $\operatorname{box}(G) \le \frac{n}{2}$.

Důkaz. Větu dokážeme indukcí podle n. Pokud má graf nanejvýš tři vrcholy, pak je určitě intervalový, a tedy $\operatorname{box}(G) = 1$. Dál proto budeme uvažovat pouze grafy s alespoň čtyřmi vrcholy.

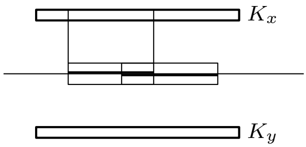
Pokud je graf G úplný, pak je intervalový a má boxicitu 1. V opačném případě existuje nehrana $\{x, y\}$. Víme, že graf $G' = G \setminus \{x, y\}$ splňuje indukční předpoklad, proto

$$\operatorname{box}(G') \le \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1.$$

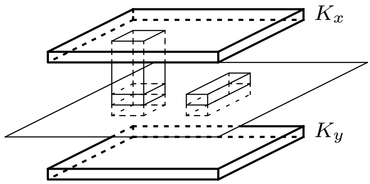
Pro graf G' tedy existuje reprezentace $\mathcal{R}'$ pomocí hyperkvádrů v prostoru $\mathbb{R}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$.

Vytvořme reprezentaci $\mathcal{R}$ pro graf G v prostoru $\mathbb{R}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$: každý hyperkvádr z $\mathcal{R}'$ přeneseme do $\mathcal{R}$, přičemž mu „přidáme nový rozměr“ – nechť v tomto rozměru zabírá právě interval $\langle -1, 1 \rangle$. (Něco podobného jsme dělali při důkazu, že intervalové grafy jsou zároveň lichoběžníkové.) Tímto zařídíme přesné zkopírování grafu G'. Potřebujeme ale ještě doplnit dva hyperkvádry pro vrcholy x a y.

Pro vrchol x vytvořme hyperkvádr K_x, jenž v „novém“ rozměru zabírá právě interval $\langle 9, 10 \rangle$ a ve všech ostatních rozměrech „přesahuje“ každý objekt v $\mathcal{R}'$. Pokud vrchol x sousedí v G s vrcholem u, pak hyperkvádr K_u z $\mathcal{R}$ odpovídající vrcholu u musíme „natáhnout“ tak, aby se s K_x protínal. K tomu nám stačí rozšířit interval v „novém“ rozměru až po 10. Pro vrchol y budeme postupovat podobně, jen ho umístíme na interval $\langle -10, -9 \rangle$.



Rozšíření z $\mathbb{R}^1$ na $\mathbb{R}^2$



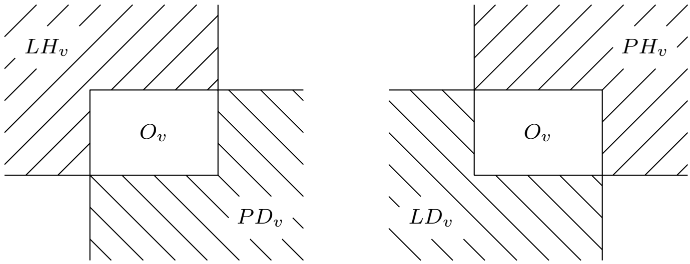
Rozšíření z $\mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}^3$

Po těchto úpravách skutečně dostaneme reprezentaci $\mathcal{R}$ grafu G, která využívá pouze $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ rozměrů. □

Předchozí důkaz nebyl těžký, jen vyžadoval notnou dávku představivosti. Před důkazem následující věty se ale raději pořádně nadechni.

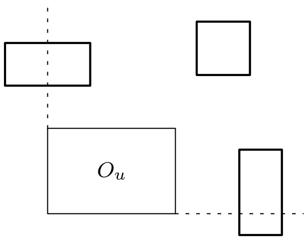
Věta 18. *Každý bipartitní graf s boxicitou nejvýše dva lze reprezentovat jako průnikový graf úseček pouze dvou směrů.*

Důkaz. Mějme bipartitní graf $G = (A \cup B, E)$ s partitami A a B a jeho reprezentaci $\mathcal{R}$ pomocí obdélníků. Pro každý vrchol $v \in A \cup B$ označme O_v obdélník odpovídající vrcholu v a dále si definujme „čtvrtroviny“[18] LH_v, PH_v, LD_v a PD_v dle následujících obrázků:



Definice čtvrtrovin LH_v, PH_v, LD_v a PD_v

Pomocí těchto čtvrtrovin si teď uspořádáme vrcholy v obou partitách: o vrcholech $u, v \in A$ řekneme, že u je „před“ v (budeme to značit $u <_A v$) právě tehdy, když $O_v \cap PH_u \neq \emptyset$ – možné vzájemné polohy obdélníků pro vrcholy u a v jsou vidět na následujícím obrázku. Pro vrcholy $x, y \in B$ bude podmínka mírně jiná: $x <_B y$ právě tehdy, když $O_y \cap PD_x \neq \emptyset$.



Možné pozice pro O_v, pokud $u <_A v$

Obě tato (zatím pouze částečná) „uspořádání“[19] splňují několik vlastností, vypíšeme je ale jenom pro to první (druhé splňuje něco velmi podobného). Většina z nich je docela snadná, jejich důkaz Ti proto ponecháme jako cvičení.

(1) Pro libovolné vrcholy $u, v \in A$ platí $O_u \cap O_v = \emptyset$.

(2) Dva vrcholy $u, v \in A$ splňují $u <_A v$ právě tehdy, když $O_u \cap LD_v \neq \emptyset$.

(3) Pokud pro různé vrcholy $u, v \in A$ platí $u <_A v$, pak určitě neplatí zároveň i $v <_A u$.

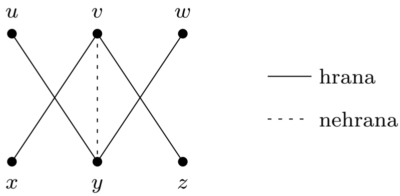
(4) Neexistuje žádná skupina vrcholů $v_1, \ldots, v_k \in A$, pro kterou platí

$$v_1 <_A v_2 <_A \cdots <_A v_{k-1} <_A v_k <_A v_1.$$

[18] Značení je zvoleno jako zkratky pro *levá horní*, *pravá horní*, *levá dolní* a *pravá dolní* čtvrtrovina.

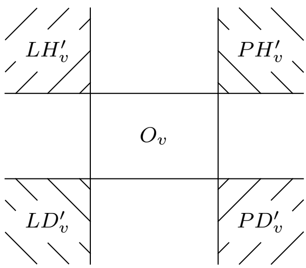
[19] Přestože existuje i pojem *uspořádání* a tyto vztahy mezi vrcholy nesplňují všechny jeho podmínky, dovol nám tady menší nekorektnost. Následující vlastnosti nám stejně zaručí, že relace $<_A$ i $<_B$ umíme rozšířit tak, aby uspořádáními opravdu byly.

Jak jsme už naznačili, toto uspořádaní nemusí být úplné, což znamená, že mohou existovat vrcholy $u, v \in A$, pro které nenastává $u <_A v$ ani $v <_A u$. Opět není moc těžké (i když trochu práce to dá) si promyslet, že vždy umíme nějaké tyto vztahy doplnit tak, abychom potom už žádnou takovouto „neporovnatelnou" dvojici vrcholů v partitě A nenašli a aby přitom byly stále zachovány podmínky (1) až (4). A totéž samozřejmě provedeme i s uspořádáním $<_B$. Pro tato rozšířená uspořádání pak nemůže nastat situace na obrázku (vrcholy $u, v, w \in A$ splňují $u <_A v <_A w$ a pro vrcholy $x, y, z \in B$ platí $x <_B y <_B z$; vrcholy, mezi nimiž není zakreslená hrana ani nehrana, spojeny být mohou, ale nemusejí):



Tato situace nemůže nastat

Proč to platí? Radši si vezmi do ruky tužku a papír, jestli jsi to ještě neudělal(a). Z faktu, že $u <_A v$, víme, že $v \not<_A u$, a tedy $O_u \cap PH_v = \emptyset$; podobně $O_w \cap LD_v = \emptyset$. Označme si ještě „zmenšené" čtvrtroviny dle obrázku:



Definice čtvrtrovin LH'_v, PH'_v, LD'_v a PD'_v

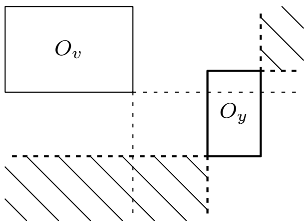
Předpokládejme, že vrcholy u a y jsou spojeny hranou, stejně tak jsou spojeny i vrcholy w a y. Z tohoto plyne, že $O_u \cap O_y \neq \emptyset$ a $O_w \cap O_y \neq \emptyset$. Po krátkém hledání možných poloh pro O_y (chceme, aby vrcholy v a y nesousedily, proto O_v a O_y musejí být disjunktní) dostaneme, že musí platit

$$O_y \cap \left(LH'_v \cup PD'_v\right) \neq \emptyset.$$

Podobně díky existenci hran $\{b, x\}$ a $\{b, z\}$ dostáváme vztah

$$O_v \cap \left(PH'_y \cup LD'_y\right) \neq \emptyset.$$

Když si ale tyto dva vztahy spojíme, narazíme na problém, jak napovídá následující obrázek.



