Matematický korespondenční seminář

Milý příteli!

Podzimní části semináře už zvoní hrana, a je tedy nejvyšší čas představit zadání prvních dvou jarních sérií. Nepředbíhejme ovšem, neboť zatím neznáme výsledky čtvrté podzimní série, jež mohou pořadím v rámci podzimní části ještě pořádně zamíchat. Také už jste zvědaví, jak to dopadne a kdo pojede na jarní soustředění?

Pokud vám na podzim nějaký ten termín utekl a účast na příštím soustředění jste už definitivně vzdali, máme pro vás dobrou zprávu. Na podzimní soustředění zveme řešitele pouze podle pořadí v jarní části semináře, takže můžete zkusit štěstí znovu třeba hned teď! Na podzim je navíc menší konkurence, neboť nejsou zváni maturanti. I ti ale mohou stále soutěžit o zajímavé ceny.

Za organizátory zdraví

Martina Vaváčková

Co dále najdete v komentářích?

- Povídání ke druhé jarní sérii
- Vzorové řešení 2. a 3. podzimní série
- Vzorové řešení 1. seriálové série
- Seriál – Letem grafovým světem II
- Výsledkové listiny

- Příloha: Zadání 1. a 2. jarní série a 2. seriálové série

Podzimní soustředění v Zásadě

Jako každý rok byli i letos nejlepší řešitelé jarní části semináře pozváni na podzimní soustředění. Tentokrát jsme se s nimi vydali do neklidného světa Divokého Západu. V roli zlatokopů jsme pomohli Tonymu rozkrýt případ zapeklité vraždy a zbavili ho tím obvinění. Bohužel byl Tony následně sám zabit v rukou své milované Betty a nám nezbylo než jeho vraždu pomstít.

Těšíme se na viděnou opět na jarním soustředění!

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

Co se chystá

Soustředění *i*KS (pátek 13. března – čtvrtek 19. března 2015). Československý seminář pro borce *i*KS má své historicky třetí soustředění, opět pojaté jako příprava na celostátní kolo Matematické olympiády. Bližší informace o *i*KSku naleznete na jeho stránkách *www.iksko.org*.

Náboj (pátek 13. března 2015). Náboj je týmová matematická soutěž, kterou pro vás ve spolupráci se slovenskými korespondenčními semináři a dalšími institucemi pořádáme již v šesti evropských zemích. Klání probíhá současně v Praze, Opavě, Bratislavě, Košicích, Pasově, Linci, Krakově a Budapešti. Další informace a přihlášku naleznete na webu soutěže www.naboj.org.

Jarní výlet (sobota 14. března 2015). Tradiční akce PraSátka – sraz organizátorů, řešitelů a přátel semináře. Pojeď s námi strávit jarní den do přírody, popovídat si, potkat nové i známé řešitele a organizátory a užít si spoustu legrace. Bližší informace se včas objeví na webu, pozvánku dostaneš s příštími komentáři.

Jarní soustředění (neznámé datum). Místo i téma jarního soustředění je tradičně tajné. Prozatím je tajné i datum, ale informace budou včas na webu i v dopisních schránkách.

Povídání ke druhé jarní sérii

Milý řešiteli, jsou-li pro Tebe polynomy úplnou novinkou, máš nyní možnost se s nimi trochu seznámit. Nuže čti.

Co je polynom?

O funkci $f(x)$ řekneme, že je *polynomem*[1], jestliže je ve tvaru

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_n \neq 0$. Číslům a_i říkáme *koeficienty* polynomu $f(x)$ a číslo n nazýváme *stupněm* polynomu f.[2] Koeficientu a_n se říká *vedoucí koeficient*.

Příklad. Funkce

$$x^2 + x + 1, \qquad x^{17} - 1, \qquad x + \sqrt{2}, \qquad 1$$

jsou polynomy, jejichž stupně jsou po řadě čísla 2, 17, 1, 0. Funkce $\sin(x)$ a $\sqrt{x}$ nejsou polynomy.

Kořeny polynomu

Další pojem, s nímž se budeš setkávat v úlohách, je *kořen polynomu*. Kořeny polynomu $P(x)$ jsou taková reálná[3] čísla a, pro něž platí $P(a) = 0$.

Kupříkladu polynom $P(x) = x^2 + 2x$ má dva reálné kořeny, a to čísla 0 a -2, naopak polynom $x^4 + 1$ nemá žádný reálný kořen, protože nabývá pouze kladných hodnot.

Není těžké si uvědomit, že když řešíš kvadratickou rovnici, pak vlastně hledáš kořeny polynomu stupně dva. Dodejme, že sice existují vzorečky pro hledání kořenů polynomů stupně tři a čtyři, ale jsou velmi složité a nebudeš je potřebovat.[4]

Součinový tvar polynomu

Základní finta při práci s polynomy je rozklad na součin. Například polynom $x^2 + 5x + 6$ můžeme upravit do tvaru $(x+2)(x+3)$. Známe-li tento rozklad, je již jasné, že kořeny tohoto polynomu jsou -2 a -3.

Provádět takovéto rozklady u polynomů vyšších stupňů samozřejmě není vůbec lehké a mnohdy to ani nejde. Často nám však může součinový tvar pomoci. Více napoví řešení následující úlohy.

Úloha. Urči kořeny polynomu $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, když víš, že jeden z nich je 1.

[1] Často se používá i český výraz *mnohočlen*.

[2] Na stupni nulového polynomu se matematici neshodnou, a proto ho nedefinujeme.

[3] Můžeme také uvažovat komplexní kořeny, viz poznámka o kus dál.

[4] Pro vyšší stupně už takový vzoreček ani sestavit nelze.

Řešení. Dodatečnou znalost využijeme k úpravě polynomu na součinový tvar. Pokusíme se totiž z polynomu vytknout člen $(x-1)$, který by se podle všeho měl v hledaném rozkladu objevit. Proveďme tedy úpravu

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x^3 - x^2) - (x-1) = x^2(x-1) - (x-1) = (x^2-1)(x-1).$$

Všimni si obzvlášť prvního kroku, v němž se k sobě sdružily násobky $(x-1)$. Nyní již rozklad podle známého vzorce dokončíme a dostaneme

$$P(x) = (x+1)(x-1)^2.$$

Kořeny jsou tedy čísla 1 a -1.

To, že funguje minulý příklad, není náhoda. Platí totiž následující tvrzení.

Tvrzení. *Číslo a je kořenem polynomu f právě tehdy, když existuje polynom g takový, že $f(x) = g(x)(x-a)$. Polynomu $x-a$ říkáme kořenový činitel.*

Jinými slovy, kořenový činitel $(x-a)$ můžeme z polynomu f vždy vytknout a započít tak rozklad. Takové vytýkání lze sice provést vždy, nicméně občas může být docela namáhavé správně sdružit násobky $x-a$, proto existuje i jiná metoda, jak toto spolehlivě provádět. Jmenuje se dělení polynomu polynomem. Pokud ji budeš potřebovat, určitě nebudeš mít problém si tento postup někde vyhledat.

Obecně tedy nemůžeme o rozkladu polynomu na součinový tvar říci nic, jelikož nevíme, kolik má polynom (reálných) kořenů. Ovšem kdykoliv víme o nějakém čísle, že je kořenem, pak můžeme prohlásit, že se příslušný kořenový činitel objeví v našem rozkladu. Dokonce řekne-li nám někdo, že daný polynom má třeba pět kořenů, víme pak, že součinový tvar tohoto polynomu se skládá z alespoň pěti členů. **Všeobecně platí, že práce se součinovým tvarem je velmi účinnou zbraní při řešení úloh o polynomech.**

Nyní už snadno odvodíme dvě důležitá tvrzení.

Tvrzení. *Nenulový polynom stupně n má nejvýše n kořenů.*

Takový polynom se zkrátka nedá zapsat jako součin více než n závorek stupně jedna.

Tvrzení. *Víme-li o polynomu*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

že má n reálných kořenů, které si nazveme $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, pak můžeme psát

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

Pokud součinový tvar roznásobíme, získáme vztahy mezi kořeny a koeficienty známé též jako *Viètovy vztahy*. Tyto vztahy nabývají přehlednější podoby pro polynomy nižších stupňů, které mají za vedoucí koeficient jedničku. Například pro polynom $x^3 + ax^2 + bx + c$ s kořeny x_1, x_2, x_3 máme

$$c = -x_1x_2x_3, \qquad b = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1, \qquad c = x_1x_2x_3.$$

Poznámka. Pokud připustíme komplexní kořeny, pak každý polynom stupně n má přesně n kořenů (počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik je jeho násobnost, tj. kolikrát můžeme vytknout příslušný kořenový činitel). Z toho plyne, že v komplexních číslech je každý polynom součinem lineárních členů. Například $2x^2 + 2 = 2(x+i)(x-i)$.

Polynomy s celočíselnými koeficienty

Pokud potkáme polynom, jehož koeficienty jsou pouze celá čísla, vyplatí se použít dělitelnost.

Úloha. $P(x)$ je polynom s celočíselnými koeficienty takový, že $P(0)$ a $P(1)$ jsou lichá čísla. Může mít $P(x)$ celočíselný kořen?

Návod. Uvaž paritu (dělitelnost dvěma).

A na závěr přidáme jedno tvrzení o polynomech s celočíselnými koeficienty. Ještě předtím si však objasníme, že číslo $a - b$ dělí číslo $a^n - b^n$, kdykoliv a, b jsou celá čísla a n je přirozené. K tomu využijeme polynomy:

Podíváme-li se na polynom proměnné a s předpisem $P(a) = a^n - b^n$, vidíme, že b je jeho kořenem, tedy člen $(a - b)$ je možné z polynomu vytknout. Takže $a - b$ vskutku dělí $a^n - b^n$.

Tvrzení. *Je-li $P(x)$ polynom s celočíselnými koeficienty, pak pro každá celá čísla a, b platí $a - b \mid P(a) - P(b)$.*

Důkaz. Zde stačí napsat

$$P(a) - P(b) = a_n(a^n - b^n) + a_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + \cdots + a_1(a - b)$$

a z předchozího tvrzení vidíme, že násobkem $a - b$ je každý člen, tedy i celý výraz. $\square$

Kružnice

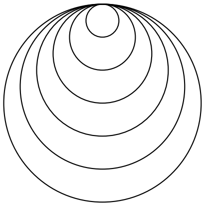
2. podzimní série Vzorové řešení

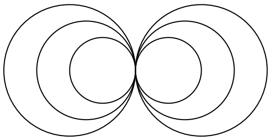
Úloha 1. (134; 128; 2,90; 3,0)

Nakreslete v rovině dvanáct kružnic tak, aby se každá z nich dotýkala právě pěti dalších.

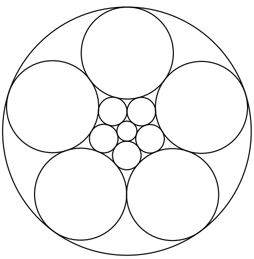
(Martina Vaváčková)

První řešení:
Sestrojíme dvě šestice kružnic tak, aby se všechny kružnice ze stejné šestice dotýkaly v jednom bodě a aby se žádné dvě kružnice z různých šestic nedotýkaly. Dostaneme dvanáct kružnic takových, že se každá dotýká pěti dalších.





Druhé řešení:
Umístíme deset středů kružnic do vrcholů dvou vhodně zvolených pravidelných pětiúhelníků a doplníme dvě kružnice jako na obrázku. Každá ze znázorněných kružnic se dotýká pěti dalších.



Poznámky:
Většina řešitelů měla úlohu samozřejmě správně. Někteří využili toho, že úkolem bylo nakreslit vyhovující obrázek a nebylo potřeba popisovat konstrukci, tudíž si troufli na komplikovanější rozmístění kružnic.

Řešení, která jsem neuznala za správná, spočívala ve splývajících totožných kružnicích. Ty mají nekonečně mnoho společných bodů, tudíž se nedotýkají, a navíc je považujeme za jednu.

(Míša Hubatová)

Úloha 2.

(126; 117; 2,80; 3,0)

Filip si nakreslil trojúhelník ABC a na jeho nejdelší straně BC našel body K a L tak, aby platilo $|AB| = |BK|$ a $|AC| = |CL|$. Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku AKL splývá se středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Ze zadání víme, že trojúhelníky ABK a ACL jsou rovnoramenné (se základnami AK, resp. AL). Pro rovnoramenný trojúhelník platí, že osa úhlu sevřeného jeho rameny splývá s osou základny. Tedy v našem případě osa úhlu při vrcholu B splývá s osou strany AK a osa úhlu při vrcholu C splývá s osou strany AL. Pak si již stačí jen vzpomenout, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na průsečíku os úhlů při vrcholech B a C a že střed kružnice opsané trojúhelníku AKL leží na průsečíku os stran AK a AL. Tedy středy obou kružnic splývají.

Poznámky:

Jako obvykle se našlo pár řešení, která se snažila „dokázat“ úlohu narýsováním. Jeden řešitel se vydal cestou počítání úhlů, které bylo velmi vyčerpávající, ale nakonec se dobral správného výsledku. Naprostá většina vyřešila úlohu bez problémů, často přímo vzorově. :-)

(Kristýna „Kikina“ Zemková)

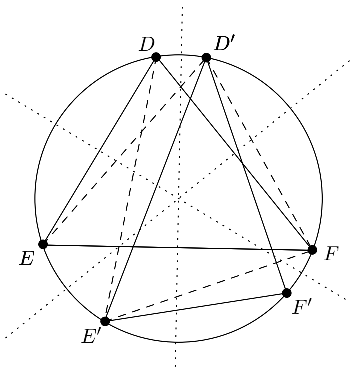
Úloha 3.

(87; 60; 2,03; 3,0)

Helča si pro změnu nakreslila trojúhelník DEF s vnitřními úhly $|\sphericalangle FDE| = 70°$, $|\sphericalangle DEF| = 60°$ a $|\sphericalangle EFD| = 50°$. Poté sestrojila přímky o, p a q, které byly po řadě osami úseček EF, FD a DE. Dále zobrazila bod D v osové souměrnosti podle přímky o, bod E podle přímky p a konečně bod F podle přímky q. Získala tak body D', E' a F'. Jaké jsou vnitřní úhly trojúhelníka $D'E'F'$? *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Osa úsečky DD' prochází středem kružnice opsané $\triangle DEF$, a tedy jsou body D a D' od tohoto středu stejně vzdálené. Obdobně to platí i pro body E, E', resp. F, F'. Z toho plyne, že všech těchto šest bodů leží na jedné kružnici.



Osová souměrnost podle osy úsečky DD' zobrazí $\triangle FDE$ na $\triangle ED'F$, takže tyto dva trojúhelníky jsou podobné. Z toho získáme, že

$$|\sphericalangle DED'| = |\sphericalangle FED| - |\sphericalangle FED'| = 60° - 50° = 10°$$

a podobně

$$|\sphericalangle FEF'| = |\sphericalangle F'ED| - |\sphericalangle FED| = 60° - 50° = 10°.$$

Jelikož body leží na kružnici, tak

$$|\sphericalangle DED'| = |\sphericalangle DE'D'| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle FEF'| = |\sphericalangle FE'F'|.$$

Nyní už snadno dopočítáme, že

$$|\sphericalangle D'E'F'| = |\sphericalangle DE'F| - |\sphericalangle DE'D'| + |\sphericalangle F'E'F| = 60^\circ - 10^\circ + 10^\circ = 60^\circ.$$

Obdobně dopočítáme i velikosti zbylých úhlů $|\sphericalangle D'F'E'| = 80^\circ$ a $|\sphericalangle E'D'F'| = 40^\circ$.

Poznámky:
S úlohou si většina z vás poradila hezky. Někteří poslali jen obrázek s popiskem, že doplňovali úhly, až to vyšlo. Na obrázku bylo často hodně vyznačených úhlů, ale nešlo poznat, jestli si řešitelé obrázek nakreslili v GeoGebře, nebo počítali opravdu úporně. Za taková řešení jsem proto moc bodů nedával. *(Kuba Svoboda)*

Úloha 4.

(71; 54; 3,79; 5,0)

Je dán trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu A. Označme D patu jeho výšky z vrcholu A. Pro každý vnitřní bod X úsečky AD sestrojme bod Y tak, aby platilo $|\sphericalangle YBC| = 2|\sphericalangle XBC|$, $|\sphericalangle YCB| = 2|\sphericalangle XCB|$ a body X, Y ležely ve stejné polorovině určené přímkou BC. Dokažte, že hodnota $|YC| - |YB|$ nezávisí na volbě bodu X. *(Pepa Tkadlec)*

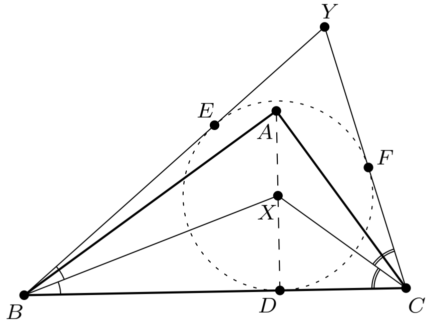
Řešení:
Vzhledem k podmínkám úlohy jsou přímky BX a CX osy vnitřních úhlů při vrcholech B, C trojúhelníku BCY. Průsečík BX a CX je tudíž střed kružnice vepsané trojúhelníku BCY. Označme si po řadě E a F body dotyku kružnice vepsané se stranami BY a CY. Vedeme-li z bodu dvě tečny ke kružnici, pak vzdálenost tohoto bodu od obou bodů dotyku je stejná. Proto

$$|EY| = |FY|, \quad |BE| = |BD| \quad \text{a} \quad |CF| = |CD|.$$

Rozdíl tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$|CY| - |BY| = |CF| + |FY| - |BE| - |EY| = |CD| - |BD|.$$

Poloha bodu D nezávisí na volbě bodu X, proto ani rozdíl $|CD| - |BD|$ na ní nezávisí.



Poznámky:
Většina řešení se opírala o stejnou myšlenku jako autorské řešení, nicméně mnoho z nich mělo společný neduh – často se rovnosti zmíněné v řešení objevily bez jakéhokoliv vysvětlení. Ačkoliv jsem za toto body nestrhával, je vždy dobré (alespoň krátce) zmínit, proč vlastnost platí. Dále se objevilo řešení využívající analytickou geometrii a několik hutných řešení, která využívala goniometrii. Bohužel několik řešitelů nabylo názoru, že bod Y musí ležet na polopřímce DA, což obecně není pravda. Tato úvaha velmi efektivně pohřbila další možný postup. Přes všechny tyto problémy lze řici, že si většina řešitelů s úlohou poradila. *(Honza Krejčí)*

Úloha 5.

(116; 105; 4,55; 5,0)

Dokažte, že v tečnovém lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) se kružnice s průměry AD a BC dotýkají. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Z úvodního textu k sérii víme, že pro tečnový čtyřúhelník je součet délek obou dvojic protilehlých stran stejný. Pro tečnový lichoběžník $ABCD$ tedy platí, že $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$. Označme K střed strany BC a L střed strany AD. Body K a L jsou pak středy kružnic nad průměry BC a AD. Úsečka KL je střední příčkou lichoběžníka, a proto platí, že

$$|KL| = \frac{|AB| + |CD|}{2} = \frac{|BC| + |AD|}{2}.$$

Poloměr kružnice nad BC je roven $\frac{1}{2}|BC|$ a poloměr kružnice nad AD je $\frac{1}{2}|AD|$. Sočet poloměrů obou kružnic je roven vzdálenosti jejich středů a z toho již plyne, že se tyto kružnice dotýkají.