Jedna z možných pozic pro O_y a plocha, kterou pak O_v musí proniknout

Posledním krokem důkazu je ukázat, že pokud žádná šestice vrcholů netvoří zmiňovanou konstelaci, pak skutečně umíme celý graf reprezentovat pomocí úseček dvou směrů. Tuto část jsme se rozhodli nechat na Tobě jako druhou úlohu soutěžní série. $\square$

A něco na rozloučenou

Teď už nadešel čas celý seriál ukončit. Věříme, že se Ti líbil a alespoň některá jeho část Tě zaujala. Omezený prostor seriálu nám umožnil většinu oblastí pouze naťuknout, zatímco mnoho dalších hezkých (ale i pokročilejších) vlastností a aplikací se nám sem už nevešlo. Pokud bys přesto chtěl(a) vědět víc, neváhej nás oslovit nebo se podívat do některé z knih uvedených na konci.

Samozřejmě nemůžeme vynechat slíbenou nápovědu ani tradiční řešení a návody ke cvičením pro kontrolu:

6. Chyba je v tom, že jsme opomněli případ, kdy se všechny úsečky protínají. Pak by všechny vzdálenosti byly nulové, a žádná minimální kladná by tedy neexistovala. Snadno ale nahlédneme, že v tomto případě by vyhovovalo dokonce libovolné kladné l.

7. To, že je graf G_2 intervalový, ukážeme velmi snadno, stačí zkonstruovat daný systém intervalů. To, že není permutační, se ukáže poněkud obtížněji. Zkus kreslit systém úseček reprezentujících vrcholy grafu G_2 v tomto pořadí: D, C, B, A, G, F. Na závěr nebude možné umístit úsečku E.

8. Generující systém pro doplněk lze zkonstruovat například překlopením jedné z rovnoběžek. A pokud se Ti líbí dívat se na permutační grafy pomocí permutací, stačí vzít permutaci π, které odpovídá původní graf, a definovat permutaci σ splňující $\sigma(j) = \pi(n - j)$. Není těžké ukázat, že této permutaci odpovídá právě doplněk původního grafu.

Ač jsme Tě celou dobu prováděli seriálem pouze my dva, není tento text jen naší prací. Možná ještě větší zásluhu než kdokoliv z nás má na vzniku seriálu Kuba Krásenský, kterému tímto děkujeme za to, že prováděl jazykové a věcné korektury a pomohl vybrousit celý text do mnohem čitelnější podoby. Dále dlužíme díky Tondovi Češíkovi a Olinovi za to, že opravili naše typografické chyby a postarali se o perfektní grafickou podobu celého textu, a Martině, která dohlížela na naše obrázky. V neposlední řadě bychom pak rádi poděkovali všem ostatním organizátorům, kteří se svými poznámkami na tvorbě seriálu aktivně podíleli, a také Tobě za to, že sis jej přečetl(a) a dal(a) celé naší společné práci nějaký smysl. Doufáme, že, že Ti onen smysl neunikl a ze seriálu sis něco odnesl(a).

Přejeme Ti mnoho úspěchů jak v poslední seriálové, tak i ve zbylých dvou jarních sériích.

Peter „πtr“ Korcsok a Martin „E.T.“ Sýkora

Literatura a další zdroje

Již v předešlých dílech jsme zmiňovali některá místa, kde se o grafech a jejich světě můžeš hodně dozvědět. Zde bychom Tě rádi odkázali na pár knížek, které více nebo méně známe a můžeme je tedy pro další studium doporučit. A protože teorie grafů je poměrně mladý obor (alespoň ve srovnání s jinými oblastmi matematiky), hranice poznání se tady posouvají docela rychle. Je tedy možné, že za pár let budou tyto knihy zastaralé a jejich místo zaberou nové.

[1] J. Matoušek, J. Nešetřil: *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Karolinum, 2009.
[2] J. Demel: *Grafy a jejich aplikace*, Academia, 2002.
[3] R. Diestel: *Graph Theory*, Springer, 2010.
[4] B. Bollobás: *Modern Graph Thoery*, Springer, 1998.
[5] J.A. Bondy, U.S.R. Murty: *Graph Theory*, Springer, 2008.

Kromě toho můžeš samozřejmě využít i nepřeberné množství různých webových stránek – Wikipedií počínaje a stránkami různých vědců a časopisů konče. Většinou stačí pojmenovat, co zrovna chceš najít (ideálně anglicky), a to pak zadat do svého oblíbeného vyhledávače.

4. podzimní série – Goniometrické funkce

Výsledková listina

1.–2.	*Radovan*	*Švarc*	4	G ČTřebová	3 3 – 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–2.	*Pavel*	*Turek*	2	GTomkovaOL	3 3 1 5 5 5 5 5	25	**25,00**
3.	*Danil*	*Koževnikov*	1	GKepleraPH	3 3 3 5 5 5 5 0	$23 + i$	**24,38**
4.	*Filip*	*Bialas*	2	GOpatovPH	– 3 – 5 5 5 – 5	$23 + i$	**23,79**
5.	*Lenka*	*Kopfová*	0	CZŠSL HnM	3 3 3 5 5 – – –	$19 + i$	**23,22**
6.	*Veronika*	*Hladíková*	2	GMikul23PL	3 3 3 5 5 5 – –	21	**22,79**
7.	*Petr*	*Gebauer*	1	G Mělník	3 3 3 5 5 – – –	19	**22,43**
8.	*Vojtěch*	*Lanz*	1	GZborovPH	3 3 1 5 4 4 0 –	19	**21,88**
9.–10.	*Marie*	*Dohnalová*	2	GNadKavaPH	3 3 3 5 5 – – –	19	**21,52**
9.–10.	*Michal*	*Töpfer*	2	GJPekařeMB	3 3 3 5 5 3 – –	19	**21,52**
11.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	1	GZborovPH	3 3 3 5 – 3 – –	$17 + i$	**21,34**
12.	*Vojtěch*	*Suchánek*	4	GJarošeBO	– – 3 5 5 – 4 5	$22 + i$	**21,32**
13.	*Martin*	*Vrabec*	4	GMRŠKošice	2 3 3 5 5 3 5 –	$21 + i$	**21,27**
14.–15.	*Jan*	*Gocník*	3	GJŠkodyPŘ	3 3 3 5 5 – – –	$19 + i$	**20,84**
14.–15.	*Petr*	*Jakubčík*	1	PORG PH	3 3 3 5 – 3 – –	$17 + i$	**20,84**
16.–17.	*Jan*	*Soukup*	4	G Klatovy	3 3 – 5 5 5 5 –	$23 + i$	**20,67**
16.–17.	*Jiří*	*Vala*	1	G Mikulov	3 3 2 – 5 3 0 –	16	**20,67**
18.–20.	*Adéla*	*Kostelecká*	3	GLesníZlín	3 3 3 5 5 – – –	19	**20,63**
18.–20.	*Jana*	*Řežábková*	3	PORG PH	3 3 3 5 5 – – –	19	**20,63**
18.–20.	*Lucien*	*Šíma*	3	PORG PH	3 3 3 5 5 3 – –	19	**20,63**
21.	*Jan*	*Jurka*	4	GMLerchaBO	3 3 3 5 5 4 5 –	$22 - i$	**20,55**
22.	*Václav*	*Steinhauser*	1	ZŠVranéNVl	3 3 3 5 – 3 – –	$17 + i$	**20,16**
23.	*Aleš*	*Krčil*	2	G Humpolec	3 3 3 5 – 3 – –	17	**20,12**
24.	*Pavel*	*Hudec*	1	GJarkovPH	3 – 2 5 2 3 – –	15	**20,00**
25.	*Marian*	*Poljak*	3	GJŠkodyPŘ	3 3 3 5 5 – – –	19	**19,94**
26.	*Daniel*	*Kopf*	3	SlezkéG OP	3 3 2 5 5 – – –	18	**19,83**
27.	*Vojtěch*	*Lukeš*	3	G LPika PL	3 3 3 5 5 3 – –	19	**19,80**
28.–29.	*Markéta*	*Horová*	3	GMikul23PL	3 3 3 5 5 – – –	19	**19,74**
28.–29.	*Vít*	*Kalisz*	3	FSG Pirna	3 3 3 4 5 3 0 –	$18 + i$	**19,74**
30.	*Anna*	*Gajdová*	4	G ValMez	3 3 3 5 5 – – –	19	**19,00**
31.	*Hedvika*	*Ranošová*	1	GBudějovPH	3 3 3 5 – – – –	$14 + i$	**18,88**
32.	*Karolína*	*Kuchyňová*	4	GMLerchaBO	3 3 3 5 5 5 – –	21	**18,67**
33.–34.	*Jan*	*Škvára*	4	GJŠkodyPŘ	3 1 2 5 5 3 – –	18	**18,00**
33.–34.	*Jan*	*Šorm*	3	GJarošeBO	3 3 3 5 5 – – –	$19 + i$	**18,00**
35.	*Ondřej*	*Knopp*	1	G Třeboň	3 1 3 – 5 – – –	$12 + i$	**17,93**
36.	*Adam*	*Mendl*	0	GCoubTábor	3 1 1 – 5 – – –	10	**17,36**
37.	*Zuzana*	*Johanovská*	3	GOpatovPH	3 0 3 1 5 3 – 0	15	**17,27**
38.	*Václav*	*Rozhoň*	4	GJirsíkaČB	3 3 3 5 5 – – –	19	**17,10**
39.	*Tomáš*	*Konečný*	2	GJirsíkaČB	3 3 3 5 – – – –	14	**16,91**

40.	*Tomáš*	*Domes*	2	MendelG OP	3 3 0 4 – 3 – –	13	**16,90**
41.–42.	*Kamila*	*Kyzlíková*	1	GZborovPH	2 0 3 1 5 – – –	11	**16,83**
41.–42.	*Daniel*	*Pišťák*	3	GZborovPH	3 3 3 5 5 3 – –	19	**16,83**
43.	*Dominik*	*Krasula*	2	G Krnov	3 – 1 5 3 3 – –	15	**16,44**
44.	*Viktor*	*Němeček*	4	GJMasar JI	3 3 3 5 – 5 – –	19	**16,25**
45.	*Matěj*	*Konečný*	4	G Jírov ČB	3 3 3 5 5 – – –	19	**16,03**
46.	*Nina*	*Hronkovičová*	4	G Partizan	0 – 3 5 5 3 0 –	16	**16,00**
47.	*Daniel*	*Magula*	1	PiarGNitra	3 3 1 – 3 – – –	10	**15,89**
48.	*Denisa*	*Chytilová*	1	GJŠkodyPŘ	3 3 3 – – – – –	9	**14,89**
49.	*Lucie*	*Hronová*	2	GJarošeBO	2 3 1 1 3 2 – –	$11 - i$	**14,79**
50.	*Zuzana*	*Svobodová*	3	G FrýdlNOs	1 3 3 5 3 – – –	15	**14,08**
51.	*Barbora*	*Sedláková*	4	GKonštanPV	3 3 1 1 5 0 0 2	14	**14,00**
52.	*Jaroslav*	*Paidar*	1	SPŠMasarLI	3 1 1 – 3 – – –	8	**13,81**
53.	*Stepan*	*Yakimov*	4		3 2 3 – 5 0 – –	$13 + i$	**13,27**
54.	*Marek*	*Malý*	2	G Neratov	3 – 3 – 3 – – –	9	**13,00**
55.	*Anh*	*Le Hoang*	3	GJarošeBO	3 1 3 – 4 – – 0	$11 + i$	**12,94**
56.	*Eduard*	*Batmendijn*	4	CGStĽubovňa	– – – 5 5 – 5 –	$15 - i$	**12,58**
57.	*Anh Minh*	*Tran*	3	GJarošeBO	3 3 3 – – – – –	$9 + i$	**11,68**
58.	*Markéta*	*Calábková*	4	GJŠkodyPŘ	3 – 1 5 5 – – –	14	**11,12**
59.	*Pavel*	*Myšička*	4	G Čáslav	2 – 1 – 5 3 0 –	11	**11,00**
60.	*Martin*	*Števko*	0	GAlejKošic	3 – 1 – – – – –	4	**10,11**
61.	*Filip*	*Chudoba*	1	PORG PH	3 2 – – – – – –	5	**10,00**
62.	*František*	*Couf*	2	GZborovPH	– – – – – – 5 5	10	**9,56**
63.–64.	*Jozef*	*Burkuš*	2	G Rožňava	3 – 3 – – – – –	6	**9,48**
63.–64.	*Eva*	*Klimentová*	2	GJarošeBO	3 – 3 – – – – –	6	**9,48**
65.	*Přemysl*	*Šťastný*	2	G Žamberk	3 3 – – – – – –	6	**9,17**
66.	*Jaromír*	*Mielec*	2	GVolgogrOS	3 3 1 – – 1 – –	8	**8,94**
67.	*Kateřina*	*Nová*	2	G Vimperk	3 2 1 – – – – –	6	**8,85**
68.	*Stano*	*Šípka*	3	GKukučPopr	3 – – – 3 – – –	6	**8,00**
69.	*Zuzana*	*Tréglová*	2	G Žatec	3 0 1 – 1 – – –	5	**7,69**
70.	*Jakub*	*Hledík*	4	GSŘMRSkuteč	3 – 3 – – 3 – –	9	**6,99**
71.	*Viktor*	*Szabo*	1	GJHroncaBA	3 0 – – – – – –	3	**6,79**
72.	*Jakub*	*Marták*	3	G GolNitra	2 0 1 – 0 2 0 –	5	**6,30**
73.	*Pál*	*Somogyi*	3	GIM Šamorín	3 1 – – – – – –	4	**5,53**
74.	*Jakub*	*Ševčík*	3	GKukučPopr	1 – 0 – 3 – – –	4	**5,46**
75.	*Karel*	*Jílek*	4	GKepleraPH	3 0 2 – – – – –	5	**4,58**
76.	*Jan*	*Dittrich*	3	GJarošeBO	3 0 0 – – – – –	3	**4,23**
77.	*Anežka*	*Michálková*	3	GaSOŠ Telč	0 – 2 – – – – –	2	**2,77**
78.–79.	*Nodari*	*Gogatishvili*	1	GZborovPH	1 0 – 0 – – – –	1	**2,67**
78.–79.	*Samuel*	*Karaba*	1	SŠNvh	1 0 – – – – – –	1	**2,67**
80.–81.	*Barbora*	*Mouleová*	1	G Plasy	0 – – – – – – –	0	**0,00**
80.–81.	*Peter Kulcsár*	*Szabó*	3	GHSelyhoKM	0 – – – – – – –	0	**0,00**