Poznámky:

Většina řešitelů sepsala řešení podobné vzorovému. Někteří dokonce dokázali, že se kružnice s průměry BC a AD dotýkají ve středu kružnice vepsané lichoběžníku $ABCD$. To však úloha nepožadovala. Úloha byla jednoduchá, a tak téměř všichni obdrželi plný počet bodů.

(Martin Hora)

Úloha 6.

(33; 11; 1,82; 1,0)

Olin si vzal iracionální číslo $x \in (0, 1)$. Na kružnici o obvodu 1 zvolil libovolně bod X_1 a poté postupně ve směru hodinových ručiček vyznačil body $X_2, \ldots, X_n$ tak, aby délka oblouku mezi každými dvěma po sobě jdoucími byla x. Nakonec mezi body $X_1, \ldots, X_{n-1}$ našel X_a a X_b – sousedy bodu X_n. Dokažte, že $a + b \leq n$. *(Alexander „Olin“ Slávik)*

Řešení:

Nejprve si dokažme, že žádné dva body nemohou splývat, tedy že pro libovolná navzájem různá $p, q \leq n$ platí $X_p \neq X_q$. (Z tohoto pozorování vyplývá, že je smysluplné definovat sousedy nějakého bodu, a navíc jej v dalším řešení využijeme.) Kdyby platilo $X_p = X_q$, pak by nutně $(p - q)x = z$ pro nějaké z celé, tedy $x = \frac{z}{p-q}$. A protože i $p - q$ je celé nenulové, bylo by x racionální, což je spor se zadáním.

Nyní se můžeme pustit do samotného důkazu. Postupujme sporem a předpokládejme, že pro dané sousedy bodu X_n platí $a + b > n$. Dále bez újmy na obecnosti předpokládejme, že X_b je soused X_n proti směru hodinových ručiček (jinak si X_a přeznačíme na X_b a naopak). Budeme chtít ukázat, že na oblouku X_bX_a obsahujícím X_n leží ještě nějaký jiný Olinem vyznačený bod X_c. Ten by pak ležel buď na oblouku X_bX_n nebo X_nX_a (jakožto podobloucích oblouku X_bX_a obsahujícího X_n) a jeden z bodů X_a, X_b by nebyl sousedem X_n. Tím bychom dostali kýžený spor. Ukažme, že $c = a - (n - b)$.

Z předpokladu $a + b > n$ snadno získáme $a - (n - b) > 0$ a z $a < n$, $b < n$ dostaneme $a - (n - b) = a + b - n < n$, takže bod $X_{a-(n-b)}$ jsme na kružnici někam vyznačili. Navíc z faktu $a - (n - b) < n$ a pozorování v prvním odstavci dostáváme $X_{a-(n-b)} \neq X_n$. Dále si uvědomme, že když z bodu X_n přejdeme do bodu X_b, snížíme index o $n - b$ a přitom se posuneme o určitou vzdálenost y proti směru hodinových ručiček. Při přechodu z X_a do $X_{a-(n-b)}$ také snížíme index o $n - b$ a tím pádem se také posuneme o y proti směru hodinových ručiček. Protože je ale vzdálenost X_aX_b proti směru hodinových ručiček větší než y, leží bod $X_{a-(n-b)}$ skutečně uvnitř oblouku X_bX_a obsahujícího X_n a není roven bodu X_n, čímž získáváme hledaný spor.

Poznámky:
První důležitou poznámkou je fakt, že (ač to zadání nezmiňovalo) musíme předpokládat $n \geq 2$, aby měla úloha smysl. Protože se ale jedná o speciální degenerovaný případ, do hodnocení jsem jeho diskusi nijak nezapočítával.

Celkově se úloha ukázala být velmi těžkou, obtížnostně by odpovídala spíše sedmičce. Tomu odpovídá i počet správných řešení, který nepřesahuje deset. Na druhou stranu jen dvě ze správných řešení měla stejný postup (který přibližně odpovídal tomu vzorovému). Ostatní řešitelé dokázali vyřešit úlohu přímo, různými typy indukce nebo dokonce i různými typy důkazu sporem. Úloha se tedy dala řešit takřka „ze všech stran“.

Bohužel většina řešení byla nedostatečná. Řešitelé argumentovali tím, že dokud obíháme kružnici poprvé, je tvrzení jasně pravdivé. Při druhém oběhu také platí, a tak se prý dá pokračovat dál. Ano, je pravda, že se tak skutečně pokračovat dál dá, ale pokud chcete důkaz tímto způsobem provést pořádně, dá to nemálo práce a zabere nemálo času. Proto jsem za řešení tohoto typu dával jen ve výjimečně dobře rozebraných případech více než jeden bod.

(Martin „E.T.“ Sýkora)

Úloha 7. (57; 38; 3,32; 5,0)

Je dán trojúhelník $A_1A_2A_3$ a sedm kružnic $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_7$, které splňují následující dvě podmínky:

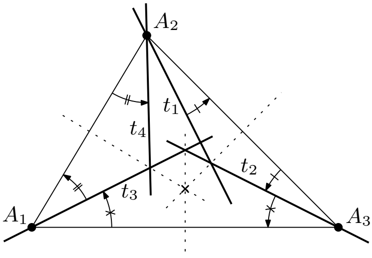
(i) *kružnice ω_1 prochází body A_1 a A_2, kružnice ω_2 body A_2 a A_3, kružnice ω_3 body A_3 a A_1 a tak dále, až kružnice ω_7 prochází body A_1 a A_2,*

(ii) *kružnice ω_i a ω_{i+1} mají vnější dotyk pro všechna $i = 1, 2, \dots, 6$.*

Dokažte, že kružnice ω_1 a ω_7 splývají. *(Alexander „Olin“ Slávik)*

Řešení:
Nechť o_1, o_2, o_3 značí osy úseček A_2A_3, resp. A_3A_1, A_1A_2. Dále t_i značí společnou tečnu kružnic ω_i a ω_{i+1} pro všechna i od 1 do 6 a nakonec t_7 značí tečnu kružnice ω_7 v bodě A_2.

Kružnice ω_i a ω_{i+1} mají bod dotyku v A_{i+1} (indexy vrcholů a os stran bereme cyklicky modulo 3), a proto jejich společná tečna t_{i+1} prochází bodem A_{i+1}. Přímky t_i a t_{i+1} jsou tečny ke kružnici ω_{i+1} v bodech A_{i+1} a A_{i+2}, a tedy se v osové souměrnosti podle o_i zobrazí navzájem na sebe. Z toho plyne, že tečna t_1 se postupně po 6 osových souměrnostech podle přímek t_1, t_2, t_3, t_1, t_2, t_3 dostane na přímku t_7. Abychom dokázali, že kružnice ω_1 a ω_7 splývají, stačí ukázat, že přímka t_1 je přímka t_7. Kružnice s tětivou A_1A_2 a fixní tečnou t_1 v bodě A_2 je totiž jednoznačně určena.



Zavedeme orientovaný úhel $\sphericalangle(x, y)$, který nám říká, o kolik musíme otočit přímku x v kladném směru, abychom dostali přímku y. Podle vlastnosti osové souměrnosti snadno dopočteme $(t_1, A_2A_3) = (A_2A_3, t_2) = (A_2A_3, A_3A_1) - (t_2, A_3A_1)$. Analogicky vyjádříme (t_2, A_3A_1) a postupně dostaneme:

$$(t_1, A_2A_3) = (A_2A_3, A_3A_1) - (A_3A_1, A_1A_2) + (A_1A_3, A_3A_2) - (t_4, A_2A_3),$$
$$(t_4, A_2A_3) = (A_2A_3, A_3A_1) - (A_3A_1, A_1A_2) + (A_1A_3, A_3A_2) - (t_7, A_2A_3).$$

Odečtením dvou výše uvedených vztahů získáme $(t_1, A_2A_3) = (t_7, A_2A_3)$. Úhel mezi t_1 a A_2A_3 v kladném směru je tedy stejný jako mezi t_7 a A_2A_3, tudíž přímka t_1 je opravdu t_7.

Poznámky:
Většina došlých řešení porovnala buď úhel mezi t_1 a A_2A_3 s úhlem mezi t_7 a A_2A_3, nebo úhly nad oblouky A_2A_3 v kružnicích ω_1 a ω_7. Zapomněla ale na to, že zmíněná rovnost není postačující, abychom mohli prohlásit, že kružnice ω_1 a ω_7 splývají. Je potřeba vyloučit případ, kdy t_1 a t_7 leží na opačných polorovinách oddělených přímkou A_2A_3. Za tento nedostatek jsem body nestrhával, ale chci pochválit řešitele, kteří si na to vzpomněli. Jedna z možností, jak obejít diskuzi o polohách bodů, je uvědomit si, že složení tří souměrností s osami procházejícími jedním bodem je pouze jedna osová souměrnost. (Obecně se jedná o osovou souměrnost s nějakým posunutím, ale zde existuje pevný bod, který je středem kružnice opsané trojúhelníku $A_1A_2A_3$, a proto posunutí je nulové.) Hezké využití kruhové inverze měl *Radovan Švarc*, který si tak zasloužil jediný pozitivní imaginární bod. *(Anh Dung „Tonda“ Le)*

Úloha 8.

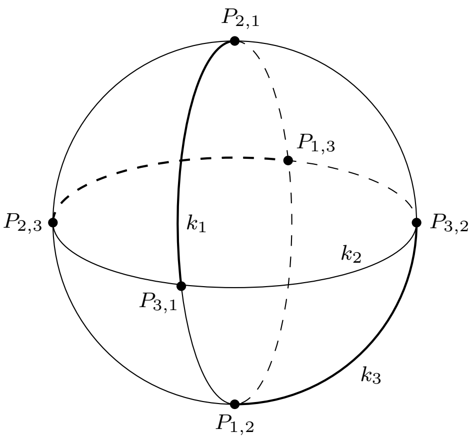
(31; 12; 1,71; 0,0)

Je dána jednotková sféra. Najděte reálné číslo x takové, že pro každé $l < x$ lze na sféru nakreslit tři neprotínající[5] se oblouky hlavních kružnic[6] délky l, ale pro žádné $L > x$ už to možné není.
(Martina Vaváčková)

Řešení:
Hledané $x = \frac{5}{3}\pi$.

Sporem ukážeme, že nenajdeme 3 oblouky b_1, b_2, b_3 délky $L > \frac{5}{3}\pi$. Předpokládejme tedy, že existují. Odpovídající hlavní kružnice označíme k_1, k_2, k_3.

Uvažme dva ze tří zadaných oblouků b_i, b_j. Kružnice k_i, k_j nemohou být totožné – to by se na ně nevešly ani oblouky o délce π. Kružnice k_i a k_j se tedy protínají, a to (protože jsou hlavní) ve dvou protilehlých bodech. Průsečíky označme $P_{i,j}$, $P_{j,i}$. Jak b_i, tak b_j má délku větší než π, takže každý z nich obsahuje alespoň jeden z bodů $P_{i,j}$, $P_{j,i}$. Protože se nesmí dotýkat, tak oba oblouky obsahují právě jeden z těchto bodů. BÚNO $P_{i,j} \in b_i$, $P_{j,i} \in b_j$.



Pro body X, Y na sféře budeme symbolem $|XY|$ značit jejich nejkratší možnou vzdálenost po povrchu sféry (tedy délku kratšího oblouku hlavní kružnice procházející X a Y).

[5]Nesmějí se ani dotýkat.

[6]Hlavní kružnice je kružnice ležící na sféře, jejíž střed je zároveň středem sféry.

Na kružnici k_1 leží body $P_{2,1}$, $P_{3,1}$ nenáležící oblouku b_1. Jelikož je délka oblouku b_1 větší než $\frac{5}{3}\pi$, je $|P_{2,1}P_{3,1}| < \frac{\pi}{3}$. Analogicky $|P_{1,3}P_{2,3}| < \frac{\pi}{3}$ a $|P_{3,2}P_{1,2}| < \frac{\pi}{3}$. Ze středové symetrie podle středu sféry je $|P_{1,3}P_{2,3}| = |P_{3,1}P_{3,2}|$, takže sférická lomená čára $P_{2,1}P_{3,1}P_{3,2}P_{1,2}$ má každý ze svých tří oblouků kratší než $\frac{\pi}{3}$. To znamená, že musí být kratší než π, ale současně musí vést z bodu $P_{2,1}$ do protějšího $P_{1,2}$, což je spor.

Konstrukci provedeme obráceně – dostaneme l takové, že $l < \frac{5}{3}\pi$ a začneme s lomenou čarou $P_{2,1}P_{3,1}P_{3,2}P_{1,2}$, která má každý úsek kratší než $2\pi - l$ a také (pro jistotu) kratší než π, neshodují se v ní žádné dvě hlavní kružnice a její krajní body jsou naproti sobě.

Tu sestrojíme například tak, že bod $P_{2,1}$ umístíme do severního pólu, bod $P_{3,1}$ na rovnoběžku 30° severní šířky a nultý poledník, bod $P_{3,2}$ na rovnoběžku 30° jižní šířky a poledník kladné východní délky menší než $\frac{5}{3}\pi - l$ a nakonec bod $P_{1,2}$ umístíme do jižního pólu. Pak totiž bude

$$|P_{2,1}P_{3,1}| = |P_{3,2}P_{2,1}| = \frac{\pi}{3} < 2\pi - l \quad \text{a} \quad |P_{3,2}P_{3,1}| < \frac{\pi}{3} + \left(\frac{5}{3}\pi - l\right) = 2\pi - l.$$

Nakonec sestrojíme body $P_{1,3}$, $P_{2,3}$ coby středové obrazy bodů $P_{3,1}$, $P_{3,2}$. Pak stačí vést oblouk b_1 skrz $P_{1,2}$, $P_{1,3}$, aby se vyhnul bodům $P_{2,1}$, $P_{3,1}$, oblouk b_2 skrz $P_{2,1}$, $P_{2,3}$, aby se vyhnul bodům $P_{1,2}$, $P_{3,2}$ a oblouk b_3 skrz $P_{3,1}$, $P_{3,2}$, aby se vyhnul bodům $P_{1,3}$, $P_{2,3}$.

Poznámky:

Opět ne příliš obtížná osmička, jen bych si pro příště přál méně mlhy „A když už tenhle trojúhelník bude skoro placatý a tenhle skoro rovník, tak to vyjde, ale ne úplně, ale to vlastně nevadí, protože se nekonečně blížíme… A tady se to bude dotýkat, ale ne úplně…“ a více jasných formulací. Někteří takto obhajovali správnou konstantu $\frac{5}{3}\pi$ (což byl základ k dosažení nějakého bodového zisku) jiní obdobnou mlhou tvrdili, že $x = \frac{3}{2}\pi$ či $x = 2\pi$. Ostatně konstanta $\frac{3}{2}\pi$ byla vůbec populární – po 11 správně určených x bylo 9 pokusů o $x = \frac{3}{2}\pi$, následovalo čtyřikrát $x = \pi$, dvakrát $x = 2\pi$ a nakonec jedno řešení přišlo na to, že $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.

(Mirek Olšák)

Kongruence

3. podzimní série　　　　Vzorové řešení

Úloha 1.
(111; 107; 2,81; 3,0)

Když si Kuba hrál se svým oblíbeným přirozeným číslem, zjistil zajímavou věc. Nejenže dané číslo bylo palindrom[7] a dávalo po dělení čtyřmi zbytek 1 a po dělení dvaceti pěti zbytek 22, ale dokonce bylo nejmenším číslem, které všechny předchozí body splňuje. Které číslo to bylo?

(Kuba Krásenský)

Řešení:
Kubovo oblíbené přirozené číslo dávalo zbytek 22 po dělení dvaceti pěti, tudíž jeho poslední dvojčíslí bylo 22, 47, 72 nebo 97. Protože zbytek po dělení čtyřmi závisí pouze na posledním dvojčíslí, hledané číslo musí končit na 97, jenž jediné z uvedených dvojčíslí dává zbytek 1 po dělení čtyřmi. Proto Kubovo oblíbené číslo bylo nejmenší palindrom končící na 97, což je 797.

Poznámky:
Líbila se mi řešení využívající Čínskou zbytkovou větu. Plný počet jsem udělovala samozřejmě také řešením, která procházela od nejmenších všechna čísla splňující některou z podmínek ze zadání, pokud nebyla některá čísla bez okomentování opomenuta. Zde bych chtěla upozornit, že existují i dvojciferné palindromy – na ně se často zapomínalo. *(Míša Hubatová)*

Úloha 2.
(86; 47; 1,95; 2,0)

Nalezněte všechny čtveřice nezáporných celých čísel a, b, c, d, které řeší rovnici

$$10^a + 5^b = 3^c + 7^d.$$

(Štěpán Šimsa)

Řešení:
Pokud $a > 0$, potom na levé straně rovnice máme liché číslo, zatímco na pravé straně vždy číslo sudé, takže rovnost nemůže nikdy nastat. Musí tedy být $a = 0$, rovnice se nám přepíše do tvaru

$$1 + 5^b = 3^c + 7^d.$$

Nyní předpokládejme, že $c > 0$, a podívejme se na rovnici modulo tři. Protože $7 \equiv 1 \pmod 3$, je i $7^d \equiv 1 \pmod 3$ a pravá strana dává vždy zbytek 1 po dělení třemi. Dále $5 \equiv -1 \pmod 3$, takže $5^b \equiv (-1)^b \pmod 3$. Levá strana může tedy dávat zbytky pouze 0 nebo 2, proto rovnost nenastává. Z toho plyne, že i $c = 0$. Dostáváme rovnici $5^b = 7^d$, která má řešení pouze $b = d = 0$.

[7] Palindromem rozumíme číslo, které se v desítkové soustavě čte stejně zepředu jako zezadu, např. 226747622.

Poznámky:
Kromě správných řešení, která byla většinou stejná jako vzorák, se vyskytlo několik skupin řešení špatných. Řešitelé z první skupiny pouze ukázali, že rovnice nemá řešení v $\mathbb{N}$, z čehož usoudili, že je nutně $a = b = c = d = 0$, což samozřejmě obecně není pravda. Další skupina se snažila úlohu vyřešit pomocí diskutování, jakou cifrou končí čísla na levé a pravé straně, nikdo to však správně nedotáhl do konce. Někteří řešitelé si neuvědomili, že 0 je nezáporné celé číslo, a po vyšetření sudosti/lichosti obou stran prohlásili, že rovnice nemá řešení. Dokonce se našel jeden řešitel, který správě ukázal, že $a = 0$, ale při vyšetřování rovnice modulo tři stejně napsal, že rovnost nenastává nikdy. *(Martin Čech)*

Úloha 3.

(72; 61; 2,58; 3,0)

Dokažte, že pro každé přirozené číslo a existuje přirozené číslo $n > 1$ takové, že $n \mid a^n + 1$.
(Anh Dung „Tonda“ Le)

Řešení:

Pokud je a liché, potom je a^2 liché a $a^2 + 1$ je sudé, číslo $n = 2$ tedy vyhovuje podmínce v zadání. Pokud je a sudé, položíme $n = a + 1$. Potom platí

$$a^n = (n-1)^n \equiv (-1)^n = -1 \pmod{n},$$

neboť n je liché. Pokud si tuto kongruenci přepíšeme podle definice, dostaneme $n \mid a^n + 1$, což jsme přesně chtěli.