1. jarní série – Politika

Výsledková listina

1.–2.	*Radovan*	*Švarc*	4	G ČTřebová	– – – 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–2.	*Pavel*	*Turek*	2	GTomkovaOL	3 3 2 5 5 5 5 5	25	**25,00**
3.	*Filip*	*Bialas*	2	GOpatovPH	3 – – 5 5 1 5 5	23	**23,60**
4.	*Danil*	*Koževnikov*	1	GKepleraPH	3 3 – 1 5 3 5 5	21	**23,42**
5.	*Veronika*	*Hladíková*	2	GMikul23PL	3 – 3 5 2 5 – –	18	**20,84**
6.	*Jiří*	*Vala*	1	G Mikulov	3 3 2 5 3 0 – –	16	**20,67**
7.	*Lucien*	*Šíma*	3	PORG PH	3 3 3 5 5 – – –	19	**20,63**
8.	*Jan*	*Soukup*	4	G Klatovy	3 3 – 5 5 5 5 –	23	**20,11**
9.–10.	*Pavel*	*Hudec*	1	GJarkovPH	3 2 3 – 5 2 – –	15	**20,00**
9.–10.	*Jan*	*Škvára*	4	GJŠkodyPŘ	3 3 2 5 1 5 4 –	20	**20,00**
11.	*Adéla*	*Kostelecká*	3	GLesníZlín	3 3 2 5 – 5 – –	18	**19,83**
12.	*Tomáš*	*Domes*	2	MendelG OP	3 3 3 – 2 5 – –	16	**19,37**
13.	*Jakub*	*Tětek*	1	CírkGPlzeň	3 3 3 – – 5 – –	14	**19,28**
14.	*Marian*	*Poljak*	3	GJŠkodyPŘ	3 3 2 5 – 5 – –	18	**19,05**
15.	*Hedvika*	*Ranošová*	1	GBudějovPH	3 3 3 5 – – – –	14	**18,67**
16.	*Marie*	*Dohnalová*	2	GNadKavaPH	3 3 1 5 – 3 – –	15	**18,59**
17.	*Denisa*	*Chytilová*	1	GJŠkodyPŘ	3 3 1 1 0 5 – –	13	**18,52**
18.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	1	GZborovPH	3 3 3 – 4 0 – 0	13	**18,35**
19.	*Jakub*	*Löwit*	3	GČeskoliPH	3 3 3 5 4 0 5 –	20	**18,31**
20.	*Ondřej*	*Knopp*	1	G Třeboň	3 3 3 – 0 3 – –	12	**17,70**
21.	*Vojtěch*	*Lanz*	1	GZborovPH	3 3 1 1 2 4 – –	13	**17,53**
22.	*Jan*	*Jurka*	4	GMLerchaBO	3 3 3 5 5 – – –	19	**17,20**
23.	*Nina*	*Hronkovičová*	4	G Partizan	3 3 2 5 4 – – –	17	**17,00**
24.	*Jan*	*Šorm*	3	GJarošeBO	3 3 3 – 4 5 – –	$18 + i$	**16,87**
25.	*Martin*	*Števko*	0	GAlejKošic	3 3 0 1 2 0 – –	9	**16,42**
26.	*Samuel*	*Karaba*	1	SŠNvh	3 3 – 1 3 0 0 –	10	**15,89**
27.	*Petr*	*Jakubčík*	1	PORG PH	3 3 – 5 – – – –	11	**15,86**
28.	*Václav*	*Steinhauser*	1	ZŠVranéNVl	3 3 1 5 – – – –	12	**15,78**
29.	*Lenka*	*Kopfová*	0	CZŠSL HnM	3 3 2 – – – – –	8	**15,39**
30.	*Kamila*	*Kyzlíková*	1	GZborovPH	2 3 – 4 0 0 – –	$9 + i$	**15,17**
31.–32.	*Ondřej*	*Svoboda*	2	GJarošeBO	3 3 0 – – 5 – –	11	**15,05**
31.–32.	*Michal*	*Töpfer*	2	GJPekařeMB	3 3 – – 3 2 – 0	11	**15,05**
33.	*Vít*	*Kalisz*	3	FSG Pirna	3 3 – 0 5 2 – –	13	**14,98**
34.	*Daniel*	*Magula*	1	PiarGNitra	3 3 0 – 2 1 0 –	9	**14,89**
35.	*Daniel*	*Bárta*	0	GChodoviPH	3 3 0 0 0 1 0 –	7	**14,27**
36.	*Dominik*	*Krasula*	2	G Krnov	3 3 3 4 0 0 – –	$13 - i$	**14,26**
37.	*Aleš*	*Krčil*	2	G Humpolec	3 3 – 3 0 – – 1	10	**14,05**
38.–39.	*Nodari*	*Gogatishvili*	1	GZborovPH	3 3 0 0 0 2 – –	8	**13,81**
38.–39.	*Jaroslav*	*Paidar*	1	SPŠMasarLI	3 3 1 – 1 – 0 –	8	**13,81**

40.	*Zuzana*	*Johanovská*	3	GOpatovPH	3 3 3 1 1 0 – –	11	**13,47**
41.–42.	*Adam*	*Doubrava*	0	GMasarykKM	3 3 – – – 0 – –	6	**13,03**
41.–42.	*Adam*	*Mendl*	0	GCoubTábor	3 3 – – 0 – – –	6	**13,03**
43.	*Michal*	*Převrátil*	2	G Klatovy	3 3 3 – – – – –	9	**13,00**
44.	*Petr*	*Gebauer*	1	G Mělník	3 0 – 0 4 – – –	7	**12,64**
45.	*Kateřina*	*Nová*	2	G Vimperk	3 3 – 3 – – – –	9	**12,33**
46.	*Jan*	*Dittrich*	3	GJarošeBO	3 3 0 – 2 1 – –	9	**11,39**
47.–50.	*Filip*	*Chudoba*	1	PORG PH	3 3 – – – – – –	6	**11,38**
47.–50.	*Štefan*	*Hollán*	1	G Bytča	3 3 – – – 0 – –	6	**11,38**
47.–50.	*Alžběta*	*Neubauerová*	1	GNadKavaPH	3 3 – – – – – –	6	**11,38**
47.–50.	*Kristína*	*Szabová*	1	GVarŽilina	3 3 – – – – – –	6	**11,38**
51.	*Daniel*	*Pišťák*	3	GZborovPH	3 3 3 1 4 – – –	14	**11,33**
52.	*Lukáš*	*Kubacki*	2	GNadKavaPH	3 3 2 – – – – –	8	**11,31**
53.	*Jakub*	*Ševčík*	3	GKukučPopr	3 3 2 1 0 – – –	9	**11,28**
54.	*Marek*	*Malý*	2	G Neratov	3 3 – – 1 0 0 –	7	**10,72**
55.–56.	*Daniel*	*Kopf*	3	SlezkéG OP	3 3 2 – – – – –	8	**10,30**
55.–56.	*David*	*Pokorný*	3	G Bučovice	3 3 – 1 – 1 – –	8	**10,30**
57.	*Zuzana*	*Tréglová*	2	G Žatec	0 3 – – 2 2 – –	7	**10,19**
58.	*Jaromír*	*Mielec*	2	GVolgogrOS	3 3 3 – 0 0 – –	9	**9,98**
59.	*Radek*	*Olšák*	0	GMensaPH	3 – – – – 1 – –	4	**9,81**
60.	*Jakub*	*Marták*	3	G GolNitra	3 3 0 0 2 0 0 –	8	**9,70**
61.	*Lucie*	*Hronová*	2	GJarošeBO	3 3 – – – – – –	6	**9,48**
62.	*Barbora*	*Sedláková*	4	GKonštanPV	3 3 0 1 2 0 – –	9	**9,00**
63.	*Tereza*	*Kislingerová*	2	G Klatovy	3 3 – – – – – –	6	**8,80**
64.	*Eliška*	*Cejnarová*	1	G Jaroměř	3 – 0 1 0 0 – –	4	**8,48**
65.	*Matěj*	*Hasala*	0	ZŠ Teplice	0 3 – – 0 – – –	3	**8,34**
66.–68.	*Matej*	*Choma*	3	G Gröss BA	3 3 – – – – – –	6	**8,00**
66.–68.	*Marek*	*Jaroš*	3	GJM Gal	3 3 – – – – – –	6	**8,00**
66.–68.	*Martin*	*Vrabec*	4	GMRŠKošice	3 3 2 – – – – –	8	**8,00**
69.	*Tomáš*	*Konečný*	2	GJirsíkaČB	2 3 0 – – – – –	5	**7,29**
70.	*Vojtěch*	*Lukeš*	3	G LPika PL	3 3 – – – – – –	6	**6,88**
71.–73.	*Filip*	*Čermák*	1	MendelG OP	0 3 0 0 – – – –	3	**6,79**
71.–73.	*Matej*	*Hockicko*	1	SSOŠTA PP	3 – 0 0 0 – – –	3	**6,79**
71.–73.	*Vladimír*	*Lukačko*	1	GVarŽilina	3 0 – – 0 – – –	3	**6,79**
74.	*Lucie*	*Janštová*	2	SlovanG OL	3 – – 1 – – – –	4	**6,76**
75.	*Stano*	*Šípka*	3	GKukučPopr	0 3 1 – – – – –	4	**5,53**
76.	*Zuzana*	*Svobodová*	3	G FrýdlNOs	3 3 – – – – – –	6	**5,34**
77.	*Jozef*	*Burkuš*	2	G Rožňava	3 0 – – 0 0 0 –	3	**5,27**
78.	*Alena*	*Zahradníčková*	4	GKřenováBO	2 3 – – – – – –	5	**5,00**
79.	*František*	*Couf*	2	GZborovPH	– – – – – – 5 –	$5+i$	**4,96**
80.–81.	*Pál*	*Somogyi*	3	GIM Šamorín	3 – – – – – – –	3	**4,23**
80.–81.	*Karel*	*Vlachovský*	3	MasG Plzeň	– 3 – – – – – –	3	**4,23**
82.	*Anh*	*Le Hoang*	3	GJarošeBO	0 – – 1 2 – – –	3	**3,79**
83.	*Tomáš*	*Troján*	0	GNerudCheb	0 0 0 – 1 0 0 0	1	**3,66**
84.	*Timotej*	*Šujan*	3	GJarošeBO	2 – 0 – – – – –	2	**2,84**
85.	*Markéta*	*Calábková*	4	GJŠkodyPŘ	2 – – – – 1 – –	3	**1,96**
86.–88.	*Barbora*	*Mouleová*	1	G Plasy	0 – – – – – – –	0	**0,00**
86.–88.	*Anežka*	*Soukupová*	1	SPŠchemBrno	0 0 0 0 – 0 – –	0	**0,00**
86.–88.	*Emese*	*Szabó*	4	GZKMJ Gal	0 – – – – – – –	0	**0,00**