Poznámky:
Většina zaslaných řešení byla správná, skoro vždy shodná se vzorovým. Někteří si navíc všimli, že zadané podmínce vyhovuje každý prvočíselný dělitel čísla $a+1$, a dokonce i každý lichý dělitel čísla $a + 1$. To sice úloha nijak nepožadovala, ale je to zajímavé pozorování. *(Tonda Češík)*

Úloha 4.

(46; 36; 3,76; 5,0)

Nalezněte přirozené n takové, že

$$11^{n+1} + 10^{12n+6} + 11^{4n+2} \equiv 1 \pmod{1000121}.$$

Prozradíme, že 1000121 *je prvočíslo.* *(Kuba Krásenský)*

Řešení:
Nejdříve ukážeme, že výraz $10^{12n+6} + 11^{4n+2}$ je pro každé n dělitelný prvočíslem 1000121. Můžeme totiž psát

$$10^{12n+6} = (1000000)^{2n+1},$$
$$11^{4n+2} = (121)^{2n+1}.$$

Pokud $a \equiv b \pmod{m}$, pak pro libovolné k přirozené platí $a^k \equiv b^k \pmod{m}$. S využitím tohoto pravidla dostaneme

$$1000000 \equiv -121 \pmod{1000121}$$
$$(1000000)^{2n+1} \equiv (-121)^{2n+1} = -(121)^{2n+1} \pmod{1000121},$$

což jsme chtěli ukázat. V poslední úpravě jsme využili faktu, že $2n+1$ je liché číslo. Kongruence ze zadání se tak zjednodušila na

$$11^{n+1} \equiv 1 \pmod{1000121}.$$

Přišel čas na Malou Fermatovu větu, která říká, že pro p prvočíslo a a přirozené číslo nesoudělné s p platí $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Podle rady ze zadání je 1000121 prvočíslo. Můžeme tedy zvolit takové n, aby platilo

$$11^{n+1} = 11^{1000121-1} \equiv 1 \pmod{1000121}.$$

Řešením úlohy je například $n = 1000119$.

Poznámky:

Úlohu neposlalo mnoho lidí (na čtyřku), z došlých řešení pak byly zhruba tři čtvrtiny správně. Postupy se od sebe lišily především důkazem toho, že součet druhého a třetího členu je dělitelný daným prvočíslem – kromě výše uvedeného mnozí argumentovali tvrzením, že pro liché m platí $a + b \mid a^m + b^m$.

Řešitelé, kteří si tohoto pěkného součtu nevšimli, se mě často snažili přesvědčit, že žádné vyhovující n neexistuje. *(Bára Kociánová)*

Úloha 5.

(90; 88; 4,76; 5,0)

Dokažte, že $1^1 + 11^{11} + \cdots + 1111111111^{1111111111}$ *(sčítanců je deset) je dělitelné 100.*

(Kuba Krásenský)

Řešení:

Jelikož

$$1\ldots111 \equiv 11 \pmod{100},$$

platí i

$$1\ldots11^{1\ldots11} \equiv 11^{1\ldots11} \pmod{100},$$

tudíž všechny členy zadaného součtu kromě 1^1 jsou kongruentní s $11^{1\ldots11}$ modulo 100 a máme

$$\begin{aligned} &1^1 + 11^{11} + 111^{111} + \cdots + 1111111111^{1111111111} \equiv \\ &\equiv 1 + 11^{11} + 11^{111} + \cdots + 11^{1111111111} \pmod{100}. \end{aligned}$$

Všimneme si, že $11^{10} \equiv 1 \pmod{100}$, dle binomické věty totiž platí

$$11^{10} = (10+1)^{10} = 1 + \binom{10}{1} \cdot 10 + \binom{10}{2} \cdot 10^2 + \cdots \equiv 1 + 10 \cdot 10 \equiv 1 \pmod{100},$$

neboť všechny členy tohoto součtu kromě 1 jsou dělitelné 100. Dál upravujeme součet ze zadání:

$$\begin{aligned} 1 + 11^{1\cdot 10+1} + 11^{11\cdot 10+1} + \cdots + 11^{111111111\cdot 10+1} &= \\ = 1 + (11^{10})^1 \cdot 11 + (11^{10})^{11} \cdot 11 + \cdots + (11^{10})^{111111111} \cdot 11 &\equiv \\ \equiv 1 + 1^{11} \cdot 11 + \cdots + 1^{111111111} \cdot 11 = 1 + 9 \cdot 11 = 100 &\pmod{100}. \end{aligned}$$

Zadaný součet je tedy kongruentní s 0 modulo 100, neboli je stem dělitelný, což jsme měli dokázat.

Poznámky:

Naprostá většina řešitelů řešila tuto úlohu obdobně jako ve vzoráku, pouze tři z vás si nejprve rozložili 100 na $4 \cdot 25$ a dokazovali zvlášť dělitelnost čtyřmi a dvaceti pěti, což ovšem řešení spíše prodloužilo. Těm, kteří platnost $11^{1\ldots11} \equiv 11 \pmod{100}$ pouze bez důkazu prohlásili, jsem nakonec strhával jeden bod. *(Tomáš Novotný)*

Úloha 6.

(64; 58; 4,22; 5,0)

Sedmiciferné přirozené číslo nazveme spořádané, pokud je každá z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 v jeho desítkovém zápisu obsažena právě jednou. Existují dvě různá spořádaná čísla taková, že jedno dělí druhé? *(Anh Dung „Tonda“ Le)*

Řešení:
Dokážeme, že neexistují dvě různá spořádaná čísla a, b taková, že $a = bk$. Pro spor předpokládejme opak. Podíl 7654321/1234567 je menší než 7, a proto $2 \leq k \leq 6$. Dále platí, že každé přirozené číslo dává stejný zbytek po dělení devíti jako jeho ciferný součet, a proto:

$$a \equiv b \equiv 1 + 2 + \cdots + 7 = 28 \equiv 1 \pmod 9.$$

Z toho pak plyne:

$$1 \equiv a = bk \equiv k \pmod 9.$$

Požadovaný vztah nesplňuje žádné přirozené k mezi 2 a 6, takže jsme došli ke sporu. Hledaná spořádaná čísla tedy neexistují.

Poznámky:
Šestá úloha byla tentokrát relativně lehká, a proto došlo hodně správných řešení. Velká část řešitelů bohužel nepřišla na použití kongruence a zabývala se rozebíráním případů. Někteří se zase báli modulo 9 a preferovali modulo 3, kvůli čemuž měli o kus práce víc.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Úloha 7.

(20; 12; 2,75; 2,0)

Nalezněte všechny posloupnosti přirozených čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, které pro každé prvočíslo p a každé přirozené číslo n splňují vztah

$$a_n^p \equiv n \pmod{a_p}.$$

(David Hruška)

Řešení:
Domluvme se, že n značí vždy přirozené číslo a p, q prvočísla. Nechť posloupnost a_n splňuje zadanou rovnost. Dosazením p za n dostaneme

$$0 \equiv a_p^p \equiv p \pmod{a_p} \quad \text{neboli} \quad a_p \mid p,$$

tedy pro každé p platí buď $a_p = 1$, nebo $a_p = p$. Dále předpokládejme, že pro nějaké p platí $a_p = p$. Pak pro libovolné q, pro které $a_q = 1$, platí

$$1 \equiv a_q^p \equiv q \pmod p,$$

tedy p dělí $q - 1$, speciálně $p < q$. To znamená, že v posloupnosti budou napřed prvočísla, pro která $a_p = p$ (pokud vůbec nějaká jsou) a pak už samá taková, pro která $a_p = 1$ (pokud vůbec nějaká jsou).

Nyní ukážeme, že $a_3 = 3$ již vynutí $a_p = p$ pro všechna prvočísla p. Kdyby ne, měli bychom jen konečně mnoho prvočísel p, pro která $a_p = p$. Uvažme jejich součin S. Pak všechna q, která dělí $S - 1$, splňují $a_q = 1$ a vzhledem k tomu, že $S - 1 \equiv 2 \pmod 3$, najdeme v $S - 1$ i prvočíselného dělitele $q \equiv 2 \pmod 3$, což je ale ve sporu s rovnicí ze zadání pro $p = 3$.

Rozeberme tedy tři možnosti:

(1) Pokud pro všechna p platí $a_p = 1$, je pro každé p a n kongruence ze zadání splněna triviálně. Zadání tak vyhovuje každá posloupnost přirozených čísel a_n splňující $a_p = 1$ pro všechna p.

(2) Pokud pro všechna p platí $a_p = p$, vezměme libovolné n a prvočíslo q splňující zároveň $q > n$ a $q > a_n$. Podle zadání a Malé Fermatovy věty platí $a_n^q \equiv a_n \equiv n \pmod{q}$, což vzhledem k volbě q implikuje $a_n = n$. Tedy v tomto případě připadá v úvahu pouze posloupnost $a_n = n$, která díky Malé Fermatově větě opravdu vyhovuje.

(3) Ve zbylých případech již víme, že nutně $a_2 = 2$ a $a_p = 1$ pro všechna $p > 2$. Netriviální podmínku dává zadání pouze pro hodnotu $p = 2$, a sice, že $a_n^2 \equiv n \pmod{2}$. To je ekvivalentní tomu, že a_n je liché pro lichá n a sudé pro sudá n. Můžeme si všimnout, že této podmínce již stanovené hodnoty (ty s prvočíselnými indexy) vyhovují. V tomto případě tedy vyhovují právě ty posloupnosti a_n splňující $a_2 = 2$, $a_p = 1$ pro každé liché prvočíslo a a_n má stejnou paritu jako n pro každé n.

Poznámky:
Všechna řešení aspoň nějakou vyhovující posloupnost nalezla a většinou i ověřila, že splňuje zadání. Zhruba polovina řešitelů pak rozbor zdárně dokončila nějakou obměnou výše uvedeného postupu. *(David Hruška)*

Úloha 8.

(13; 7; 2,62; 3,0)

Mějme libovolné prvočíslo $p \geq 7$. Dokažte, že pak existuje přirozené číslo n a celá čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$, $y_1, y_2, \dots, y_n$ nesoudělná s p taková, že

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &\equiv x_2^2 \pmod{p},\\ x_2^2 + y_2^2 &\equiv x_3^2 \pmod{p},\\ &\vdots\\ x_n^2 + y_n^2 &\equiv x_1^2 \pmod{p}. \end{aligned}$$

(Filip Hlásek)

Řešení:
Upravujme postupně následující rovnosti:

$$\begin{array}{ccccccl}
3^2 & + & 4^2 & = & 5^2 & & \text{násobíme rovnost } (3^p)^2\\
\left(3^{p+1}\right)^2 & + & (4\cdot 3^p)^2 & = & (3^p\cdot 5)^2 & & \text{násobíme rovnost } \left(\frac{5}{3}\right)^2\\
(3^p\cdot 5)^2 & + & \left(4\cdot 3^{p-1}\cdot 5\right)^2 & = & \left(3^{p-1}\cdot 5^2\right)^2 & & \text{násobíme rovnost } \left(\frac{5}{3}\right)^2\\
\left(3^{p-1}\cdot 5^2\right)^2 & + & \left(4\cdot 3^{p-2}\cdot 5^2\right)^2 & = & \left(3^{p-2}\cdot 5^3\right)^2 & & \text{násobíme rovnost } \left(\frac{5}{3}\right)^2\\
\vdots & & & \vdots & & & \\
\left(3^{p-i+1}\cdot 5^i\right)^2 & + & \left(4\cdot 3^{p-i}\cdot 5^i\right)^2 & = & \left(3^{p-i}\cdot 5^{i+1}\right)^2 & & \text{násobíme rovnost } \left(\frac{5}{3}\right)^2\\
\vdots & & & \vdots & & & \\
\left(3^2\cdot 5^{p-1}\right)^2 & + & \left(4\cdot 3^1\cdot 5^{p-1}\right)^2 & = & \left(3^1\cdot 5^p\right)^2 & &
\end{array}$$

Když pro $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ zvolíme $\overline{x_i} = 3^{p-i+1}\cdot 5^i$, $\overline{y_i} = 4\cdot 3^{p-i}\cdot 5^i$, bude pro každé $i \in \{0, 1, \dots, p-2\}$ platit

$$\overline{x_i}^2 + \overline{y_i}^2 \equiv \overline{x_{i+1}}^2 \pmod{p}$$

(nastane dokonce rovnost) a navíc jsou všechna $\overline{x_i}$ i $\overline{y_i}$ nesoudělná s prvočíslem $p \geq 7$. Z přihrádkového principu plyne, že existují $i, j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ taková, že $i < j$ a zároveň $\overline{x_i}^2 \equiv \overline{x_j}^2 \pmod{p}$. Celá čísla $n = j - i$, $x_1 = \overline{x_i}$, …, $x_n = \overline{x_{j-1}}$, $y_1 = \overline{y_i}$, …, $y_n = \overline{y_{j-1}}$ splňují zadané kongruence a jsou nesoudělná s prvočíslem p.

Poznámky:

Zhruba stejným směrem jako autorské řešení se ubíral jedině *Radovan Švarc*, který si svým stručným a přehledným řešením vysloužil také imaginární bod.

Ostatní postupy téměř výhradně začínaly tím, že zvolily libovolné x nesoudělné s p a hledaly y a z takové, aby platilo $x^2 + y^2 \equiv z^2 \pmod{p}$. Takto postupně od libovolného $\overline{x_1}$ vygenerovaly nekonečnou posloupnost čísel $\overline{x_i}$ a $\overline{y_i}$ a poté nalezly vhodné $\overline{x_i}$ a $\overline{x_j}$ podobně jako ve vzorovém řešení. Netriviální částí je ovšem ukázat, že pro každé x taková dvě celá čísla nesoudělná s p existují. Některým řešitelům se to podařilo, ale cesta to byla obvykle poměrně strastiplná.

Další zajímavá úvaha postupovala obráceně. Začneme od libovolného x_m nesoudělného s p a pokusíme se ho rozložit na součet $x_{m-1}^2 + y_{m-1}^2 \equiv x_m^2 \pmod{p}$. Dokonce i takový postup funguje a pro každé takové x_m rozklad existuje. Řešení se poté dokončí obdobně jako v předchozích případech.

Platí také silnější tvrzení než je zadaná úloha. Vždy stačí volit $n \leq 3$, $y_1 = 1$ a $1 \leq x_1 \leq 3$. Dále si všimněte, že jsme v řešení nevyužili, že p je prvočíslo, ale pouze to, že je nesoudělné s čísly 3, 4 a 5. Tvrzení platí pro všechna taková čísla a dokonce bychom si mohli na začátku zvolit jinou Pythagorejskou trojici, ale tím bychom si nepomohli, neboť v každé takové trojici se vyskytuje číslo dělitelné dvěma, číslo dělitelné třemi a číslo dělitelné pěti. *(Filip Hlásek)*

Letem grafovým světem

1. seriálová série Vzorové řešení

Úloha 1.

(57; 47; 3,93; 5,0)

Mějme graf G takový, že každý jeho vrchol má stupeň alespoň s, kde s je nějaké nezáporné celé číslo. Ukažte, že pak G obsahuje cestu na $s+1$ vrcholech jako podgraf.

(Martin „E.T.“ Sýkora)

Řešení:
Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že existuje $s \geq 0$ celé a nejaký graf taký, že stupeň každého vrcholu je aspoň s, ale neexistuje v ňom cesta na $s+1$ vrcholoch. Uvažujme ľubovolnú najdlhšiu cestu P v našom grafe. Musí mať $k \leq s$ vrcholov. Posledný vrchol tejto cesty má stupeň aspoň s, a preto z neho vedie aspoň s hrán do rôznych vrcholov. V ceste P je okrem neho maximálne $s-1$ vrcholov, preto aspoň jedna hrana vedie do vrcholu zatiaľ nepoužitého. O túto hranu môžeme našu cestu predĺžiť a dostaneme novú, dlhšiu, cestu P', čo je spor s tým, že cesta P je najdlhšia.

Poznámky:
K úlohe sa dalo pristupovať rôzne. Väčšina riešiteľov prišla na intuitívne riešenie postupným predlžovaním cesty od 0 do $s+1$ vrcholov, čo si často vyžiadalo dlhšie a ťažkopádnejšie formulácie. Tí, ktorí sa s úlohou viac vyšantili a vyriešili ju sporom alebo použili chytrú indukciu, dostali $+i$.

(Marta Kossaczká)

Úloha 2.

(37; 26; 2,22; 2,0)

Pro čísla n a k splňující $0 \leq k \leq n$ určete, kolik podgrafů grafu Q_n je izomorfních s grafem Q_k.

(Peter „πtr“ Korcsok)

Řešení:
Označme si vrcholy grafu Q_n rovnako ako v seriáli – ako n-tice núl a jednotiek. Kľúčom k celému riešeniu je ukázať, že pre ľubovoľný podgraf G grafu Q_n izomorfný s grafom Q_k existuje takých k pozícií, že n-tice prislušiace vrcholom G sa na týchto pozíciách menia (všetkých 2^k možností), ale všade inde sú pre všetky vrcholy rovnaké.

Majme nejaký podgraf $G \subseteq Q_n$, ktorý je izomorfný grafu Q_k, a príslušný izomorfizmus $f\colon V(Q_k) \to V(G)$. Vezmime si vrchol $v = (0, \ldots, 0)$ grafu Q_k, a BUNV[8] predpokladajme, že $f(v) = (0, \ldots, 0)$,[9] pre iné prípady musíme na príslušných pozíciách vo zvyšku tohto riešenia zameniť nuly a jednotky. V grafe Q_k má v práve k susedov, preto aj vrchol $f(v)$ musí v G susediť s k susedmi – každý z nich obsahuje práve jednu jednotku, opäť BUNV nech je to vždy jedna z prvých k pozícií. Ukážeme, že potom každý vrchol grafu G môže mať jednotky iba na týchto k pozíciách. Využijeme na to indukciu podľa počtu jednotiek.

[8]Bez ujmy na všeobecnosti.

[9]Pozor, v má k núl, ale $f(v)$ ich má n.

Uvažujme ľubovoľný vrchol u grafu Q_k. Pokiaľ má maximálne jednu jednotku, máme to už dokázané priamo z toho, ako sme doteraz vrcholy v G vyberali. Predpokladajme teda, že sme tvrdenie dokázali pre všetky vrcholy Q_k s maximálne l jednotkami, a skúmajme ľubovoľný vrchol u grafu Q_k obsahujúci $l+1$ jednotiek. Označme si ešte V množinu všetkých vrcholov Q_k, ktoré majú maximálne l jednotiek, $f(V)$ potom bude množina vrcholov $f(v)$ pre všetky $v \in V$.

Vrchol u má opäť k susedov, z toho $l+1$ má o jednu jednotku menej (dostaneme ich zmenou práve jednej jednotky na nulu) a zvyšok má o jednotku viac (tie vzniknú zmenou práve jednej nuly na jednotku). Medzi vrcholmi z V má teda práve $l+1$ susedov. To isté ale musí platiť aj pre vrchol $f(u)$, teda musí mať $l+1$ susedov medzi vrcholmi $f(V)$.