2. seriálová série – Letem grafovým světem 2

Výsledková listina

1.–4.	*Filip*	*Bialas*	2	GOpatovPH	5	5	5	15	**15,00**
1.–4.	*Jan*	*Soukup*	4	G Klatovy	5	5	5	15	**15,00**
1.–4.	*Radovan*	*Švarc*	4	G ČTřebová	5	5	5	15	**15,00**
1.–4.	*Pavel*	*Turek*	2	GTomkovaOL	5	5	5	15	**15,00**
5.	*František*	*Couf*	2	GZborovPH	5	5	4	14	**13,93**
6.	*Jakub*	*Tětek*	1	CírkGPlzeň	3	5	4	12	**13,77**
7.	*Danil*	*Koževnikov*	1	GKepleraPH	5	1	5	11	**13,24**
8.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	1	GZborovPH	2	0	5	$7-i$	**10,10**
9.	*Aleš*	*Krčil*	2	G Humpolec	2	–	5	$7-i$	**9,16**
10.	*Jakub*	*Löwit*	3	GČeskoliPH	5	5	0	$10+i$	**8,97**
11.	*Jan*	*Jurka*	4	GMLerchaBO	5	–	5	10	**8,73**
12.–13.	*Petr*	*Gebauer*	1	G Mělník	5	–	–	5	**8,51**
12.–13.	*Pavel*	*Hudec*	1	GJarkovPH	5	–	–	5	**8,51**
14.	*Tomáš*	*Domes*	2	MendelG OP	1	0	5	6	**8,43**
15.	*Zuzana*	*Johanovská*	3	GOpatovPH	1	0	5	6	**7,47**
16.	*Lucien*	*Šíma*	3	PORG PH	5	–	–	5	**6,40**
17.	*Ondřej*	*Knopp*	1	G Třeboň	1	0	2	3	**6,00**
18.	*Dominik*	*Krasula*	2	G Krnov	1	–	3	$4-i$	**4,47**
19.–20.	*Veronika*	*Hladíková*	2	GMikul23PL	2	–	–	2	**3,47**
19.–20.	*Michal*	*Töpfer*	2	GJPekařeMB	2	–	–	2	**3,47**
21.–22.	*Daniel*	*Magula*	1	PiarGNitra	1	–	–	1	**2,51**
21.–22.	*Jiří*	*Vala*	1	G Mikulov	1	–	–	1	**2,51**
23.	*Jan*	*Šorm*	3	GJarošeBO	3	–	–	3	**2,41**
24.	*Marek*	*Malý*	2	G Neratov	1	–	–	1	**1,85**
25.	*Kateřina*	*Nová*	2	G Vimperk	1	–	–	1	**1,67**
26.–27.	*Jan*	*Dittrich*	3	GJarošeBO	1	–	–	1	**1,45**
26.–27.	*Daniel*	*Kopf*	3	SlezkéG OP	1	–	–	1	**1,45**
28.	*Vít*	*Kalisz*	3	FSG Pirna	1	0	–	1	**1,35**
29.	*Jan*	*Škvára*	4	GJŠkodyPŘ	1	0	–	1	**1,00**
30.	*Zuzana*	*Svobodová*	3	G FrýdlNOs	1	–	–	1	**0,87**
31.	*Daniel*	*Pišťák*	3	GZborovPH	1	–	–	1	**0,66**

Pořadí po 1. jarní sérii

1.–2.	*Radovan*	*Švarc*	4	G ČTřebová	25 25 25 25 25 – –	**155,00**	1094
1.–2.	*Pavel*	*Turek*	2	GTomkovaOL	25 25 25 25 25 – –	**155,00**	528
3.	*Filip*	*Bialas*	2	GOpatovPH	25 24 25 24 24 – –	**151,70**	391
4.	*Danil*	*Koževnikov*	1	GKepleraPH	23 24 24 24 23 – –	**145,56**	146
5.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	1	GZborovPH	21 23 23 21 18 – –	**127,51**	148
6.	*Jan*	*Soukup*	4	G Klatovy	18 25 17 21 20 – –	**124,51**	836
7.	*Lucien*	*Šíma*	3	PORG PH	19 21 22 21 21 – –	**119,82**	120
8.	*Jan*	*Jurka*	4	GMLerchaBO	17 20 22 21 17 0 –	**118,86**	316
9.	*Pavel*	*Hudec*	1	GJarkovPH	22 19 19 20 20 – –	**118,49**	118
10.	*Lenka*	*Kopfová*	0	CZŠSL HnM	23 23 24 23 15 – –	**118,16**	118
11.	*Tomáš*	*Domes*	2	MendelG OP	19 21 19 17 19 – –	**115,43**	115
12.	*Veronika*	*Hladíková*	2	GMikul23PL	19 19 23 23 21 – –	**112,75**	113
13.	*Zuzana*	*Johanovská*	3	GOpatovPH	19 22 19 17 13 – –	**112,18**	112
14.	*Jiří*	*Vala*	1	G Mikulov	21 22 22 21 21 – –	**111,89**	112
15.	*Marie*	*Dohnalová*	2	GNadKavaPH	18 22 19 22 19 – –	**111,09**	111
16.	*Jan*	*Škvára*	4	GJŠkodyPŘ	19 21 21 18 20 – –	**108,46**	108
17.	*Michal*	*Töpfer*	2	GJPekařeMB	22 22 16 22 15 0 –	**107,51**	108
18.	*Vojtěch*	*Lanz*	1	GZborovPH	21 21 23 22 18 – –	**107,42**	235
19.	*Ondřej*	*Knopp*	1	G Třeboň	21 22 19 18 18 – –	**107,13**	107
20.	*Adéla*	*Kostelecká*	3	GLesníZlín	19 21 21 21 20 – –	**105,57**	106
21.	*Petr*	*Gebauer*	1	G Mělník	19 19 11 22 13 – –	**104,99**	105
22.	*Marian*	*Poljak*	3	GJŠkodyPŘ	19 19 22 20 19 – –	**104,80**	228
23.	*Jakub*	*Löwit*	3	GČeskoliPH	21 21 23 – 18 – –	**103,12**	538
24.	*Eduard*	*Batmendijn*	4	CGStĽubovňa	25 25 25 13 – – –	**102,58**	291
25.	*Nina*	*Hronkovičová*	4	G Partizan	19 23 19 16 17 – –	**100,00**	100
26.	*Aleš*	*Krčil*	2	G Humpolec	18 16 22 20 14 – –	**98,62**	99
27.	*Vít*	*Kalisz*	3	FSG Pirna	20 16 19 20 15 – –	**96,29**	152
28.	*Jan*	*Šorm*	3	GJarošeBO	15 18 18 18 17 – –	**96,18**	453
29.	*Daniel*	*Kopf*	3	SlezkéG OP	18 18 21 20 10 – –	**94,91**	95
30.	*Václav*	*Steinhauser*	1	ZŠVranéNVl	15 21 23 20 16 – –	**94,87**	354
31.	*Tomáš*	*Konečný*	2	GJirsíkaČB	22 21 19 17 7 – –	**93,80**	237
32.	*Viktor*	*Němeček*	4	GJMasar JI	25 19 19 16 – – –	**93,51**	432
33.	*Martin*	*Števko*	0	GAlejKošic	21 22 23 10 16 – –	**92,88**	93
34.	*Dominik*	*Krasula*	2	G Krnov	18 15 18 16 14 – –	**91,01**	422
35.	*Vojtěch*	*Lukeš*	3	G LPika PL	19 21 15 20 7 – –	**90,72**	233
36.	*Matěj*	*Konečný*	4	G Jírov ČB	19 19 22 16 – – –	**90,37**	463
37.	*Jaroslav*	*Paidar*	1	SPŠMasarLI	20 19 19 14 14 – –	**88,69**	89
38.	*Denisa*	*Chytilová*	1	GJŠkodyPŘ	17 22 16 15 19 – –	**88,56**	89
39.	*Karolína*	*Kuchyňová*	4	GMLerchaBO	20 20 18 19 – – –	**87,58**	460

40.	*Vojtěch*	*Suchánek*	4	GJarošeBO	20	19	22	21	–	–	–	**86,64**	268
41.	*Hedvika*	*Ranošová*	1	GBudějovPH	19	19	11	19	19	–	–	**86,23**	167
42.	*Václav*	*Rozhoň*	4	GJirsíkaČB	22	17	17	17	–	–	–	**86,06**	297
43.	*Kateřina*	*Nová*	2	G Vimperk	17	18	20	9	12	–	–	**86,03**	182
44.	*Jana*	*Řežábková*	3	PORG PH	19	20	20	21	–	–	–	**85,69**	86
45.	*Kamila*	*Kyzlíková*	1	GZborovPH	19	18	17	17	15	–	–	**85,05**	85
46.	*Adam*	*Mendl*	0	GCoubTábor	16	24	14	17	13	–	–	**84,59**	85
47.	*Anna*	*Gajdová*	4	G ValMez	18	21	16	19	–	–	–	**84,00**	84
48.	*Petr*	*Jakubčík*	1	PORG PH	18	10	17	21	16	–	–	**82,25**	194
49.	*Radek*	*Olšák*	0	GMensaPH	22	21	17	–	10	–	–	**80,68**	97
50.	*Zuzana*	*Svobodová*	3	G FrýdlNOs	20	20	13	14	5	–	–	**79,73**	371
51.	*Daniel*	*Magula*	1	PiarGNitra	17	8	21	16	15	–	–	**79,27**	79
52.	*Jan*	*Gocník*	3	GJŠkodyPŘ	15	20	20	21	–	–	–	**75,93**	76
53.	*Samuel*	*Karaba*	1	SŠNvh	21	18	17	3	16	–	–	**73,76**	74
54.	*Daniel*	*Pišťák*	3	GZborovPH	11	19	10	17	11	–	–	**73,73**	549
55.	*Anh*	*Le Hoang*	3	GJarošeBO	14	20	22	13	4	–	–	**72,38**	164
56.	*Martin*	*Vrabec*	4	GMRŠKošice	–	21	15	21	8	–	–	**70,54**	71
57.	*Marek*	*Malý*	2	G Neratov	16	12	17	13	11	–	–	**70,36**	70
58.	*Markéta*	*Horová*	3	GMikul23PL	15	20	15	20	–	–	–	**69,54**	220
59.	*Lucie*	*Hronová*	2	GJarošeBO	13	22	9	15	9	–	–	**68,27**	68
60.	*Filip*	*Chudoba*	1	PORG PH	16	13	16	10	11	–	–	**65,80**	66
61.	*Jozef*	*Burkuš*	2	G Rožňava	18	15	17	9	5	–	–	**64,47**	64
62.	*Daniel*	*Bárta*	0	GChodoviPH	20	16	13	–	14	–	–	**64,16**	64
63.	*Anh Minh*	*Tran*	3	GJarošeBO	14	16	13	12	–	–	–	**63,45**	63
64.	*Jaromír*	*Mielec*	2	GVolgogrOS	18	20	7	9	10	–	–	**63,33**	439
65.	*Ondřej*	*Svoboda*	2	GJarošeBO	18	15	13	–	15	–	–	**60,87**	61
66.	*Jan*	*Dittrich*	3	GJarošeBO	17	10	12	4	11	–	–	**59,89**	60
67.	*Markéta*	*Calábková*	4	GJŠkodyPŘ	12	12	17	11	2	–	–	**59,33**	338
68.	*Nodari*	*Gogatishvili*	1	GZborovPH	11	14	17	3	14	–	–	**58,50**	59
69.	*Zuzana*	*Tréglová*	2	G Žatec	21	12	6	8	10	–	–	**57,91**	135
70.	*Martin*	*Surma*	4	GJWolkraPV	22	19	17	–	–	–	–	**57,52**	352
71.	*Jakub*	*Ševčík*	3	GKukučPopr	15	9	16	5	11	–	–	**57,38**	71
72.	*Pavel*	*Myšička*	4	G Čáslav	14	16	11	11	–	–	–	**56,00**	56
73.	*Viktor*	*Szabo*	1	GJHroncaBA	17	17	15	7	–	–	–	**55,34**	55
74.	*Matej*	*Hockicko*	1	SSOŠTA PP	15	14	19	–	7	–	–	**54,77**	55
75.	*Richard*	*Hladík*	2	GaOA MarLáz	18	9	19	–	–	–	–	**53,98**	54
76.	*Ondřej*	*Darmovzal*	4	GJarošeBO	15	18	20	–	–	–	–	**53,83**	121
77.	*Ondřej*	*Lomický*	2	G Plasy	16	21	17	–	–	–	–	**53,74**	54
78.	*František*	*Couf*	2	GZborovPH	–	10	–	10	5	–	–	**53,27**	533
79.–80.	*Eliška*	*Cejnarová*	1	G Jaroměř	16	13	15	–	8	–	–	**51,90**	52
79.–80.	*Stano*	*Šípka*	3	GKukučPopr	12	12	13	8	6	–	–	**51,90**	52
81.	*Barbora*	*Sedláková*	4	GKonštanPV	8	11	9	14	9	–	–	**51,00**	51
82.	*Štefan*	*Hollán*	1	G Bytča	17	16	7	–	11	–	–	**50,89**	51
83.	*Vladimír*	*Lukačko*	1	GVarŽilina	15	17	11	–	7	–	–	**49,89**	50
84.	*Peter*	*Macko*	0	ŠpMNDaG BA	22	14	13	–	–	–	–	**49,47**	49
85.	*Jakub*	*Hledík*	4	GSŘMRSkuteč	12	14	10	7	–	–	–	**48,81**	253
86.	*Štěpán*	*Procházka*	4	GSRandyJN	16	16	15	–	–	–	–	**48,32**	89
87.	*Jakub*	*Marták*	3	G GolNitra	13	7	11	6	10	–	–	**47,09**	120
88.	*Lucia*	*Klasová*	1	G Gröss BA	19	11	16	–	–	–	–	**46,55**	47
89.	*Adam*	*Doubrava*	0	GMasarykKM	13	0	20	–	13	–	–	**46,50**	47
90.	*Kristína*	*Szabová*	1	GVarŽilina	17	14	3	–	11	–	–	**44,69**	45