Ak by ale vrchol $f(u)$ mal jednotku mimo prvých k pozícií, prechodom po hrane (a teda zmenou jednej pozície) sa do $f(V)$ dostaneme iba raz (alebo dokonca vôbec, ak by tých jednotiek „mimo“ bolo viac), pretože podľa indukčného predpokladu majú všetky vrcholy z $f(V)$ jednotky iba na prvých k pozíciách. Zároveň si ale môžeme všimnúť, že všetky vrcholy Q_n, ktoré majú l a menej jednotiek na prvých k pozíciách (a nuly všade inde), už v množine $f(V)$ sú (dostali sa tam pri predošlých krokoch indukcie), $f(u)$ musí teda nutne obsahovať $l+1$ jednotiek na prvých k pozíciách. Teraz už musíme iba spočítať, koľkými spôsobmi vieme takýto podgraf vybrať. Pretože máme $\binom{n}{k}$ možností pre výber „premenlivých“ pozícií a potom 2^{n-k} možností pre hodnoty na zvyšných pozíciách, rôznych podgrafov nájdeme práve $\binom{n}{k}2^{n-k}$.

Poznámky:
Vo väčšine riešení ste správne určili počet podgrafov, častokrát ste ale dostatočne (alebo vôbec) nedokazovali, že tento počet je naozaj správny. Vtedy ste mohli získať maximálne tri body.

Čo sa týka prístupu k hľadaniu podgrafov, objavili sa v zásade tri spôsoby: prvý podobný tomu v našom riešení, druhý potom skúmal, koľko podgrafov obsahuje jeden konkrétny vrchol. Pri tom treťom ste sa snažili nájsť rekurzívne vyjadrenie hľadaného počtu podgrafov. Všetky tieto metódy sú zhruba rovnako dobré, zakaždým ale bolo potrebné dokazovať, že žiadny ďalší podgraf tam už nájsť nemôžeme. Ten posledný spôsob má ale jednu zásadnú nevýhodu – pre väčšie hodnoty n a k potrebujeme spočítať viac hodnôt alebo musíme z rekurzívneho zápisu nájsť správny vzorec.

(Peter „πtr“ Korcsok)

Úloha 3.

(51; 25; 2,16; 1,0)

Nechť $T_1, T_2, \ldots, T_k$ jsou podstromy stromu T takové, že každé dva mají alespoň jeden společný vrchol. Ukažte, že potom existuje vrchol společný všem podstromům T_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

(Martin „E.T.“ Sýkora)

Řešení:
Tvrzení dokážeme indukcí podle k. Pokud $k = 1$, pak máme jediný podstrom, pro který je závěr triviálně splněn. Mějme nyní podstromy $T_1, \ldots, T_{k+1}$ stromu T takové, že každé dva z nich mají neprázdný průnik, a předpokládejme, že pro k podstromů tvrzení platí. Graf $P = T_1 \cap \cdots \cap T_k$ tedy obsahuje aspoň jeden vrchol. Navíc je P souvislý, neboť s každými dvěma vrcholy musí do P patřit i ona jediná cesta, která je spojuje (libovolné dva vrcholy z P náleží každému T_i, $i = 1, \ldots, k$, a T_i je souvislý). Tedy P je rovněž strom.

Zvolme libovolný vrchol $p \in P$. Pokud $p \in T_{k+1}$, jsme hotovi. Nechť tedy $p \notin T_{k+1}$. Najděme vrchol $t_0 \in T_{k+1}$, do kterého vede z p nejkratší cesta (takový vrchol je určitě jen jeden, neboť v opačném případě bychom dostali dvě různé cesty vedoucí mezi dvěma vrcholy grafu T_{k+1} – jednu uvnitř T_{k+1} a jednu mimo T_{k+1}). Cesta z p do t_0 prochází kromě samotného t_0 zřejmě pouze vrcholy mimo T_{k+1}. Z libovolného $t \in T_{k+1}$ vede přitom v rámci T_{k+1} cesta do t_0. Z toho vyplývá, že každá cesta z p do nějakého vrcholu T_{k+1} prochází vrcholem t_0. Dále víme, že pro každé $i \in \{1, \ldots, k\}$ existuje nějaký vrchol $t_i \in T_i \cap T_{k+1}$. Jelikož $p \in T_i$, leží cesta z p do t_i celá v T_i. Tedy i $t_0 \in T_i$, takže t_0 je hledaný společný vrchol všech $k+1$ podstromů.

Tvrzení je tímto dokázáno pro každé $k \in \mathbb{N}$.

(Martina Vaváčková)

Alternativní řešení:

Zvoľme si ľubovoľný vrchol r ako koreň stromu T, *výškou* $h(v)$ nejakého vrcholu v potom budeme označovať počet hrán na (jedinej) ceste medzi r a v. Rovno si môžeme všimnúť, že každý vrchol v rôzny od r susedí s práve jedným vrcholom u s výškou $h(v) - 1$, vrchol u sa občas označuje ako *rodič* vrcholu v. Existenciu tohto vrcholu nám zaistí fakt, že nejaká cesta z r do v viesť musí, jednoznačnosť dokážeme sporom. Ak by totiž takéto vrcholy existovali dva, dostaneme dve cesty (obe dlhé $h(v)$ hrán), ktoré sa líšia minimálne v predposlednom vrchole, čo v strome nastať nesmie.

Ďalej si označme $r_1, \ldots, r_k$ vrcholy s najnižšou výškou v stromoch $T_1, \ldots, T_k$ – to budú korene týchto podstromov. Nakoniec vyberme ten vrchol r_i spomedzi $r_1, \ldots, r_k$, ktorý má najvyššiu výšku (z prípadných viacerých možností vyberieme ľubovoľne). Ukážeme, že r_i patrí do všetkých stromov $T_1, \ldots, T_k$.

Predtým ale musíme dokázať, že pre ľubovoľný strom T' s koreňom r' a ľubovoľný jeho vrchol v je výška vrcholov na ceste od r' k v rastúca. Ak by sa totiž výška pri pohybe po nejakej hrane $\{x, y\}$ nezmenila (alebo by dokonca klesla), musela by existovať cesta medzi koreňom r a vrcholom y, ktorá ale nevyužíva vrchol x. Tým ale opäť dostávame spor s jedinečnosťou cesty v strome.

Zvoľme teraz ľubovoľný strom T_j odlišný od T_i. Zo zadania vieme, že majú neprázdny prienik, my ale navyše ukážeme, že v tomto prieniku je aj r_i. Označme v ľubovoľný vrchol z prieniku oboch stromov. Podľa spôsobu výberu koreňov podstromov určite vieme, že $h(v) \geq h(r_i)$ aj $h(v) \geq h(r_j)$. Pretože navyše r_i má najvyššiu výšku medzi koreňmi, musí tiež platiť nerovnosť $h(r_i) \geq h(r_j)$. Teda keď sa teraz vydáme z v vždy hranou k rodičovi, musíme nutne dostať jedinú cestu k r_i (v strome T_i) a časom tiež k r_j (v strome T_j). Vrchol r_i preto leží na ceste z v do r_j, a teda aj v strome T_j.

(Peter „πtr“ Korcsok)

Poznámky:

Myšlenka úlohy nebyla obtížná, jen bylo potřeba správně argumentovat v řešení. Mnozí z vás se bohužel nechali unést jasným výsledkem a v řešení (často pomocí různých náčrtků) vysvětlovali, že to prostě jinak dopadnout nemůže. Tím si vysloužili krásnou kulatou nulu, v lepším případě jeden bod. Dva body jsem dávala těm, kteří tvrzení ukázali aspoň pro tři podstromy, a tři body těm, kteří si navíc uvědomili, že to pro tři nestačí, a uvedli záznak důkazu pro více podstromů. Čtyři až pět bodů si pak vysloužila skoro správná, respektive správná řešení. Sešlo se několik velmi pěkných přístupů, které si vysloužily kladný imaginární bod. *(Martina Vaváčková)*

Seriál – Letem grafovým světem II

Vítáme Tě na začátku druhého dílu našeho seriálu. Pokud čteš tyto řádky, nejspíš to znamená, že jsme Tě jeho prvním dílem moc neodradili nebo ses nám rozhodl(a) dát ještě jednou šanci, což nás samozřejmě těší.

Jak jsme slíbili v úvodu první části, v tomto dílu si představíme „systém různých reprezentantů“, což je sice věc ne úplně grafová, ale zato má (nejen) v teorii grafů několik hezkých důsledků a aplikací. Pokud se ho už nemůžeš dočkat, budeš se muset vyzbrojit trochou trpělivosti. V první půlce tohoto dílu si totiž ještě ukážeme, jak umíme grafy barvit a k čemu nám to pomůže. Navíc uděláme krátkou odbočku k rovinným grafům.

Barevnost grafu

Nebudeme to už dál natahovat, vezmeme rovnou do rukou štětec a kbelík s barvou a pustíme se do práce. Hlavním důvodem barvení grafů (samozřejmě kromě estetického cítění) je, že chceme odlišit „sousedící“ objekty (vrcholy nebo hrany), proto jim budeme přidělovat různou barvu.

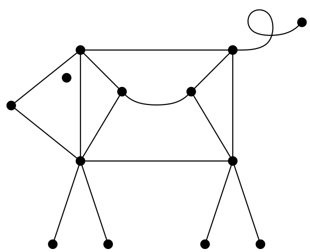
Nepochybujeme o tom, že znáš mnoho odstínů (především šedi), ale abychom Tě (i sebe) ušetřili vět typu „Vrchol u obarvíme tyrkysově-azurovou, protože olivově zelenou jsme už nabarvili vrchol v.“, budeme barvičky raději číslovat.

Definice 1. O grafu G řekneme, že je *vrcholově k-obarvitelný*, pokud existuje zobrazení $b\colon V(G) \to \{1, \dots, k\}$ splňující podmínku $b(u) \neq b(v)$, kdykoliv jsou vrcholy u a v spojeny hranou. *Vrcholovou barevností* grafu G pak rozumíme nejmenší k, pro které je G vrcholově k-obarvitelný, a značíme ji $\chi(G)$.[10]

My jsme už obarvování vlastně potkali v prvním dílu, i když jsme tomu říkali jinak. Vrcholově k-obarvitelné grafy totiž nejsou nic jiného než k-partitní grafy.

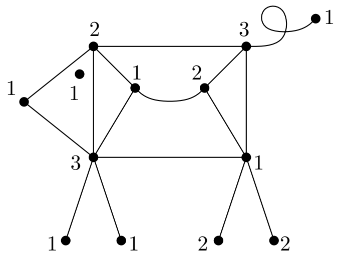
Definice 2. Graf G nazveme *hranově k-obarvitelným*, pokud existuje zobrazení $b\colon E(G) \to \{1, \dots, k\}$, kde $b(e) \neq b(f)$ platí pro všechny dvojice hran e a f mající společný vrchol. *Hranová barevnost* grafu G je pak opět nejmenší k takové, že G je hranově k-obarvitelný. Značíme ji $\chi'(G)$.

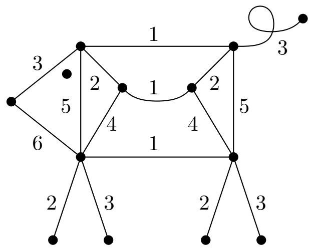
Příklad 3. Jakou vrcholovou a hranovou barevnost má graf G na obrázku?



[10]Podobně jako při značení v prvním díle, i tady pochází písmeno χ (malé řecké písmeno *chí*) z anglického *chromatic number*.

Řešení. Protože hlavu prasátka tvoří tři vrcholy spojené každý s každým, musí být $\chi(G) \geq 3$. Podobně když se podíváme na vrchol mezi hlavou a předními nohami, zjistíme, že sousedí se šesti hranami, proto taky $\chi'(G) \geq 6$. Že tyto počty barev opravdu stačí, ukazují následující obrázky. $\square$





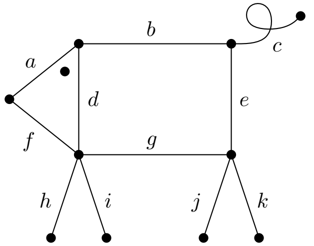
Cvičení 4. Jakou vrcholovou a hranovou barevnost mají grafy K_n, C_n, P_n a Q_n definované v prvním dílu?

Ve skutečnosti existuje ještě třetí varianta barvení. Bývá zvaná *totální* a občas značená χ''. Při ní barvíme vrcholy i hrany zároveň, přičemž žádné sousedící hrany nesmějí sdílet společnou barvu a stejně tak hrana nesmí mít barvu svého koncového vrcholu. V páté úloze letošní první série jsme tedy chtěli dokázat, že $\chi''(K_n) = n$.

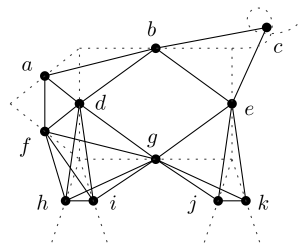
Když známe barvení hran, jsme už jen krůček od grafu, kde hrany „povýšíme“ na vrcholy.

Definice 5. Pro graf G definujeme *hranový graf* $L(G)$, jehož množina vrcholů je $E(G)$ a dva vrcholy jsou spojeny hranou právě tehdy, když jim odpovídající hrany v G měly společný vrchol.[11]

Aby sis lépe představil(a), jak vlastně hranový graf vypadá, máš tu názorný obrázek.



G



$L(G)$

Určitě sis už promyslel(a), že platí $\chi'(G) = \chi\big(L(G)\big)$, a možná Tě vzápětí napadla otázka, co nového nám hranový graf přináší. Odpověď je poměrně jednoduchá – usnadní nám život při definici dalších hranových variant barevností a také při některých důkazech.

Cvičení 6. Které grafy G jsou izomorfní se svými hranovými grafy $L(G)$?

[11] Původ písmena L je opět v anglickém výrazu *linegraph*.

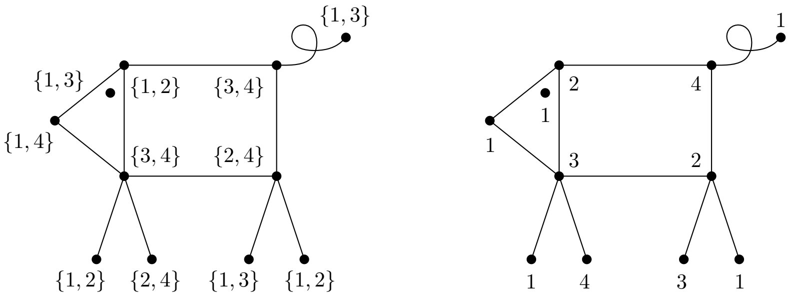
Méně tradiční barevnosti

Obě dosud zmiňované barevnosti povolovaly barvit všechny vrcholy nebo hrany všemi barvami od 1 až po k. To nám ale nemusí vždy vyhovovat.

Představ si třeba město, kde se na radnici rozhodli vymalovat všechny domy tak, aby žádné dva sousední neměly stejnou barvu. Přitom ale chtěli umožnit obyvatelům ovlivnit, jakou barvu jejich dům dostane. Proto každý majitel domu měl možnost si vybrat libovolných k barev, jež směly být na jeho domku použity. Podobnou situaci řeší následující definice.

Definice 7. Nechť G je graf, X je dost velká množina barev a zobrazení $B\colon V(G) \to \mathcal{P}(X)$ je libovolné přiřazení množin barev vrcholům G.[12] Pak řekneme, že graf G je *B-obarvitelný*, pokud existuje zobrazení $b\colon V(G) \to X$, kde $b(u) \neq b(v)$, kdykoliv jsou vrcholy u a v spojeny hranou, a navíc je pro každý vrchol v splněna podmínka $b(v) \in B(v)$. Dále graf G nazveme *k-vybíravým*, pokud je B-obarvitelný pro každou funkci B, jež splňuje podmínku $|B(v)| = k$ pro každý vrchol v. Nakonec *vybíravostí* grafu G rozumíme nejmenší k, pro které je G vrcholově k-vybíravý, a často ji značíme $\mathrm{ch}(G)$.[13]

Na tomto obrázku je znázorněno přiřazení množin barev B a jedno z možných B-obarvení b.



B $\qquad$ B-obarvení b

Pokud se Ti už povedlo strávit tuto definici, možná sis taky všiml(a) následujícího vztahu barevnosti a vybíravosti grafu.

Lemma 8. *Pro každý graf G platí $\chi(G) \leq \mathrm{ch}(G)$.*

Důkaz. Nechť $\mathrm{ch}(G) = k$. Pak je graf G z definice B-obarvitelný pro libovolné zobrazení $B\colon V(G) \to \mathcal{P}(G)$ splňující $|B(v)| = k$ pro každý vrchol v. Speciálně to tedy platí i pro funkci B, kde $B(v) = \{1, \ldots, k\}$ pro všechny vrcholy, čímž se dostáváme přímo k definici k-obarvitelnosti. Musí tedy platit $\chi(G) \leq k = \mathrm{ch}(G)$. $\square$

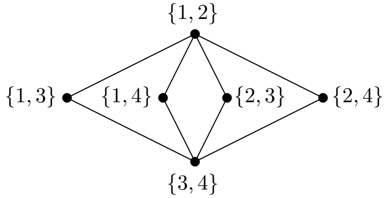
Přitom opačná nerovnost rozhodně platit nemusí.

Příklad 9. Existuje graf G splňující $\chi(G) < \mathrm{ch}(G)$.

Řešení. Takovým grafem je například $K_{4,2}$. Jelikož je bipartitní, platí $\chi(K_{4,2}) = 2$. Jak ukazuje následující obrázek, umíme vrcholům přiřadit dvouprvkové množiny barev tak, abychom z nich platné obarvení nevybrali. Proto $\mathrm{ch}(K_{4,2}) > 2$.

[12] Symbolem $\mathcal{P}(X)$ označujeme množinu všech podmnožin množiny X.

[13] Písmeno ch pochází z anglického pojmu *choosability*; v literatuře se taky vyskytuje označení χ_L – z anglického *list* (seznam).



Zadání jsme už sice splnili, ale ještě můžeme ukázat, že $\mathrm{ch}(K_{4,2}) = 3$. Když totiž každému vrcholu přiřadíme seznam tří barev, můžeme obarvit vrcholy stupně čtyři libovolně a každému ze zbylých vrcholů stejně zůstane alespoň jedna možná barva. $\square$

Ještě nám dovol v krátkosti zmínit jedno barvení. V angličtině se většinou označuje pojmem $L(p, q)$-*labeling*, což můžeme do češtiny překládat jako $L(p, q)$-*značkování.* Opět jde o zobrazení $l\colon V(G) \to \{1, \ldots, k\}$, tentokrát ale máme podmínky dvě:

(1) Kdykoliv jsou vrcholy u a v od sebe na vzdálenost jedna (tedy spojeny hranou), musí platit $|l(u) - l(v)| \geq p$.

(2) Pro každou dvojici vrcholů u a v ve vzdálenosti dva (u a v mají společného souseda) musí platit $|l(u) - l(v)| \geq q$.

Hodnotou $\lambda_{p,q}(G)$ pak označujeme minimální k potřebné k existenci $L(p, q)$-značkování grafu G. Sice se jím v tomto dílu zabývat nebudeme, ale v tom příštím Ti ukážeme jeho uplatnění v každodenním životě. Teď můžeme jen naznačit, že to má něco společného s rádiovým vysíláním.

Rovinné grafy

Od barvení grafů teď na chvilku utečeme a povíme si něco o tzv. rovinných grafech. Jsou to grafy, o kterých se mluví a píše poměrně často, takže pokud by Ti náš stručný výklad nestačil, můžeš si o nich snadno dohledat více informací. Pokud Tě naopak rovinné grafy nezajímají a chtěl(a) bys raději obarvovat, zkus zatnout zuby a následující odstavce si přece jen přečíst. Zanedlouho si totiž ukážeme, že rovinné grafy a obarvování k sobě mají velmi blízko.

Definice 10. O grafu G řekneme, že je *rovinný*, pokud ho lze zakreslit bez křížení hran.

Tato definice samozřejmě není formální, protože nikde nespecifikujeme, co to znamená „jít nakreslit bez křížení hran“. Intuitivní definice nám ale bude bohatě postačovat.[14] Abychom se vyhnuli případným nedorozuměním, měli bychom ale zdůraznit, že v definici předpokládáme, že grafy kreslíme do roviny (proto jim říkáme rovinné), a ne třeba na torus nebo Möbiovu pásku.

To, že nás zajímá, jak je to s grafy, které zakreslujeme do roviny, je zcela pochopitelné. (Už jen proto, že většinou kreslíme grafy na papír, který je rovný.) Jenže pomocí grafů často chceme reprezentovat objekty globálních rozměrů, například síť ropovodů na Zemi. Země je ale kulatá, takže je přirozené se rovněž ptát, jak vypadají grafy, které lze bez křížení nakreslit na povrch koule. Kupodivu se ukazuje, že jsou to právě rovinné grafy.

Proč? Máme-li graf nakreslený na kouli, můžeme předpokládat, že je nakreslený neprůsvitnou barvou na průhledné kouli. Potom kouli postavíme na rovinu tak, aby „horní bod“ koule nebyl obarven, a představíme si, že do tohoto bodu umístíme zdroj světla. Náš graf pak bude vrhat na rovinu stín – reprezentaci stejného grafu v rovině. Naopak máme-li graf v rovině, postavíme na rovinu kouli a nakreslíme na ni takový graf, aby se jeho stín rovnal obrazci na rovině. Přitom si určitě snadno rozmyslíš, že potom se buď hrany kříží v obou obrázcích, nebo ani v jednom.

[14] Pokud by Tě zajímala „pořádnější“ definice, můžeš se podívat třeba na Wikipedii.

Jinak řečeno, pokud umíme nějaký graf reprezentovat bez křížení hran v rovině, umíme to i na kouli – a naopak.

Pokud toužíš po matematických termínech, věz, že jsme v předchozím odstavci popsali známé zobrazení ze sféry do roviny zvané stereografická projekce.

S úsměvem na tváři se můžeme vrátit ke zkoumání rovinných grafů. Mějme graf a nějaké jeho *rovinné nakreslení*[15]. Toto nakreslení rozdělí rovinu hranami grafu na několik oblastí. Těmto oblastem budeme říkat *stěny*. Každé nakreslení má zřejmě jednu stěnu – tu „neomezenou okolo grafu“ – a případně nějaké další. Zajímavé je, že ať nakreslíme rovinný graf jakkoliv, vždy bude mít stejný počet stěn. To vyplývá z následující věty (tak, že ji postupně aplikujeme na jednotlivé komponenty souvislosti).

Věta 11. (Eulerova formule) *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf a nechť s je počet jeho stěn v nějakém rovinném nakreslení. Pak platí*

$$|V| - |E| + s = 2.$$

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle počtu hran $|E|$. Pokud $|E| = 0$, pak nutně $|V| = 1$ a $s = 1$ a rovnost platí.

Nyní předpokládáme, že tvrzení platí pro všechna rovinná nakreslení všech grafů takových, že $|E| \leq n - 1$ pro nějaké n přirozené. Chceme ukázat, že pak platí i pro libovolný případ $|E| = n$. Rozlišíme přitom dva případy.

1. Graf G neobsahuje kružnice. Potom G je strom a $|V| = |E| + 1$ a $s = 1$, takže tvrzení platí. (To, že $s = 1$, nebudeme formálně dokazovat a vystačíme si jen s tím, že je to „intuitivně jasné“.)
2. Graf G obsahuje alespoň jednu kružnici. Pak uvažme jednu hranu e, která leží na nějaké kružnici v G, a tu odmažme. Tím získáme rovinné nakreslení grafu $G - e$, který má $n - 1$ hran, a proto pro něj dokazovaný vzorec platí. Přitom jsme odebrali jednu hranu a počet vrcholů jsme nezměnili. Aby platila rovnost i pro graf G, museli jsme odebráním hrany ubrat i jednu stěnu. To ale skutečně nastane, protože odebráním hrany přestane být vnitřek kružnice samostatnou stěnou. (I zde se spokojíme s tím, že je tato skutečnost „zřejmá“, a nebudeme ji nějak podrobně dokazovat.)

□

Právě dokázaná věta má několik zajímavých důsledků. Jeden z nich je ten, že stejný vzorec platí i pro mnohostěny. Proč tomu tak je, můžeme nahlédnout následujícím způsobem. Vezmeme si libovolný mnohostěn a umístíme ho do nějaké koule tak, aby její střed ležel uvnitř daného tělesa. Potom promítneme vrcholy a hrany na povrch koule. (V řeči světélek, kterou jsme používali u stereografické projekce, umístíme zdroj světla do středu koule a výsledkem bude stín na jejím povrchu.) Výsledek pak zobrazíme stereografickou projekcí do roviny. Tím získáme graf, jehož vrcholy, hrany a stěny odpovídají po řadě vrcholům, hranám a stěnám mnohostěnu (odtud dokonce terminologie pro grafy pochází). Hrany tohoto grafu se navíc nebudou křížit a graf bude souvislý, takže pro něj, a tím pádem i pro mnohostěn, rovnost bude platit.

Dalším důsledkem je to, že existuje jen pět typů platónských těles[16] – pravidelný čtyřstěn, krychle, pravidelný osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn. K důkazu se použije stejné zobrazení těles na rovinné grafy, jaké jsme použili v předchozím odstavci. Je ale třeba dokázat jedno pomocné (nikterak složité) tvrzení, které přesahuje rámec seriálu, takže Tě odkážeme na Kapitoly z diskrétní matematiky[17], kde se můžeš dočíst víc podrobností.

---

[15] Rovinným nakreslením grafu budeme intuitivně rozumět obrázek bez křížení hran, kterým reprezentujeme daný graf.

[16] Platónské těleso neboli pravidelný mnohostěn je mnohostěn, jehož všechny stěny jsou pravidelné mnohoúhelníky takové, že se jich v každém vrcholu stýká stejný počet.

[17] Kniha od pánů Matouška a Nešetřila, kterou jsme doporučovali už minule.

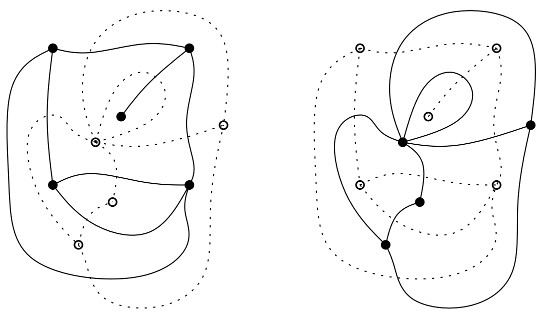
Ještě se nám budou hodit dva pojmy, které s rovinnými grafy úzce souvisejí.

Definice 12. Rovinné nakreslení grafu G nazveme *triangulací*, pokud všechny jeho stěny jsou tvořeny trojúhelníky[18]. Pokud budeme trojúhelníkovou hranici požadovat od všech stěn kromě vnější (té „neomezené“), budeme mluvit jenom o *skorotriangulaci*.

Definice 13. Mějme rovinné nakreslení grafu G. Pak jeho *duální graf* G^* má vrchol za každou stěnu grafu G a hrana spojuje dva vrcholy právě tehdy, když příslušné stěny sdílely společnou hranu.

V definici jsme si dovolili jednu nepřesnost. Pokud se například v grafu G vyskytuje most (hrana, jejíž odebrání způsobí ztrátu souvislosti), pak po obou „stranách“ tohoto mostu je ta samá stěna. V duálním grafu tedy vznikne hrana s oběma konci ve stejném vrcholu. Pokud sis četl(a) první díl opravdu pozorně, možná si vzpomeneš, že takovéto hraně jsme říkali smyčka. Stejně tak by se v duálním grafu mohly objevit paralelní hrany (pokud dvě stěny vzájemně sousedí více hranami), proto bychom v definici měli správně psát multigraf. Většinou ale budeme uvažovat grafy bez mostů a tudíž duální grafy bez smyček. Paralelní hrany nám při barvení grafů nezpůsobí žádnou komplikaci a při ostatních grafových úlohách se s nimi většinou taky nějak vypořádáme. Například často budeme navíc požadovat, aby duální graf byl opravdu grafem.[19]

Následující obrázek zobrazuje jedno rovinné nakreslení mutligrafu G a jemu příslušný duální multigraf G^*.



G G^*

Definice duálního grafu má navíc další drobný problém – není úplně jednoznačná. Jeden rovinný graf totiž může mít několik vzájemně neizomorfních duálních grafů, jež vznikly z různých rovinných nakreslení. Ve většině případů nám to ale stejně nebude vadit, protože si daný graf jednou nakreslíme a na zbylá nakreslení zapomeneme.[20] Trochu volněji tedy můžeme brát duální graf jako operaci „G s hvězdičkou“, kde budeme stále uvažovat to samé nakreslení.

Barevnost rovinných grafů

Dovol nám další odbočku do historie. Pokud o ni nestojíš, můžeš následujících několik odstavců přeskočit.

Někdy kolem roku 1852 si Francis Guthrie všiml zajímavé skutečnosti – na obarvení mapy hrabství tehdejší Anglie mu vždy stačily čtyři barvy. Spolu se svým bratrem Fredericem toho

[18] Jak už sis určitě všiml(a), v teorii grafů se používají geometrické pojmy mírně jinak. Trojúhelník typicky znamená kružnici C_3.

[19] K tomu stačí požadovat, aby neměl vrcholy stupně dva ani takzvané *artikulace*, tedy vrcholy, jejichž odebrání rozdělí graf na více komponent.

[20] Většina skutečností stejně platí bez ohledu na konkrétní nakreslení grafu.

času studoval pod vedením slavného matematika Augusta de Morgana, proto za ním zašli s dotazem, zda čtyři barvy stačí pro libovolnou mapu. Až de Morgan rozšířil tento problém mezi matematickou společnost.

V grafové terminologii bychom mohli tuto domněnku (v současnosti již dokázanou) zapsat následovně.

Věta 14. (O čtyřech barvách) *Každý rovinný graf je 4-obarvitelný.*

Prvních „důkazů" se věta dočkala až po více než 25 letech – roku 1879 od sira Alfreda Braye Kempeho a v roce 1880 od Petra Guthrie Taita. Žádný z nich ale nevydržel moc dlouho – Kempeho důkaz vyvrátil roku 1890 Percy Heawood a protipříklad k Taitovu důkazu nalezl Julius Petersen roku 1891. Oba pokusy o důkaz ale prospěly alespoň částečným řešením a umožnily objevení tehdy ještě neznámých tříd grafů.

Následujících několik desetiletí se o důkaz snažili mnozí matematici, zmínit můžeme kupříkladu Huga Hadwigera a jeho zobecňující domněnku z roku 1943, jež stále na svůj důkaz čeká.

První důkaz Věty o čtyřech barvách, jenž zatím nebyl vyvrácen[21], představili roku 1976 pánové Kenneth Appel a Wolfgang Haken, s mírnou pomocí od Johna Kocha. Poměrně velká část důkazu je ale řešená jenom na počítači, proto se důkaz mnohým matematikům nelíbil.

O dvacet let později, roku 1996, přišli Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour a Robin Thomas s novým důkazem této věty, jenž je jednodušší a kratší, použití počítače se ale nevyhnuli. Povedlo se jim najít 633 „zakázaných konfigurací", tedy grafů, jež se nemohou objevit v potenciálním minimálním protipříkladu (jinak by šly nahradit menším grafem, čímž bychom dostali ještě menší protipříklad). Na počítači pak ukázali, že by nutně každý minimální protipříklad některou z těchto konfigurací obsahoval. Tím ale dokázali, že žádný minimální protipříklad existovat nemůže a věta tedy platí **:)**.

Snad nám prominеš, že Ti žádný z těchto důkazů neukážeme, ale na to bychom potřebovali vybudovat daleko rozsáhlejší teorii, než je pro seriál vhodné. Místo toho ukážeme důkaz mírně slabší věty.

Věta 15. (O pěti barvách) *Každý rovinný graf je 5-obarvitelný.*

Tuto větu vlastně dostaneme jako důsledek věty následující.

Věta 16. (Thomassen) *Každý rovinný graf je 5-vybíravý.*

Důkaz. Mějme rovinné nakreslení grafu G, které doplníme na skorotriangulaci.[22] Navíc si označme vrcholy na vnější kružnici postupně $v_1, \ldots, v_k$. Indukcí dle počtu vrcholů ukážeme, že G je B-obarvitelný, kdykoliv jsou splněny následující podmínky:

(1) $|B(v_1)| = |B(v_2)| = 1$ a $B(v_1) \cap B(v_2) = \emptyset$,

(2) $|B(v)| = 3$ pro každý vrchol $v = v_3, \ldots, v_k$,

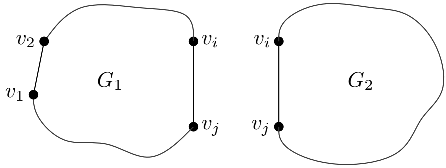
(3) $|B(v)| = 5$ pro všechny zbylé vrcholy v.

V případě nejvýše tří vrcholů musejí nutně všechny sousedit s vnější stěnou a pro každý máme dostatek možností na obarvení. Předpokládejme tedy, že vrcholy jsou alespoň čtyři.

1. Pokud existuje „tětiva" vnější kružnice (tedy hrana $\{v_i, v_j\}$ pro v_i a v_j nesousedící na kružnici), můžeme graf G podle této hrany rozdělit, čímž dostaneme dva menší grafy G_1, G_2. Právě jeden z nich obsahuje hranu $\{v_1, v_2\}$, ten označme G_1.

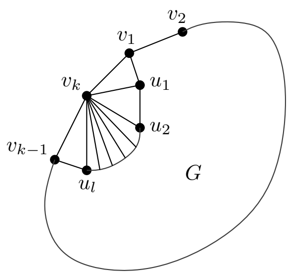
[21] Nejspíš tomu přispěl i fakt, že je natolik komplikovaný, že celý důkaz přečetlo a pochopilo poměrně málo lidí **:)**.

[22] Toto určitě udělat můžeme, protože každé obarvení této skorotriangulace je také obarvením původního grafu.



Snadno nahlédneme, že graf G_1 splňuje všechny tři podmínky, a proto existuje nějaké jeho B-obarvení b. Podobně je tomu u grafu G_2, tam ale není splněna podmínka (1), což snadno napravíme nastavením $B(v_i) = \big\{b(v_i)\big\}$ a $B(v_j) = \big\{b(v_j)\big\}$. Indukce nám pak už i pro graf G_2 zajistí takové B-obarvení, které se bude s obarvením G_1 shodovat na jejich společných vrcholech. Spolu tedy dají platné B-obarvení grafu G.

2. Nechť tedy vnější kružnice žádnou tětivu nemá. Podívejme se na sousedství vrcholu v_k – tvoří ho popořadě vrcholy $v_1, u_1, \ldots, u_l, v_{k-1}$. Protože jsme vycházeli ze skorotriangulace, všechny hrany $\{v_1, u_1\}, \{u_1, u_2\}, \ldots, \{u_{l-1}, u_l\}, \{u_l, v_{k-1}\}$ existují. Navíc žádný z vrcholů u_i nemůže ležet na vnější kružnici, jinak bychom dostali tětivu.



Označme $X = B(v_k) \setminus B(v_1)$, případně, pokud $|X| = 3$, jednu libovolnou barvu z X odstraňme. Když nyní odebereme z množin $B(u_i)$ barvy z X (a případně ještě nějaké, aby zbyly pouze tři), splníme pro graf $G - v_k$ všechny tři podmínky a indukce nám už zaručí existenci B-obarvení b. Musíme ale ještě dobarvit vynechaný vrchol v_k. Tady nám pomůže způsob, jak jsme upravili množiny $B(u_i)$ – všechny jsou disjunktní s X, stejně tak barva vrcholu v_1 v X není, proto jediný soused potenciálně nabarvený barvou z X je v_{k-1}. V X máme ale barvičky dvě, proto vrchol v_k určitě obarvit umíme. □

Systém různých reprezentantů

Nyní na chvilku opustíme teorii grafů a popovídáme si o zajímavém praktickém problému. Představ si, že máš systém několika množin[23] a chceš z každé množiny vybrat jeden prvek tak, aby vybrané prvky byly navzájem různé. Výše slíbeným problémem pak je, jak rozhodnout, jestli je možné takovýto výběr provést. Nejprve si uvědomme, že někdy prvky vybrat lze, například ze systému $\{a\}, \{b\}$, a někdy ne, například ze systému $\{a\}, \{a\}$. Zabývat se touto otázkou tedy je nějakým způsobem zajímavé.

[23] *Systém množin* je něco jako množina množin, abychom se vyhnuli zmateným výrazům typu „množina všech podmnožin množiny přirozených čísel“. Navíc u systémů budeme povolovat i možné opakování jejich prvků, takže například $\big\{\{a\}, \{a\}\big\}$ je dvouprvkový systém a budeme ho zkráceně zapisovat jako $\{a\}, \{a\}$.

Ač se to na první pohled možná nezdá, tento problém skutečně je praktický. Můžeme ho totiž přeformulovat například tak, že máme několik skupin lidí (třeba organizátory PraSete, přátele Meryl Streepové na Facebooku a sdružení zedníků v obci Petřvald) a chceme z každé skupiny vybrat jednoho zástupce, přičemž každý člověk smí zastupovat jen jednu skupinu. (Jinými slovy, vybraní lidé z různých skupin musejí být různí.)

Z každé množiny tedy vždy vybíráme jednoho zástupce neboli reprezentanta, a proto se množině vybraných prvků říká systém různých reprezentantů, někdy též zkráceně SRR. Pořádně definujeme SRR takto:

Definice 17. Nechť $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ je nějaký systém konečných podmnožin množiny M. *Systémem různých reprezentantů* systému $\mathcal{S}$ potom budeme rozumět kteroukoliv množinu $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ navzájem různých prvků množiny M takových, že x_i náleží S_i pro všechna $1 \leq i \leq m$.

Nyní se můžeme vrátit k problému, jestli daný systém množin má SRR. Poměrně snadno lze nahlédnout, že pokud pro systém $\mathcal{S}$ existuje systém různých reprezentantů, pak pro všechny možné k-tice množin z $\mathcal{S}$ musí platit, že počet prvků jejich sjednocení je roven alespoň k.[24] Pokud totiž $\mathcal{S}$ má SRR, pak z definice SRR pro libovolnou k-tici množin z $\mathcal{S}$ existuje k „jejich reprezentantů“. Získali jsme tedy nutnou podmínku existence SRR pro systém $\mathcal{S}$. Často se jí říká Hallova podmínka pro systém $\mathcal{S}$. Zajímavé je, že jde dokonce o podmínku postačující, jak říká tzv. Hallova věta.