91.	*Jiří*	*Nábělek*	1	G Bílovec	18	17	10	–	–	–	–	**44,53**	45
92.	*Matěj*	*Hasala*	0	ZŠ Teplice	14	–	20	–	8	–	–	**43,05**	43
93.	*Lukáš*	*Kubacki*	2	GNadKavaPH	14	9	8	–	11	–	–	**42,37**	126
94.	*Tomáš*	*Terem*	3	GTajBanBys	11	15	8	–	–	–	–	**41,22**	41
95.	*Barbora*	*Mouleová*	1	G Plasy	13	14	14	0	0	–	–	**40,26**	40
96.	*Marek*	*Murin*	3	GJHroncaBA	18	–	13	–	–	–	–	**40,10**	40
97.	*Šimon*	*Karch*	1	G KomHavíř	19	19	–	–	–	–	–	**38,36**	38
98.	*Soňa*	*Burešová*	1	GHeyrovPH	21	17	–	–	–	–	–	**38,13**	38
99.–100.	*Alena*	*Zahradníčková*	4	GKřenováBO	15	14	4	–	5	–	–	**38,00**	38
99.–100.	*Radek*	*Zikmund*	4	G HavlBrod	17	21	–	–	–	–	–	**38,00**	38
101.	*Martin*	*Strnad*	1	G Dobříš	15	22	–	–	–	–	–	**37,32**	37
102.	*Zuzana*	*Frankovská*	3	GJHroncaBA	20	10	7	–	–	–	–	**36,92**	37
103.	*Sára*	*Elichová*	0	GKepleraPH	15	13	8	–	–	–	–	**36,76**	37
104.	*Alžběta*	*Neubauerová*	1	GNadKavaPH	10	7	8	–	11	–	–	**36,65**	37
105.	*Leoš*	*Smetana*	2	G Jaroměř	13	14	9	–	–	–	–	**36,53**	37
106.	*Marek*	*Černý*	4	G Chrudim	17	19	–	–	–	–	–	**35,71**	47
107.	*Jan*	*Pekař*	1	GJPekařeMB	17	19	–	–	–	–	–	**35,35**	35
108.	*Pál*	*Somogyi*	3	GIM Šamorín	9	4	11	6	4	–	–	**34,55**	35
109.	*Stepan*	*Yakimov*	4		–	–	21	13	–	–	–	**34,27**	34
110.	*Marián*	*Poppr*	4	GJNerudyPH	18	16	–	–	–	–	–	**33,92**	471
111.	*Tomáš*	*Kuzma*	3	GJHroncaBA	18	15	–	–	–	–	–	**33,46**	156
112.	*Katarína*	*Krajčiová*	4	GAlejKošic	18	15	–	–	–	–	–	**33,06**	536
113.	*Jakub*	*Tětek*	1	CírkGPlzeň	–	–	–	–	19	–	–	**33,05**	33
114.	*Zuzana*	*Urbanová*	2	GUBalvanJN	17	16	–	–	–	–	–	**32,90**	33
115.	*Ondřej*	*Zeman*	4	G Lovosice	–	11	17	–	–	–	–	**32,88**	56
116.	*Timotej*	*Šujan*	3	GJarošeBO	15	10	4	–	3	–	–	**32,60**	43
117.	*Jakub*	*Matěna*	3	GČeskoliPH	21	11	–	–	–	–	–	**32,55**	54
118.	*Přemysl*	*Šťastný*	2	G Žamberk	17	5	–	9	–	–	–	**31,70**	79
119.	*Václav*	*Málek*	3	G Chotěboř	17	13	–	–	–	–	–	**30,74**	31
120.	*Jan*	*Knížek*	4	G Strakon	19	–	12	–	–	–	–	**30,18**	60
121.	*Anežka*	*Soukupová*	1	SPŠchemBrno	15	7	8	–	0	–	–	**30,16**	30
122.	*Lukáš*	*Fruněk*	2	GLesníZlín	17	12	–	–	–	–	–	**28,79**	29
123.	*David*	*Pokorný*	3	G Bučovice	10	8	–	–	10	–	–	**28,60**	29
124.	*Michal*	*Bubeník*	2	BiskG Brno	13	15	–	–	–	–	–	**28,05**	28
125.	*Pavla*	*Nováková*	3	GJarošeBO	13	14	–	–	–	–	–	**27,94**	28
126.	*Zdeněk*	*Lukeš*	3	GNeumannŽR	13	13	–	–	–	–	–	**26,94**	27
127.	*Iva*	*Švecová*	1	GJMasar JI	20	7	–	–	–	–	–	**26,79**	27
128.	*Michaela*	*Jakešová*	3	GJarošeBO	9	11	6	–	–	–	–	**26,09**	26
129.	*Tereza*	*Kislingerová*	2	G Klatovy	17	–	–	–	9	–	–	**25,95**	130
130.	*Lukáš*	*Zíb*	3	GPísnickPH	15	10	–	–	–	–	–	**25,73**	26
131.	*Martin*	*Scheubrein*	3	G MasNámTŘ	13	8	4	–	–	–	–	**25,70**	26
132.	*Filip*	*Oplt*	2	GBudějovPH	19	5	–	–	–	–	–	**24,64**	25
133.	*Šárka*	*Vavrečková*	2	GBezručeFM	15	9	–	–	–	–	–	**24,53**	25
134.	*Martin*	*Zahradníček*	4	GŠlapanice	16	8	–	–	–	–	–	**24,27**	24
135.	*Dominika*	*Levická*	4	GMRŠKošice	–	16	8	–	–	–	–	**24,00**	24
136.	*Matúš*	*Varhaník*	1	G Bytča	11	11	–	–	–	–	–	**22,76**	23
137.	*Borek*	*Požár*	1	G Rakovník	16	7	–	–	–	–	–	**22,68**	23
138.	*Noemk*	*Kuželová*	3	GBalbínaHK	9	13	–	–	–	–	–	**22,64**	23
139.	*Soňa*	*Lisníková*	2	GBezručeFM	13	9	–	–	–	–	–	**22,48**	22
140.	*David*	*Kozina*	1	SPŠEIT BO	22	–	–	–	–	–	–	**22,43**	22
141.	*Veronika*	*Venclová*	1	G Chrudim	14	8	–	–	–	–	–	**22,29**	22