Věta 18. (Hallova) *Systém množin $\mathcal{S}$ má SRR právě tehdy, když splňuje Hallovu podmínku, tedy když pro každý jeho podsystém $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ platí $|\bigcup \mathcal{T}| \geq |\mathcal{T}|$.*

Důkaz. Jednu implikaci už jsme dokázali v odstavci výše. Zbývá ukázat, že Hallova podmínka je postačující. Důkaz této implikace je poměrně pracný, ale nevyžaduje žádné speciální znalosti, tak se do něj rovnou pustíme. Budeme postupovat indukcí podle počtu množin v systému $\mathcal{S}$. Tento počet si pro jednoduchost označíme k. Pro $k = 0$ a $k = 1$ implikace zjevně platí.

V indukčním kroku budeme ukazovat platnost implikace pro systém alespoň dvou množin, pokud víme, že implikace platí pro všechny „menší“ systémy, tedy systémy s menším počtem množin. Celou situaci si rozdělíme na dva případy.

1. Pro všechny vlastní podsystémy[25] $\mathcal{S}$ platí Hallova podmínka dokonce s ostrou nerovností. Tedy pokud $\emptyset \subsetneq \mathcal{T} \subsetneq \mathcal{S}$, pak $|\bigcup \mathcal{T}| > |\mathcal{T}|$ neboli $|\bigcup \mathcal{T}| \geq |\mathcal{T}| + 1$. Pak si vybereme libovolnou množinu $A \in \mathcal{S}$ a z ní její libovolný prvek a. (To, že žádná množina v $\mathcal{S}$ není prázdná, a tím pádem z ní lze nějaký prvek vybrat, si můžeš rozmyslet jako jednoduché cvičení.) Uvažme systém $\mathcal{S}'$, který z $\mathcal{S}$ vznikne odebráním množiny A a prvku a z každé zbylé množiny. Nyní ověříme, že pro systém $\mathcal{S}'$ platí Hallova podmínka. Víme totiž, že v $\mathcal{S}'$ je méně množin než v $\mathcal{S}$, takže z indukčního předpokladu bychom pak věděli, že pro $\mathcal{S}'$ existuje SRR. Zjevně a nenáleží do tohoto SRR, takže přidáním a bychom snadno získali SRR systému $\mathcal{S}$.

   Libovolný podsystém $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{S}'$ lze vyjádřit jako $\big\{S_1 \setminus \{a\}, S_2 \setminus \{a\}, \ldots, S_m \setminus \{a\}\big\}$, kde jednotlivé S_i jsou prvky $\mathcal{S}$. Proto z našeho dodatečného předpokladu platí

$$|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m| \geq m + 1.$$

[24] Tuto podmínku můžeme ekvivalentně přeformulovat tak, že pro každý jeho podsystém $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ je počet prvků, které se vyskytují alespoň v jedné množině z $\mathcal{T}$, větší nebo roven počtu množin v $\mathcal{T}$. Pro zkrácení budeme tuto podmínku zapisovat jako $|\bigcup \mathcal{T}| \geq |\mathcal{T}|$.

[25] *Podsystémem* systému $\mathcal{S}$ nazveme systém, ve kterém se vyskytuje každý jeho prvek nejvýše tolikrát, kolikrát se vyskytuje v systému $\mathcal{S}$. *Vlastním podsystémem* pak rozumíme podsystém, který není prázdný a nerovná se systému $\mathcal{S}$.

Přitom

$$\left|\big(S_1 \setminus \{a\}\big) \cup \big(S_2 \setminus \{a\}\big) \cup \dots \cup \big(S_m \setminus \{a\}\big)\right| = \left|(S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m) \setminus \{a\}\right| \geq m,$$

takže pro $\mathcal{S}'$ Hallova podmínka platí.

2. Existuje vlastní podsystém $\emptyset \subsetneq \mathcal{T} \subsetneq \mathcal{S}$ takový, že $|\bigcup \mathcal{T}| = |\mathcal{T}|$. Pro tento systém zjevně platí Hallova podmínka – nerovnost platí pro všechny podsystémy $\mathcal{S}$, takže platí i pro všechny podsystémy $\mathcal{T}$. Z $\mathcal{T}$ tedy lze vybrat SRR o velikosti $|\mathcal{T}|$. Ze zbylých $|\mathcal{S}| - |\mathcal{T}|$ množin bychom chtěli vybrat dalších $|\mathcal{S}|-|\mathcal{T}|$ prvků tak, abychom získali SRR pro $\mathcal{S}$. To uděláme podobně jako v minulém případě – uvážíme $\mathcal{S}'$, který z $\mathcal{S}$ vznikne odebráním všech množin z $\mathcal{T}$ a následným odebráním všech jejich prvků ze zbylých množin. Dále ukážeme, že $\mathcal{S}'$ má SRR.

   Analogicky jako v minulém případě můžeme uvážit libovolný podsystém $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{S}'$ a vyjádřit jej jako $\{S_1 \setminus (\bigcup \mathcal{T}), S_2 \setminus (\bigcup \mathcal{T}), \dots, S_m \setminus (\bigcup \mathcal{T})\}$, kde jednotlivé S_i jsou prvky $\mathcal{S}$. Pak můžeme vyjádřit počet jeho prvků následovně:[26]

$$\begin{aligned}\left|\bigcup \mathcal{T}'\right| &= \left|\Big(S_1 \setminus \Big(\bigcup \mathcal{T}\Big)\Big) \cup \Big(S_2 \setminus \Big(\bigcup \mathcal{T}\Big)\Big) \cup \dots \cup \Big(S_m \setminus \Big(\bigcup \mathcal{T}\Big)\Big)\right| \\ &= \left|(S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m) \setminus \Big(\bigcup \mathcal{T}\Big)\right| \\ &= \left|(S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m) \cup \Big(\bigcup \mathcal{T}\Big)\right| - \left|\bigcup \mathcal{T}\right|.\end{aligned}$$

   Přitom první množina („před znaménkem mínus“) je sjednocením $m+|\mathcal{T}|$ množin z $\mathcal{S}$, pro který platí Hallova podmínka, a tedy počet jejích prvků je alespoň $m + |\mathcal{T}|$. Z dodatečného předpokladu ale platí $|\bigcup \mathcal{T}| = |\mathcal{T}|$, takže počet prvků v $\bigcup \mathcal{T}'$ je větší nebo roven $m + |\mathcal{T}| - |\mathcal{T}| = m$, a tím pádem $\mathcal{S}'$ splňuje Hallovu podmínku. □

Poznámka. Další možnou aplikací SRR a Hallovy věty je řešení následujícího problému: Máme několik žen a několik mužů. Ženy jsou vybíravé a každá má seznam mužů, které je ochotna si vzít. Muži vybíraví nejsou a s radostí se ožení s každou dámou, které se líbí. Za jakých podmínek jde všechny ženy provdat tak, aby všechny byly šťastné? (To, že se skutečně jedná jen o přeformulování problému, který řeší Hallova věta, Ti opět necháme jako cvičení.) Díky této aplikaci se větě v angličtině říká *Hall's marriage theorem* (Hallova sňatková věta) a Hallově podmínce *Marriage condition* (sňatková podmínka).

A proč si o Hallově větě vůbec povídáme v seriálu o grafech? Protože ji lze ekvivalentně formulovat jako větu z teorie grafů.

Věta 19. (Hallova, grafová varianta) *Nechť $G = (A \cup B, E)$ je bipartitní graf, jehož všechny hrany jsou tvaru $\{a, b\}$, kde $a \in A$ a $b \in B$. Dále předpokládejme, že pro každou podmnožinu vrcholů A (označme ji P_i) platí, že počet vrcholů, které jsou hranou spojeny alespoň s jedním z vrcholů z P_i (tuto množinu označme $N(P_i)$), je větší nebo roven počtu vrcholů v P_i. Jinak řečeno, pro všechna P_i platí $|N(P_i)| \geq |P_i|$. Pak lze z E vybrat několik hran tak, že každý z vrcholů z A bude jednou z těchto hran spojen s jedním vrcholem v B a navíc budou tyto body různé.*[27]

Důkaz. Víme-li, že platí kombinatorická varianta Hallovy věty, můžeme pro libovolný graf G splňující podmínky grafové varianty uvážit systém $|A|$ množin, které pojmenujeme stejně jako vrcholy v A a pro každé $x \in A$ bude množina x definována jako $N(\{x\})$. Pak je pro

[26] Při poslední rovnosti využíváme toho, že pro libovolné dvě množiny M, N platí $|M \setminus N| = |M \cup N| - |N|$.

[27] Tomu říkáme, že v G existuje párování pokrývající vrcholy z A.

vzniklý systém množin splněna Hallova podmínka, a tedy existuje SRR. Z E tudíž můžeme vybrat několik hran, z nichž každá bude spojovat vrchol x s reprezentantem množiny x. Tím získáme hledané párování. Vidíme tedy, že z platnosti kombinatorické varianty vyplývá platnost té grafové. Protože kombinatorickou verzi už dokázanou máme, platí i grafová varianta. □

Naopak pokud platí grafová verze a máme systém množin $\mathcal{S}$ splňující podmínky kombinatorické verze, můžeme uvážit graf $G = (A \cup B, E)$, $A = \mathcal{S}$ (vrcholy z A mají stejná jména jako množiny v $\mathcal{S}$) a B jsou prvky všech množin z $\mathcal{S}$. Navíc hranu nakreslíme jen mezi S_i a vrcholy y z B, pokud $y \in S_i$. Graf G pak splňuje podmínky grafové varianty Hallovy věty, a tedy v něm existuje párování pokrývající vrcholy z A. Toto párování nám přitom vybírá SRR pro $\mathcal{S}$, takže z platnosti grafové varianty plyne platnost kombinatorické varianty, a tím pádem jsou obě věty ekvivalentní.[28]

V textu jsme použili pojem párování. Abychom tomuto slovu dali význam, uvedeme si jednu definici.

Definice 20. *Párováním* v grafu G rozumíme podmnožinu jeho hran takovou, že žádné dvě hrany z této podmnožiny nemají společný vrchol. *Perfektní párování* v grafu je takové párování, které pokrývá všechny vrcholy.

Párování si tedy můžeme představit tak, že každý vrchol buď nespojuje s žádným jiným, nebo jej spojí právě s jedním vrcholem. (Čímž vrcholy „popáruje“.) Perfektní párování pak „popáruje“ všechny vrcholy. Vybaven(a) touto znalostí se můžeš vrhnout na následující cvičení:

Cvičení 21. Nechť graf G splňuje podmínky Hallovy věty a navíc $|A| = |B|$. Ukaž, že potom v G existuje perfektní párování.

A abychom si ukázali, že Hallovu větu lze uplatnit i tam, kde bychom to na první pohled nečekali, ukážeme si, že každý latinský obdélník se dá doplnit na latinský čtverec. Předtím si ale musíme oba pojmy definovat.

Definice 22. *Latinským čtvercem* rozumíme čtvercovou mřížku $n \times n$ vyplněnou čísly $1, \ldots, n$ tak, že v každém řádku i sloupci je každé číslo použito právě jednou. *Latinským obdélníkem* rozumíme mřížku $k \times n$, $k \leq n$ (budeme se na ni koukat tak, že má k řádků a n sloupců) vyplněnou čísly $1, \ldots, n$ tak, že v každém řádku i sloupci je každé číslo použito nejvýše jednou a do každého políčka je vepsáno právě jedno číslo.

Rovnou uvádíme jeden z mnoha latinských čtverců 5×5.

2	4	5	3	1
5	1	2	4	3
1	3	4	2	5
3	2	1	5	4
4	5	3	1	2

Tvrzení 23. *Každý latinský obdélník se dá doplnit na latinský čtverec.*

Důkaz. Ukažme, že každý latinský obdélník $k \times n$, $k < n$ lze doplnit na latinský obdélník $(k + 1) \times n$. To k důkazu stačí, protože pak můžeme doplňovat řádky postupně, až dostaneme latinský čtverec $n \times n$. K důkazu využijeme grafovou variantu Hallovy věty.

[28] Přesněji (pro hnidopichy) – byly by ekvivalentní, kdybychom grafovou variantu formulovali jako ekvivalenci. My jsme ji pro jednoduchost vyslovili jen jako implikaci, ale určitě si rozmyslíš, že i její opačná implikace je ekvivalentní s příslušnou implikací kombinatorické verze.

Mějme latinský obdélník $k \times n$, $k < n$. Následným způsobem si definujeme graf $G = (V, E)$. Množina vrcholů bude $V = A \cup B$, kde $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ představuje množinu sloupců našeho obdélníku a $B = \{1, 2, \dots, n\}$. Hranu nakreslíme mezi vrcholy a_i a j právě tehdy, když j není obsaženo v i-tém sloupci. Jiné hrany do grafu nepřidáme.

Z definice vyplývá, že stupeň vrcholu a_i je počet čísel, která se nevyskytují v i-tém sloupci. Pro všechna i je tedy tento stupeň $n - k$. Stupeň vrcholu j je potom počet sloupců, ve kterých není j obsaženo. Avšak j je obsaženo v každém z k řádků právě jednou a v žádném sloupci se nenachází dvakrát. Je tedy obsaženo v k sloupcích, a proto je stupeň j pro všechna j také roven $n - k$.

Máme tedy bipartitní graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň $n - k$. Ukažme, že G splňuje podmínky Hallovy věty. Vezměme libovolnou m-prvkovou podmnožinu A a označme ji X. Pak z X vychází přesně $m(n - k)$ hran, které vedou do $N(X)$. Každý vrchol v $N(x)$ má ale stupeň $n - k$, takže může z těchto hran „přijmout“ nejvýše $n - k$. Proto musí být v $N(X)$ alespoň m vrcholů, čímž máme splněny podmínky Hallovy věty.

Navíc triviálně $|A| = |B|$, tudíž existuje perfektní párování grafu G. Nyní můžeme doplnit další řádek obdélníku tak, že na jeho i-tou pozici umístíme číslo, které je v grafu G spárované s a_i. Vzniklý obdélník pak zůstane latinský. $\square$

Ještě můžeme prozradit, že pokud nalezneme dostatek latinských čtverců splňujících podmínku ortogonality[29], umíme z nich nepřímo vytvořit kód odolný vůči několika málo chybám při přenosu. Tímto bychom se ale příliš vzdálili od grafů, proto se jimi víc zabývat nebudeme.

K závěru

Těmito řádky se s Tebou rozloučíme. Těší nás, že jsme Tě neztratili někde v průběhu a že ses zdárně dočetl(a) až sem.

Podobně jako v prvním dílu, i teď nabízíme řešení cvičení pro kontrolu:

4. $\chi(K_n) = n$, $\chi'(K_n) = n$ pro liché n a $n - 1$ pro sudé n; $\chi(C_n) = \chi'(C_n) = 3$ pro liché n a 2 pro sudé n; $\chi(P_n) = \chi'(P_n) = 2$; $\chi(Q_n) = 2$, $\chi'(Q_n) = n$.

6. Jsou to právě kružnice.

Věříme, že se Ti tento díl líbil, a přejeme hodně štěstí v soutěžní sérii. Doufáme v opětovné setkání nad závěrečným dílem, kde se podíváme na mladý, ale hezký svět průnikových grafů.

[29] Volně řečeno: dva čtverce jsou *ortogonální*, pokud „průchodem“ všech souřadnic čtverce a zapsáním dvojic hodnot z obou čtverců na daném místě dostaneme všech n^2 možných dvojic.

2. podzimní série – Kružnice

Výsledková listina

1.–4.	*Eduard*	*Batmendijn*	4	CGStĽubovňa	– – – 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–4.	*Jan*	*Soukup*	4	G Klatovy	3 – – 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–4.	*Radovan*	*Švarc*	4	G ČTřebová	3 – – 5 5 5 5 5	$25 + i$	**25,00**
1.–4.	*Pavel*	*Turek*	2	GTomkovaOL	3 3 3 5 5 5 5 5	25	**25,00**
5.	*Filip*	*Bialas*	2	GOpatovPH	– 3 – 5 5 5 5 4	24	**24,31**
6.	*Danil*	*Koževnikov*	1	GKepleraPH	3 3 – 5 5 5 5 –	23	**24,27**
7.	*Adam*	*Mendl*	0	GCoubTábor	3 3 3 4 5 – 5 –	20	**23,51**
8.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	1	GZborovPH	3 3 3 5 5 1 5 0	21	**23,35**
9.	*Lenka*	*Kopfová*	0	CZŠSL HnM	3 3 3 5 5 – – –	19	**23,11**
10.	*Nina*	*Hronkovičová*	4	G Partizan	– 3 3 5 5 5 5 3	23	**23,00**
11.–13.	*Denisa*	*Chytilová*	1	GJŠkodyPŘ	3 3 3 5 5 – – –	19	**22,43**
11.–13.	*Martin*	*Strnad*	1	G Dobříš	3 3 3 5 5 – – –	19	**22,43**
11.–13.	*Jiří*	*Vala*	1	G Mikulov	3 3 3 5 5 – – –	19	**22,43**
14.–15.	*Zuzana*	*Johanovská*	3	GOpatovPH	3 3 – 5 5 1 5 1	21	**22,17**
14.–15.	*Martin*	*Števko*	0	GAlejKošic	3 3 – 5 5 1 – –	17	**22,17**
16.	*Ondřej*	*Knopp*	1	G Třeboň	– 3 – 5 5 – 5 0	18	**21,88**
17.–19.	*Marie*	*Dohnalová*	2	GNadKavaPH	3 3 3 5 5 – – –	19	**21,52**
17.–19.	*Lucie*	*Hronová*	2	GJarošeBO	3 3 3 5 5 – – –	19	**21,52**
17.–19.	*Michal*	*Töpfer*	2	GJPekařeMB	3 3 3 – 5 – 5 0	19	**21,52**
20.	*Radek*	*Olšák*	0	GMensaPH	3 3 – – 5 – 5 –	16	**21,48**
21.	*Jan*	*Škvára*	4	GJŠkodyPŘ	3 3 – 5 5 4 5 –	$22 - 2i$	**21,46**
22.	*Václav*	*Steinhauser*	1	ZŠVranéNVl	3 3 3 5 5 1 – –	19	**21,40**
23.	*Vojtěch*	*Lukeš*	3	G LPika PL	3 3 – 5 5 – 5 0	$21 - i$	**21,35**
24.–26.	*Anna*	*Gajdová*	4	G ValMez	3 3 – 5 5 – 5 –	21	**21,00**
24.–26.	*Martin*	*Vrabec*	4	GMRŠKošice	3 3 3 5 5 2 5 –	21	**21,00**
24.–26.	*Radek*	*Zikmund*	4	G HavlBrod	3 3 3 5 5 – 5 1	21	**21,00**
27.	*Tomáš*	*Konečný*	2	GJirsíkaČB	3 3 3 5 5 – – –	19	**20,98**
28.–30.	*Tomáš*	*Domes*	2	MendelG OP	3 3 2 – 5 – 5 –	18	**20,84**
28.–30.	*Ondřej*	*Lomický*	2	G Plasy	3 3 2 – 5 – 5 –	18	**20,84**
28.–30.	*Jakub*	*Löwit*	3	GČeskoliPH	3 3 3 5 5 – 5 4	22	**20,84**
31.–32.	*Adéla*	*Kostelecká*	3	GLesníZlín	3 3 3 5 5 – – –	19	**20,63**
31.–32.	*Lucien*	*Šíma*	3	PORG PH	3 3 3 5 5 – – –	19	**20,63**
33.	*Vojtěch*	*Lanz*	1	GZborovPH	3 3 3 3 5 1 – –	17	**20,58**
34.	*Zuzana*	*Svobodová*	3	G FrýdlNOs	3 3 3 5 5 – 5 –	21	**20,46**
35.	*Anh*	*Le Hoang*	3	GJarošeBO	3 3 3 5 5 – – –	19	**20,14**
36.	*Karolína*	*Kuchyňová*	4	GMLerchaBO	3 3 3 5 5 – 5 4	22	**20,11**
37.–38.	*Jan*	*Gocník*	3	GJŠkodyPŘ	3 3 3 5 4 – – –	18	**19,83**
37.–38.	*Jana*	*Řežábková*	3	PORG PH	3 3 2 1 5 – 5 –	18	**19,83**
39.	*Markéta*	*Horová*	3	GMikul23PL	3 3 3 5 5 – – –	19	**19,74**

40.	*Jaromír*	*Mielec*	2	GVolgogrOS	3 3 3 5 5 – – –	19	**19,73**
41.	*Jan*	*Jurka*	4	GMLerchaBO	3 3 3 5 5 – 5 –	21	**19,62**
42.	*Vojtěch*	*Suchánek*	4	GJarošeBO	3 3 3 5 5 – 5 –	$21 - i$	**19,39**
43.	*Veronika*	*Hladíková*	2	GMikul23PL	– 3 3 5 4 – 1 –	16	**19,37**
44.	*Daniel*	*Pišťák*	3	GZborovPH	3 3 – 5 5 – 5 –	21	**19,33**
45.–48.	*Petr*	*Gebauer*	1	G Mělník	3 2 3 – 5 1 – –	14	**19,28**
45.–48.	*Pavel*	*Hudec*	1	GJarkovPH	3 3 – 3 5 – – –	14	**19,28**
45.–48.	*Šimon*	*Karch*	1	G KomHavíř	3 – – – 5 1 5 0	14	**19,28**
45.–48.	*Jaroslav*	*Paidar*	1	SPŠMasarLI	1 3 – – 5 – 5 –	14	**19,28**
49.	*Martin*	*Surma*	4	GJWolkraPV	3 3 3 5 5 – 5 –	21	**19,09**
50.	*Marian*	*Poljak*	3	GJŠkodyPŘ	3 3 2 5 5 – – –	18	**19,05**
51.	*Marek*	*Černý*	4	G Chrudim	3 3 3 5 5 – – –	19	**18,87**
52.	*Viktor*	*Němeček*	4	GJMasar JI	3 3 – 5 5 – 5 3	21	**18,86**
53.–54.	*Matěj*	*Konečný*	4	G Jírov ČB	3 3 3 5 5 2 5 –	21	**18,67**
53.–54.	*Hedvika*	*Ranošová*	1	GBudějovPH	3 3 3 – 5 – – –	14	**18,67**
55.	*Jan*	*Pekař*	1	GJPekařeMB	3 3 1 0 5 1 0 –	13	**18,52**
56.	*Ondřej*	*Darmovzal*	4	GJarošeBO	3 3 3 5 5 – – –	19	**18,27**
57.	*Daniel*	*Kopf*	3	SlezkéG OP	3 3 – 5 5 – – –	16	**18,15**
58.	*Kateřina*	*Nová*	2	G Vimperk	3 3 3 – 5 1 – –	15	**18,06**
59.–61.	*Samuel*	*Karaba*	1	SŠNvh	3 3 0 0 5 1 0 –	12	**17,70**
59.–61.	*Kamila*	*Kyzlíková*	1	GZborovPH	3 3 2 – 4 – 0 –	12	**17,70**
59.–61.	*Jan*	*Šorm*	3	GJarošeBO	3 3 3 5 5 – – –	19	**17,70**
62.	*Václav*	*Rozhoň*	4	GJirsíkaČB	3 3 3 5 5 – – –	19	**17,10**
63.–66.	*Soňa*	*Burešová*	1	GHeyrovPH	3 3 – – 5 – – –	11	**16,83**
63.–66.	*Vladimír*	*Lukačko*	1	GVarŽilina	3 3 0 – 5 – – –	11	**16,83**
63.–66.	*Jiří*	*Nábělek*	1	G Bílovec	3 3 – – 5 – – –	11	**16,83**
63.–66.	*Viktor*	*Szabo*	1	GJHroncaBA	3 3 – – 5 – – 0	11	**16,83**
67.	*Štěpán*	*Procházka*	4	GSRandyJN	3 1 3 – 5 – 5 –	17	**16,45**
68.	*Daniel*	*Bárta*	0	GChodoviPH	3 0 1 0 5 0 – –	9	**16,42**
69.	*Anh Minh*	*Tran*	3	GJarošeBO	3 3 3 – 5 – – 0	14	**16,36**
70.–73.	*Aleš*	*Krčil*	2	G Humpolec	3 3 3 – 3 – 0 0	12	**16,00**
70.–73.	*Dominika*	*Levická*	4	GMRŠKošice	1 3 2 1 5 – 5 –	16	**16,00**
70.–73.	*Pavel*	*Myšička*	4	G Čáslav	– – – 5 5 1 5 0	16	**16,00**
70.–73.	*Zuzana*	*Urbanová*	2	GUBalvanJN	3 3 1 – 5 – 0 –	12	**16,00**
74.	*Vít*	*Kalisz*	3	FSG Pirna	3 3 – – 5 0 2 1	14	**15,93**
75.	*Štefan*	*Hollán*	1	G Bytča	3 3 3 – 1 – – –	10	**15,89**
76.	*Michaela*	*Brabcová*	3	G Jírov ČB	3 3 3 – 5 – – –	14	**15,76**
77.	*Marián*	*Poppr*	4	GJNerudyPH	3 3 3 1 5 1 5 3	19	**15,61**
78.	*Tomáš*	*Terem*	3	GTajBanBys	3 – – 5 5 – – –	13	**15,43**
79.	*Tomáš*	*Kuzma*	3	GJHroncaBA	3 3 3 – 5 – – –	14	**15,32**
80.	*Katarína*	*Krajčiová*	4	GAlejKošic	3 3 3 5 5 – – –	19	**15,15**
81.–83.	*Michal*	*Bubeník*	2	BiskG Brno	3 3 – 0 5 – 0 –	11	**15,05**
81.–83.	*Jozef*	*Burkuš*	2	G Rožňava	3 3 – 0 5 0 0 –	11	**15,05**
81.–83.	*Ondřej*	*Svoboda*	2	GJarošeBO	3 3 – – 5 – – –	11	**15,05**
84.	*Pavel*	*Šklíba*	2	GDašickáPA	3 3 – – 5 – 0 –	$11 - i$	**14,79**
85.	*Dominik*	*Krasula*	2	G Krnov	3 3 2 – 5 – – –	13	**14,52**
86.	*Pavla*	*Nováková*	3	GJarošeBO	3 3 1 – 5 – – –	12	**14,47**
87.	*Peter*	*Macko*	0	ŠpMNDaG BA	3 3 1 – – – – –	7	**14,27**
88.	*Leoš*	*Smetana*	2	G Jaroměř	– 3 3 – 4 – – –	10	**14,05**
89.	*Alena*	*Zahradníčková*	4	GKřenováBO	3 3 3 – 5 – – –	14	**14,00**
90.–93.	*Nodari*	*Gogatishvili*	1	GZborovPH	3 – 0 – 5 – – –	8	**13,81**

90.–93.	*Matej*	*Hockicko*	1	SSOŠTA PP	0 3 0 – 5 – 0 –	8	**13,81**
90.–93.	*Barbora*	*Mouleová*	1	G Plasy	3 – – – 5 – – –	8	**13,81**
90.–93.	*Kristína*	*Szabová*	1	GVarŽilina	– 3 – – 5 – – –	8	**13,81**
94.	*Jakub*	*Hledík*	4	GSŘMRSkuteč	3 3 – 5 5 – – –	16	**13,78**
95.–97.	*Noemk*	*Kuželová*	3	GBalbínaHK	3 3 – 0 5 0 – 0	11	**13,47**
95.–97.	*Zdeněk*	*Lukeš*	3	GNeumannŽR	3 3 – – 5 – 0 0	11	**13,47**
95.–97.	*Václav*	*Málek*	3	G Chotěboř	3 3 – – 5 – – –	11	**13,47**
98.–99.	*Sára*	*Elichová*	0	GKepleraPH	3 3 – – – – – –	6	**13,03**
98.–99.	*Martin*	*Hubata*	0	GMikul23PL	3 3 – – – – – –	6	**13,03**
100.–101.	*Eliška*	*Cejnarová*	1	G Jaroměř	3 3 – 0 1 – 0 –	7	**12,64**
100.–101.	*Filip*	*Chudoba*	1	PORG PH	3 3 0 – 1 – – –	7	**12,64**
102.	*Zuzana*	*Tréglová*	2	G Žatec	3 – 1 – 5 – – –	9	**12,46**
103.	*Stano*	*Šípka*	3	GKukučPopr	0 3 2 – 5 – – –	10	**12,45**
104.	*Markéta*	*Calábková*	4	GJŠkodyPŘ	3 – 3 – 5 – – 4	15	**12,14**
105.–106.	*Lukáš*	*Fruněk*	2	GLesníZlín	3 – – 0 5 – 0 –	8	**11,89**
105.–106.	*Marek*	*Malý*	2	G Neratov	3 3 0 – 1 – 1 –	8	**11,89**
107.	*Michaela*	*Jakešová*	3	GJarošeBO	3 3 3 – – – – –	9	**11,39**
108.–109.	*Lucia*	*Klasová*	1	G Gröss BA	3 3 – – – – – –	6	**11,38**
108.–109.	*Matúš*	*Varhaník*	1	G Bytča	3 3 0 – 0 – – –	6	**11,38**
110.	*Jakub*	*Matěna*	3	GČeskoliPH	3 3 3 – – – – –	9	**11,22**
111.	*Barbora*	*Sedláková*	4	GKonštanPV	3 3 0 0 5 – – –	11	**11,00**
112.	*Ondřej*	*Zeman*	4	G Lovosice	3 3 0 5 – – – –	11	**10,64**
113.	*Petr*	*Jakubčík*	1	PORG PH	3 3 – – – – – 0	6	**10,31**
114.–117.	*Jan*	*Dittrich*	3	GJarošeBO	3 3 2 – – – – –	8	**10,30**
114.–117.	*Zuzana*	*Frankovská*	3	GJHroncaBA	– 3 – – 5 – – –	8	**10,30**
114.–117.	*Marek*	*Jaroš*	3	GJM Gal	– 3 – – 5 – – –	8	**10,30**
114.–117.	*Lukáš*	*Zíb*	3	GPísnickPH	3 0 0 – 5 0 – –	8	**10,30**
118.	*Timotej*	*Šujan*	3	GJarošeBO	3 – – – – 5 – –	8	**10,22**
119.	*František*	*Couf*	2	GZborovPH	– – – – – – 5 5	$10 + i$	**9,82**
120.–123.	*Richard*	*Hladík*	2	GaOA MarLáz	3 3 – – – – – –	6	**9,48**
120.–123.	*Soňa*	*Lisníková*	2	GBezručeFM	3 3 – – – 0 0 0	6	**9,48**
120.–123.	*David*	*Ucháč*	2	EDUCA PAR	3 3 – – – – – –	6	**9,48**
120.–123.	*Šárka*	*Vavrečková*	2	GBezručeFM	3 3 – – – – – –	6	**9,48**
124.	*Michal*	*Porubsky*	3	GCyMeNitra	1 1 0 – 5 – – –	7	**9,17**
125.	*Jakub*	*Ševčík*	3	GKukučPopr	– 3 3 – 1 – – –	7	**9,06**
126.	*Lukáš*	*Kubacki*	2	GNadKavaPH	3 3 – – – – – –	6	**8,93**
127.–128.	*Daniel*	*Magula*	1	PiarGNitra	3 0 0 0 1 – – 0	4	**8,48**
127.–128.	*Veronika*	*Venclová*	1	G Chrudim	3 0 0 – 1 – – –	4	**8,48**
129.–131.	*David*	*Pokorný*	3	G Bučovice	3 3 – – – – – –	6	**8,00**
129.–131.	*Martin*	*Scheubrein*	3	G MasNámTŘ	3 3 0 – – – 0 –	6	**8,00**
129.–131.	*Martin*	*Zahradníček*	4	GŠlapanice	3 – – – 5 – – –	8	**8,00**
132.	*Anežka*	*Michálková*	3	GaSOŠ Telč	3 3 – – – – – –	6	**7,77**
133.	*Jakub*	*Marták*	3	G GolNitra	3 1 0 1 1 0 0 0	6	**7,46**
134.–137.	*Alžběta*	*Neubauerová*	1	GNadKavaPH	3 – – – – 0 – –	3	**6,79**
134.–137.	*Borek*	*Požár*	1	G Rakovník	3 – – – – – – –	3	**6,79**
134.–137.	*Anežka*	*Soukupová*	1	SPŠchemBrno	3 0 0 – 0 – – 0	3	**6,79**
134.–137.	*Iva*	*Švecová*	1	GJMasar JI	– 3 – – – – – –	3	**6,79**
138.	*Jakub*	*Dostál*	2	SlovanG OL	– 3 – – 1 – – –	4	**6,76**
139.–140.	*Miroslav*	*Mareš*	4	GBudějovPH	3 3 – – – – – –	6	**6,00**
139.–140.	*Martin*	*Repčík*	4		3 3 0 – – – – –	6	**6,00**
141.	*Filip*	*Oplt*	2	GBudějovPH	3 – 0 0 – – 0 –	3	**5,27**

142.	*Matěj*	*Coufal*	2	G HavlBrod	3 – – – – – – –	3	**5,19**
143.	*Přemysl*	*Šťastný*	2	G Žamberk	3 – – – – – – –	3	**5,04**
144.–145.	*Jan*	*Bráblík*	3	GJarošeBO	3 – – – – – – –	3	**4,23**
144.–145.	*Pál*	*Somogyi*	3	GIM Šamorín	3 – – – – – – –	3	**4,23**
146.	*Petr*	*Gintar*	3	MendelG OP	3 – – – – 0 – –	3	**4,21**
147.	*Emese*	*Szabó*	4	GZKMJ Gal	– 3 – – – – – –	3	**3,00**
148.	*Tereza*	*Rašková*	4	GTomkovaOL	3 – – – – – – –	3	**2,90**
149.	*Petr*	*Bartoš*	4	OpenGate	1 0 0 0 – – – –	1	**1,00**
150.–151.	*Adam*	*Doubrava*	0	GMasarykKM	– – 0 – – – – –	0	**0,00**
150.–151.	*Daniela*	*Hrbáčová*	1	WichtG OS	– – 0 0 – 0 0 –	0	**0,00**

3. podzimní série – Kongruence

Výsledková listina

1.–4.	*Eduard*	*Batmendijn*	4	CGStĽubovňa	– – – 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–4.	*Filip*	*Bialas*	2	GOpatovPH	– – – 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–4.	*Radovan*	*Švarc*	4	G ČTřebová	– – 3 5 5 5 5 5	$25+i$	**25,00**
1.–4.	*Pavel*	*Turek*	2	GTomkovaOL	3 3 3 5 5 5 5 5	25	**25,00**
5.	*Lenka*	*Kopfová*	0	CZŠSL HnM	3 – 3 5 5 5 – –	21	**23,88**
6.	*Danil*	*Koževnikov*	1	GKepleraPH	3 – 3 5 5 5 1 3	$21+i$	**23,54**
7.	*Jakub*	*Löwit*	3	GČeskoliPH	3 3 3 5 5 5 4 5	$24-i$	**23,18**
8.	*Martin*	*Števko*	0	GAlejKošic	3 1 3 3 5 5 – –	19	**23,11**
9.	*Vojtěch*	*Lanz*	1	GZborovPH	3 3 3 5 5 5 2 –	21	**23,04**
10.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	1	GZborovPH	3 2 3 5 5 4 1 1	20	**22,86**
11.	*Veronika*	*Hladíková*	2	GMikul23PL	3 – 3 5 5 5 – –	21	**22,79**
12.	*Václav*	*Steinhauser*	1	ZŠVranéNVl	3 3 3 5 5 5 – –	21	**22,71**
13.	*Jiří*	*Vala*	1	G Mikulov	3 3 3 – 5 5 – –	19	**22,43**
14.	*Vojtěch*	*Suchánek*	4	GJarošeBO	3 3 3 5 5 5 5 –	23	**22,27**
15.	*Jan*	*Jurka*	4	GMLerchaBO	3 3 3 5 5 5 5 –	23	**22,22**
16.	*Lucien*	*Šíma*	3	PORG PH	3 3 3 5 5 5 – –	21	**22,17**
17.	*Anh*	*Le Hoang*	3	GJarošeBO	3 1 3 5 5 5 1 0	21	**21,83**
18.	*Marian*	*Poljak*	3	GJŠkodyPŘ	3 3 3 5 5 5 – –	21	**21,68**
19.	*Matěj*	*Konečný*	4	G Jírov ČB	3 3 3 5 5 5 5 3	23	**21,63**
20.	*Aleš*	*Krčil*	2	G Humpolec	3 3 3 – 5 5 – –	19	**21,52**
21.	*Adéla*	*Kostelecká*	3	GLesníZlín	3 1 2 5 5 5 – –	20	**21,41**
22.–23.	*Jan*	*Škvára*	4	GJŠkodyPŘ	3 – 3 5 5 5 2 –	21	**21,00**
22.–23.	*Stepan*	*Yakimov*	4		3 3 – 5 5 5 0 –	21	**21,00**
24.	*Daniel*	*Magula*	1	PiarGNitra	3 3 2 – 5 3 – –	16	**20,67**
25.	*Daniel*	*Kopf*	3	SlezkéG OP	3 3 – 3 5 5 – –	19	**20,63**
26.	*Ondřej*	*Darmovzal*	4	GJarošeBO	– 3 3 5 5 5 – –	21	**20,46**
27.–28.	*Adam*	*Doubrava*	0	GMasarykKM	3 – 1 – 5 5 – –	14	**20,44**
27.–28.	*Matěj*	*Hasala*	0	ZŠ Teplice	3 1 – – 5 5 – –	14	**20,44**
29.	*Kateřina*	*Nová*	2	G Vimperk	3 2 3 0 5 5 – –	18	**20,43**
30.–31.	*Jan*	*Gocník*	3	GJŠkodyPŘ	3 3 3 4 5 – – –	18	**19,83**
30.–31.	*Jana*	*Řežábková*	3	PORG PH	3 2 3 1 5 5 – –	18	**19,83**
32.	*Tomáš*	*Konečný*	2	GJirsíkaČB	3 1 3 5 5 – – –	17	**19,44**
33.–34.	*Marie*	*Dohnalová*	2	GNadKavaPH	3 3 3 0 5 2 – –	16	**19,37**
33.–34.	*Richard*	*Hladík*	2	GaOA MarLáz	3 3 – – 5 5 – –	16	**19,37**
35.–37.	*Matej*	*Hockicko*	1	SSOŠTA PP	3 1 – – 5 5 – –	14	**19,28**
35.–37.	*Pavel*	*Hudec*	1	GJarkovPH	3 2 2 – 2 5 – –	14	**19,28**
35.–37.	*Jaroslav*	*Paidar*	1	SPŠMasarLI	2 2 – – 5 5 0 –	14	**19,28**
38.–39.	*Nina*	*Hronkovičová*	4	G Partizan	3 3 3 – 5 5 – –	19	**19,00**
38.–39.	*Zuzana*	*Johanovská*	3	GOpatovPH	3 3 – – 5 5 – 1	17	**19,00**