142.	*Lucie*	*Janštová*	2	SlovanG OL	13	–	2	–	7	–	–	**21,67**	22
143.	*Martin*	*Hubata*	0	GMikul23PL	–	13	8	–	–	–	–	**21,37**	21
144.	*Michaela*	*Brabcová*	3	G Jírov ČB	–	16	5	–	–	–	–	**20,85**	98
145.	*Michal*	*Porubsky*	3	GCyMeNitra	11	9	–	–	–	–	–	**20,56**	21
146.	*Tomáš*	*Macek*	2	G Náchod	20	–	–	–	–	–	–	**20,12**	20
147.	*Ondrej*	*Bínovský*	4	GAnMeTr	10	–	10	–	–	–	–	**19,22**	45
148.	*Minh Thao*	*Nguyen*	3	GEBenešeKL	19	–	–	–	–	–	–	**19,00**	19
149.	*Petr*	*Gintar*	3	MendelG OP	6	4	9	–	–	–	–	**18,86**	23
150.	*Petr*	*Ježek*	1	GBNěmcovHK	19	–	–	–	–	–	–	**18,52**	19
151.	*Marek*	*Jaroš*	3	GJM Gal	–	10	–	–	8	–	–	**18,30**	18
152.	*Lukáš*	*Pavela*	0	LSG Letohrad	18	–	–	–	–	–	–	**18,23**	18
153.–156.	*Martin*	*Barnovský*	2	GStĽubovňa	18	–	–	–	–	–	–	**17,77**	18
153.–156.	*Petr*	*Chmel*	2	G Kralupy	18	–	–	–	–	–	–	**17,77**	18
153.–156.	*Jan*	*Dopita*	2	GBudějovPH	18	–	–	–	–	–	–	**17,77**	18
153.–156.	*Adrián*	*Mokrý*	2	GNVPlániPH	18	–	–	–	–	–	–	**17,77**	18
157.	*Jakub*	*Gregora*	1	GLanškroun	18	–	–	–	–	–	–	**17,70**	18
158.	*Andrej*	*Čermák*	1	GJF Šaľa	13	–	5	–	–	–	–	**17,53**	18
159.	*Jan*	*Václavek*	3	G Ústí n O	17	–	–	–	–	–	–	**17,24**	137
160.	*František*	*Zajíc*	2	G Nymburk	17	–	–	–	–	–	–	**16,90**	17
161.–162.	*Jakub*	*Ditrich*	1	GÚstavníPH	17	–	–	–	–	–	–	**16,83**	17
161.–162.	*Roman*	*Walica*	1	G Třinec	17	–	–	–	–	–	–	**16,83**	17
163.	*Adéla*	*Jalovcová*	2	GNerudCheb	16	–	–	–	–	–	–	**16,00**	16
164.	*Matěj*	*Kletečka*	1	G HavlBrod	16	–	–	–	–	–	–	**15,89**	16
165.	*Kristýna*	*Šudomová*	3	GValašKlob	12	–	4	–	–	–	–	**15,70**	156
166.–167.	*Filip*	*Keller*	0	G Milevsko	15	–	–	–	–	–	–	**15,39**	15
166.–167.	*Jaroslava*	*Šamanová*	0	G Tišnov	15	–	–	–	–	–	–	**15,39**	15
168.	*Tomáš*	*Troján*	0	GNerudCheb	12	–	–	–	4	–	–	**15,32**	15
169.–171.	*Ronald*	*Luc*	2	GJarošeBO	15	–	–	–	–	–	–	**15,00**	22
169.–171.	*Martin*	*Repčík*	4		9	6	–	–	–	–	–	**15,00**	15
169.–171.	*Emese*	*Szabó*	4	GZKMJ Gal	4	3	8	–	0	–	–	**15,00**	15
172.–175.	*Jan*	*Došek*	1	G Brandýs	15	–	–	–	–	–	–	**14,89**	15
172.–175.	*Vladislav*	*Najvárek*	1	GBezručeFM	15	–	–	–	–	–	–	**14,89**	15
172.–175.	*Marián*	*Okál*	1	SŠNvh	15	–	–	–	–	–	–	**14,89**	15
172.–175.	*Adéla*	*Zvěřinová*	1	GJiříPoděb	10	–	5	–	–	–	–	**14,89**	15
176.	*Pavel*	*Šklíba*	2	GDašickáPA	–	15	–	–	–	–	–	**14,79**	15
177.	*Anežka*	*Michálková*	3	GaSOŠ Telč	4	8	–	3	–	–	–	**14,62**	47
178.	*Martin*	*Kutiš*	3	G Humpolec	14	–	–	–	–	–	–	**14,47**	14
179.	*Jan*	*Šuta*	2	GJŠkodyPŘ	14	–	–	–	–	–	–	**14,05**	14
180.	*Zuzana*	*Klimsová*	1	GJMasar JI	14	–	–	–	–	–	–	**13,81**	14
181.	*Marie*	*Vonzino*	2	GTomkovaOL	14	–	–	–	–	–	–	**13,69**	67
182.	*Adéla*	*Šedová*	3	GJungmanLT	13	–	–	–	–	–	–	**13,38**	25
183.	*Ekaterina*	*Pichugina*	0	GJarkovPH	13	–	–	–	–	–	–	**13,03**	13
184.–185.	*Martina*	*Petráková*	2	GOA Pelh	13	–	–	–	–	–	–	**13,00**	13
184.–185.	*Michal*	*Převrátil*	2	G Klatovy	–	–	–	–	13	–	–	**13,00**	13
186.–189.	*Martin*	*Beran*	1	SPŠLegioJI	13	–	–	–	–	–	–	**12,64**	13
186.–189.	*Matyáš*	*Kalous*	1	GDomažlice	13	–	–	–	–	–	–	**12,64**	13
186.–189.	*Vladimír*	*Kistan*	1	G Rýmařov	13	–	–	–	–	–	–	**12,64**	13
186.–189.	*Matěj*	*Konvalinka*	1	GOA Sedlča	13	–	–	–	–	–	–	**12,64**	13
190.	*Miroslav*	*Mareš*	4	GBudějovPH	6	6	–	–	–	–	–	**12,27**	12
191.	*Jakub*	*Kvasil*	2	GMozartovaPA	7	–	5	–	–	–	–	**12,03**	12
192.–193.	*Karel*	*Jílek*	4	GKepleraPH	–	–	7	5	–	–	–	**12,00**	57

192.–193.	*Pavel*	*Mikuš*	4	G Mělník	12	–	–	–	–	–	–	**12,00**	12
194.	*Marie*	*Freibergová*	2	G Děčín	12	–	–	–	–	–	–	**11,89**	12
195.	*Martin*	*Kopřiva*	3	GMikul23PL	12	–	–	–	–	–	–	**11,78**	184
196.	*Markéta*	*Doležalová*	3	GTNovákBO	11	–	–	–	–	–	–	**11,39**	11
197.	*Daniela*	*Hrbáčová*	1	WichtG OS	11	0	–	–	–	–	–	**11,38**	11
198.	*Adam*	*Říha*	3	G ČesLípa	11	–	–	–	–	–	–	**11,09**	48
199.	*David*	*Neugebauer*	2	SlezkéG OP	11	–	–	–	–	–	–	**10,72**	11
200.	*Kateřina*	*Čížková*	1	G Rokycany	10	–	–	–	–	–	–	**10,00**	10
201.	*Tereza*	*Rašková*	4	GTomkovaOL	7	3	–	–	–	–	–	**9,71**	25
202.–207.	*Ludmila*	*Hudská*	2	RakGymPH	9	–	–	–	–	–	–	**9,48**	9
202.–207.	*Veronika*	*Jehličková*	2	GNadKavaPH	9	–	–	–	–	–	–	**9,48**	9
202.–207.	*Eva*	*Klimentová*	2	GJarošeBO	–	–	–	9	–	–	–	**9,48**	9
202.–207.	*Kateřina*	*Škorvánková*	2	G Rokycany	9	–	–	–	–	–	–	**9,48**	9
202.–207.	*Pavel*	*Turinský*	2	G Brandýs	9	–	–	–	–	–	–	**9,48**	9
202.–207.	*David*	*Ucháč*	2	EDUCA PAR	–	9	–	–	–	–	–	**9,48**	9
208.	*Milan*	*Kubala*	3	GTajBanBys	9	–	–	–	–	–	–	**9,17**	9
209.	*Alexandra*	*Horkavá*	1	GB Sučany	8	–	–	–	–	–	–	**8,48**	8
210.–212.	*Petr*	*Bartoš*	4	OpenGate	7	1	–	–	–	–	–	**8,00**	8
210.–212.	*Matej*	*Choma*	3	G Gröss BA	–	–	–	–	8	–	–	**8,00**	8
210.–212.	*Jiří*	*Matyáš*	3	OATGM KnO	8	–	–	–	–	–	–	**8,00**	8
213.	*Andrea*	*Kučerová*	3	G ČKrumlov	7	–	–	–	–	–	–	**7,43**	84
214.	*Jan*	*Bráblík*	3	GJarošeBO	3	4	–	–	–	–	–	**7,11**	7
215.	*Jiří*	*Čech*	4	G Strakon	2	–	5	–	–	–	–	**6,85**	17
216.–219.	*Filip*	*Čermák*	1	MendelG OP	–	–	–	–	7	–	–	**6,79**	7
216.–219.	*Jakub*	*Jelen*	1	GBalbínaHK	7	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
216.–219.	*Dominik*	*Kovář*	3	G Litomyšl	7	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
216.–219.	*Klára*	*Machová*	3	GDomažlice	7	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
220.–221.	*Jakub*	*Dostál*	2	SlovanG OL	–	7	–	–	–	–	–	**6,76**	7
220.–221.	*Jana*	*Vývodová*	2	G FHajdyOS	7	–	–	–	–	–	–	**6,76**	7
222.	*Jiří*	*Štrincl*	4	GSRandyJN	7	–	–	–	–	–	–	**6,52**	47
223.–224.	*Martina*	*Chamrová*	4	GOPavla PH	6	–	–	–	–	–	–	**6,00**	6
223.–224.	*Miroslav*	*Juroška*	4	ČaOG FrMýs	6	–	–	–	–	–	–	**6,00**	6
225.	*Tomáš*	*Hrbek*	3	G Chrudim	6	–	–	–	–	–	–	**5,53**	6
226.	*Sarah*	*Jedličková*	4	GJarošeBO	3	–	3	–	–	–	–	**5,52**	45
227.	*Matěj*	*Coufal*	2	G HavlBrod	–	5	–	–	–	–	–	**5,19**	21
228.	*Magdaléna*	*Horváthová*	4	SGJHTr	5	–	–	–	–	–	–	**5,00**	5
229.	*Peter*	*Vook*	4	GPošKošice	5	–	–	–	–	–	–	**4,62**	45
230.	*Karel*	*Vlachovský*	3	MasG Plzeň	–	–	–	–	4	–	–	**4,23**	4
231.	*Robert*	*Pelc*	4	GÚstavníPH	4	–	–	–	–	–	–	**4,00**	4
232.	*Matyáš*	*Bosák*	0	OpenGate	–	4	–	–	–	–	–	**3,66**	4
233.	*Jan*	*Erhart*	4	GFXŠaldyLI	3	–	–	–	–	–	–	**2,83**	228

234.–238. *Nevešli se.*

adresa: *Korespondenční seminář*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
web: *http://mks.mff.cuni.cz/*
e-mail: *mks@mff.cuni.cz*