40.	*Viktor*	*Němeček*	4	GJMasar JI	3 3 – 5 5 5 – –	21	**18,86**
41.	*Vít*	*Kalisz*	3	FSG Pirna	3 1 3 – 5 5 – –	17	**18,65**
42.	*Tomáš*	*Domes*	2	MendelG OP	2 3 3 – 5 2 – –	15	**18,59**
43.	*Ondřej*	*Knopp*	1	G Třeboň	3 2 1 – 5 2 – –	13	**18,52**
44.	*Karolína*	*Kuchyňová*	4	GMLerchaBO	3 3 3 5 5 5 1 1	21 – *i*	**18,30**
45.	*Dominik*	*Krasula*	2	G Krnov	3 1 3 – 5 5 – –	17	**18,28**
46.	*Jan*	*Šorm*	3	GJarošeBO	3 3 3 – 5 5 – –	19	**17,70**
47.	*Ondřej*	*Zeman*	4	G Lovosice	3 3 3 4 5 – – –	18 – *i*	**17,43**
48.	*Radek*	*Olšák*	0	GMensaPH	– – – – 5 5 – –	10	**17,11**
49.	*Václav*	*Rozhoň*	4	GJirsíkaČB	3 3 3 – 5 5 – –	19	**17,10**
50.–52.	*Jozef*	*Burkuš*	2	G Rožňava	2 0 3 – 4 4 – –	13	**16,90**
50.–52.	*Ondřej*	*Lomický*	2	G Plasy	3 1 – – 5 4 – –	13	**16,90**
50.–52.	*Marek*	*Malý*	2	G Neratov	3 2 3 – 5 – – –	13	**16,90**
53.–55.	*Nodari*	*Gogatishvili*	1	GZborovPH	3 – – – 4 4 – –	11	**16,83**
53.–55.	*Samuel*	*Karaba*	1	SŠNvh	3 1 2 – 5 – – –	11	**16,83**
53.–55.	*Kamila*	*Kyzlíková*	1	GZborovPH	3 1 2 – 5 – – –	11	**16,83**
56.	*Petr*	*Jakubčík*	1	PORG PH	3 1 3 5 – – – –	12	**16,78**
57.	*Markéta*	*Calábková*	4	GJŠkodyPŘ	3 3 3 5 5 – – –	19	**16,64**
58.	*Martin*	*Surma*	4	GJWolkraPV	3 3 3 5 5 – – –	19	**16,54**
59.	*Jan*	*Soukup*	4	G Klatovy	– 3 3 5 5 5 2 –	21	**16,52**
60.	*Jakub*	*Ševčík*	3	GKukučPopr	3 1 – – 5 5 – –	14	**16,26**
61.–62.	*Anna*	*Gajdová*	4	G ValMez	3 3 3 – 5 2 1 –	16	**16,00**
61.–62.	*Michal*	*Töpfer*	2	GJPekařeMB	3 1 3 – 5 0 – –	12	**16,00**
63.–65.	*Filip*	*Chudoba*	1	PORG PH	3 1 1 5 – – – –	10	**15,89**
63.–65.	*Denisa*	*Chytilová*	1	GJŠkodyPŘ	3 1 1 – 5 – – –	10	**15,89**
63.–65.	*Lucia*	*Klasová*	1	G Gröss BA	3 1 1 – 5 – – –	10	**15,89**
66.	*Štěpán*	*Procházka*	4	GSRandyJN	3 – 3 – 5 5 – –	16	**15,42**
67.	*Vojtěch*	*Lukeš*	3	G LPika PL	3 3 3 – 5 – – –	14	**15,12**
68.	*Markéta*	*Horová*	3	GMikul23PL	3 3 3 – 5 – – –	14	**15,03**
69.	*Martin*	*Vrabec*	4	GMRŠKošice	3 3 3 0 5 1 – –	15	**15,00**
70.–71.	*Eliška*	*Cejnarová*	1	G Jaroměř	3 1 – – – 5 – –	9	**14,89**
70.–71.	*Viktor*	*Szabo*	1	GJHroncaBA	3 – 1 – 5 – – –	9	**14,89**
72.	*Adam*	*Mendl*	0	GCoubTábor	3 – – – 4 – – –	7	**14,27**
73.	*Barbora*	*Mouleová*	1	G Plasy	3 – – – 5 – – –	8	**13,81**
74.–76.	*Marek*	*Murin*	3	GJHroncaBA	3 – 3 – 5 – – 0	11	**13,47**
74.–76.	*Stano*	*Šípka*	3	GKukučPopr	3 1 – 0 5 2 – –	11	**13,47**
74.–76.	*Anh Minh*	*Tran*	3	GJarošeBO	3 1 3 4 – – – –	11	**13,47**
77.	*Zuzana*	*Svobodová*	3	G FrýdlNOs	2 2 – – 5 5 – –	14	**13,06**
78.–79.	*Daniel*	*Bárta*	0	GChodoviPH	3 1 0 0 2 – – –	6	**13,03**
78.–79.	*Peter*	*Macko*	0	ŠpMNDaG BA	3 3 – – – – – –	6	**13,03**
80.	*Ondřej*	*Svoboda*	2	GJarošeBO	3 3 3 – – – – –	9	**13,00**
81.	*Jan*	*Dittrich*	3	GJarošeBO	3 1 1 – 5 – – –	10	**12,45**
82.	*Jan*	*Knížek*	4	G Strakon	– 2 – 5 5 – 0 –	12	**11,53**
83.	*Pál*	*Somogyi*	3	GIM Šamorín	3 1 – – 5 – – –	9	**11,39**
84.–85.	*Petr*	*Gebauer*	1	G Mělník	3 – 3 – – – – –	6	**11,38**
84.–85.	*Vladimír*	*Lukačko*	1	GVarŽilina	2 – – – 4 – – –	6	**11,38**
86.	*Pavel*	*Myšička*	4	G Čáslav	2 – 3 – 5 1 – –	11	**11,00**
87.	*Jakub*	*Marták*	3	G GolNitra	2 1 2 0 4 0 – 0	9	**10,78**
88.	*Hedvika*	*Ranošová*	1	GBudějovPH	3 3 – – – – – –	6	**10,58**
89.	*Daniel*	*Pišťák*	3	GZborovPH	3 2 3 – 5 – – –	13	**10,34**
90.	*Jiří*	*Nábělek*	1	G Bílovec	– – – – – 5 – –	5	**10,00**

91.	*Jakub*	*Hledík*	4	GSŘMRSkuteč	3 1 – – 5 3 – –	12	**9,73**
92.	*Ondrej*	*Bínovský*	4	GAnMeTr	– – – – – 5 5 –	10	**9,61**
93.–94.	*Lucie*	*Hronová*	2	GJarošeBO	0 1 – – 5 – – –	6	**9,48**
93.–94.	*Leoš*	*Smetana*	2	G Jaroměř	3 – 3 – – – – –	6	**9,48**
95.	*Petr*	*Gintar*	3	MendelG OP	1 1 0 – 4 1 – –	7	**9,14**
96.	*Barbora*	*Sedláková*	4	GKonštanPV	3 1 – – 5 – – –	9	**9,00**
97.–98.	*Alžběta*	*Neubauerová*	1	GNadKavaPH	3 1 – – – – – –	4	**8,48**
97.–98.	*Anežka*	*Soukupová*	1	SPŠchemBrno	3 0 1 – 0 – – –	4	**8,48**
99.–100.	*Sára*	*Elichová*	0	GKepleraPH	3 – – – – – – –	3	**8,34**
99.–100.	*Martin*	*Hubata*	0	GMikul23PL	2 1 – – – – – –	3	**8,34**
101.–103.	*Dominika*	*Levická*	4	GMRŠKošice	2 1 1 0 4 – – –	8	**8,00**
101.–103.	*Emese*	*Szabó*	4	GZKMJ Gal	3 – – – 5 – – –	8	**8,00**
101.–103.	*Tomáš*	*Terem*	3	GTajBanBys	3 – 3 0 – – – –	6	**8,00**
104.	*Lukáš*	*Kubacki*	2	GNadKavaPH	1 1 3 – – – – –	5	**7,65**
105.	*Karel*	*Jílek*	4	GKepleraPH	3 – – – 5 – – –	8	**7,42**
106.	*Jaromír*	*Mielec*	2	GVolgogrOS	3 3 – – – – – –	6	**6,80**
107.–108.	*Zuzana*	*Frankovská*	3	GJHroncaBA	2 – 3 – – – – –	5	**6,79**
107.–108.	*Štefan*	*Hollán*	1	G Bytča	3 – – – – – – –	3	**6,79**
109.	*Zuzana*	*Tréglová*	2	G Žatec	3 1 – – – – – –	4	**6,33**
110.	*Michaela*	*Jakešová*	3	GJarošeBO	3 – – – 1 – – –	4	**5,53**
111.	*Jakub*	*Kvasil*	2	GMozartovaPA	3 – – – – – – –	3	**5,27**
112.	*Michaela*	*Brabcová*	3	G Jírov ČB	3 1 – – – – – –	4	**5,09**
113.	*Jiří*	*Čech*	4	G Strakon	– 1 – 4 – 0 – –	5	**4,90**
114.–115.	*Andrej*	*Čermák*	1	GJF Šaľa	2 – – – – – – –	2	**4,89**
114.–115.	*Adéla*	*Zvěřinová*	1	GJiříPoděb	2 – – 0 – – – –	2	**4,89**
116.	*Martin*	*Scheubrein*	3	G MasNámTŘ	3 – – – – – – –	3	**4,23**
117.	*Timotej*	*Šujan*	3	GJarošeBO	3 – – – – – – –	3	**4,19**
118.	*Alena*	*Zahradníčková*	4	GKřenováBO	3 1 – – – – – –	4	**4,00**
119.	*Kristýna*	*Šudomová*	3	GValašKlob	3 – – – – – – –	3	**3,53**
120.	*Sarah*	*Jedličková*	4	GJarošeBO	3 – – – – – – –	3	**2,76**
121.	*Kristína*	*Szabová*	1	GVarŽilina	1 – – – – – – –	1	**2,67**
122.	*Lucie*	*Janštová*	2	SlovanG OL	– 1 – – – – – –	1	**1,91**

1. seriálová série – Letem grafovým světem 1

Výsledková listina

1.–6.	*Eduard*	*Batmendijn*	4	CGStĽubovňa	5 5 5	$15+2i$	**15,00**
1.–6.	*Filip*	*Bialas*	2	GOpatovPH	5 5 5	15	**15,00**
1.–6.	*František*	*Couf*	2	GZborovPH	5 5 5	15	**15,00**
1.–6.	*Matěj*	*Konečný*	4	G Jírov ČB	5 5 5	$15+3i$	**15,00**
1.–6.	*Radovan*	*Švarc*	4	G ČTřebová	5 5 5	15	**15,00**
1.–6.	*Pavel*	*Turek*	2	GTomkovaOL	5 5 5	$15+i$	**15,00**
7.	*Viktor*	*Němeček*	4	GJMasar JI	5 5 5	$15-i$	**14,54**
8.	*Zuzana*	*Johanovská*	3	GOpatovPH	5 3 5	$13+i$	**13,80**
9.	*Danil*	*Koževnikov*	1	GKepleraPH	5 2 5	12	**13,77**
10.	*Jan*	*Jurka*	4	GMLerchaBO	5 3 5	$13+3i$	**13,34**
11.	*Václav*	*Rozhoň*	4	GJirsíkaČB	5 3 5	$13+i$	**12,59**
12.	*Marie*	*Dohnalová*	2	GNadKavaPH	5 – 5	$10+2i$	**12,32**
13.	*Tomáš*	*Domes*	2	MendelG OP	5 2 3	10	**11,93**
14.	*Petr*	*Gebauer*	1	G Mělník	5 0 3	$8+i$	**11,47**
15.	*Jakub*	*Löwit*	3	GČeskoliPH	5 2 5	12	**10,98**
16.	*Karolína*	*Kuchyňová*	4	GMLerchaBO	5 2 5	12	**10,39**
17.	*Lucien*	*Šíma*	3	PORG PH	5 2 2	9	**10,36**
18.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	1	GZborovPH	5 2 0	7	**10,34**
19.	*Radek*	*Olšák*	0	GMensaPH	5 0 1	6	**10,26**
20.	*Anna*	*Gajdová*	4	G ValMez	3 3 4	10	**10,00**
21.	*Pavel*	*Hudec*	1	GJarkovPH	4 2 –	6	**9,54**
22.	*Lenka*	*Kopfová*	0	CZŠSL HnM	5 – –	5	**9,45**
23.	*Jan*	*Soukup*	4	G Klatovy	5 2 5	12	**9,00**
24.	*Vojtěch*	*Lukeš*	3	G LPika PL	5 – 3	8	**8,68**
25.	*Marek*	*Murin*	3	GJHroncaBA	4 2 1	7	**8,48**
26.	*Michal*	*Töpfer*	2	GJPekařeMB	5 1 0	6	**8,43**
27.	*Jan*	*Šorm*	3	GJarošeBO	5 2 2	9	**8,02**
28.	*Jan*	*Škvára*	4	GJŠkodyPŘ	5 2 1	8	**8,00**
29.	*Anh Minh*	*Tran*	3	GJarošeBO	5 – 1	6	**7,47**
30.	*Richard*	*Hladík*	2	GaOA MarLáz	5 – –	5	**7,36**
31.	*Kateřina*	*Nová*	2	G Vimperk	5 – 0	$5+i$	**7,26**
32.	*Tomáš*	*Konečný*	2	GJirsíkaČB	5 – –	5	**6,76**
33.	*Jakub*	*Hledík*	4	GSŘMRSkuteč	5 2 1	8	**6,62**
34.–36.	*Daniel*	*Kopf*	3	SlezkéG OP	5 – 0	5	**6,40**
34.–36.	*Jana*	*Řežábková*	3	PORG PH	3 1 1	5	**6,40**
34.–36.	*Tomáš*	*Terem*	3	GTajBanBys	5 – –	5	**6,40**
37.	*Vít*	*Kalisz*	3	FSG Pirna	0 3 2	5	**6,13**
38.	*Marian*	*Poljak*	3	GJŠkodyPŘ	5 – 0	$5+i$	**6,03**
39.	*Nina*	*Hronkovičová*	4	G Partizan	5 – 1	6	**6,00**

40.	*Zuzana*	*Svobodová*	3	G FrýdlNOs	5 – 1	6	**5,46**
41.	*Markéta*	*Calábková*	4	GJŠkodyPŘ	5 2 0	7	**5,33**
42.	*Martin*	*Vrabec*	4	GMRŠKošice	5 – 0	$5 + i$	**5,27**
43.	*Veronika*	*Hladíková*	2	GMikul23PL	0 3 0	3	**4,90**
44.	*Ondřej*	*Zeman*	4	G Lovosice	5 – –	5	**4,81**
45.	*Dominik*	*Krasula*	2	G Krnov	3 0 1	4	**4,76**
46.	*Ondřej*	*Knopp*	1	G Třeboň	0 – 2	2	**4,43**
47.	*Adéla*	*Kostelecká*	3	GLesníZlín	3 – 0	3	**4,07**
48.	*Pavel*	*Myšička*	4	G Čáslav	4 0 –	4	**4,00**
49.	*Vojtěch*	*Suchánek*	4	GJarošeBO	5 – –	5	**3,94**
50.	*Daniel*	*Pišťák*	3	GZborovPH	5 – –	$5 + i$	**3,91**
51.	*Vojtěch*	*Lanz*	1	GZborovPH	0 – 2	2	**3,81**
52.	*Jan*	*Dittrich*	3	GJarošeBO	0 0 2	2	**2,80**
53.–54.	*Jaroslav*	*Paidar*	1	SPŠMasarLI	0 1 0	1	**2,51**
53.–54.	*Jiří*	*Vala*	1	G Mikulov	0 – 1	1	**2,51**
55.–61.	*Aleš*	*Krčil*	2	G Humpolec	– – 0	0	**0,00**
55.–61.	*Dominika*	*Levická*	4	GMRŠKošice	0 0 0	0	**0,00**
55.–61.	*Daniel*	*Magula*	1	PiarGNitra	– 0 0	0	**0,00**
55.–61.	*Marek*	*Malý*	2	G Neratov	0 – 0	0	**0,00**
55.–61.	*Hedvika*	*Ranošová*	1	GBudějovPH	0 – 0	0	**0,00**
55.–61.	*Václav*	*Steinhauser*	1	ZŠVranéNVl	– – 0	0	**0,00**
55.–61.	*Emese*	*Szabó*	4	GZKMJ Gal	– 0 –	0	**0,00**

Pořadí po 3. podzimní sérii

1.–3.	*Eduard*	*Batmendijn*	4	CGStĽubovňa	25	25	25	15	**90,00**	278
1.–3.	*Radovan*	*Švarc*	4	G ČTřebová	25	25	25	15	**90,00**	1029
1.–3.	*Pavel*	*Turek*	2	GTomkovaOL	25	25	25	15	**90,00**	463
4.	*Filip*	*Bialas*	2	GOpatovPH	25	24	25	15	**89,31**	328
5.	*Danil*	*Koževnikov*	1	GKepleraPH	23	24	24	14	**84,52**	85
6.	*Lenka*	*Kopfová*	0	CZŠSL HnM	23	23	24	9	**79,55**	80
7.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	1	GZborovPH	21	23	23	10	**77,72**	98
8.	*Viktor*	*Němeček*	4	GJMasar JI	25	19	19	15	**77,26**	415
9.	*Jakub*	*Löwit*	3	GČeskoliPH	21	21	23	11	**75,84**	511
10.	*Matěj*	*Konečný*	4	G Jírov ČB	19	19	22	15	**74,34**	447
11.	*Zuzana*	*Johanovská*	3	GOpatovPH	19	22	19	14	**73,97**	74
12.	*Jan*	*Jurka*	4	GMLerchaBO	17	20	22	13	**72,38**	269
13.	*Lucien*	*Šíma*	3	PORG PH	19	21	22	10	**72,16**	72
14.	*Marie*	*Dohnalová*	2	GNadKavaPH	18	22	19	12	**70,98**	71
15.	*Radek*	*Olšák*	0	GMensaPH	22	21	17	10	**70,87**	87
16.	*Tomáš*	*Domes*	2	MendelG OP	19	21	19	12	**70,73**	71
17.	*Pavel*	*Hudec*	1	GJarkovPH	22	19	19	10	**69,98**	70
18.	*Tomáš*	*Konečný*	2	GJirsíkaČB	22	21	19	7	**69,60**	213
19.	*Jan*	*Škvára*	4	GJŠkodyPŘ	19	21	21	8	**69,46**	69
20.	*Václav*	*Rozhoň*	4	GJirsíkaČB	22	17	17	13	**68,96**	280
21.	*Karolína*	*Kuchyňová*	4	GMLerchaBO	20	20	18	10	**68,91**	441
22.	*Jan*	*Soukup*	4	G Klatovy	18	25	17	9	**68,73**	780
23.	*Jiří*	*Vala*	1	G Mikulov	21	22	22	3	**68,04**	68
24.	*Vojtěch*	*Lanz*	1	GZborovPH	21	21	23	4	**68,01**	196
25.	*Michal*	*Töpfer*	2	GJPekařeMB	22	22	16	8	**67,47**	67
26.	*Nina*	*Hronkovičová*	4	G Partizan	19	23	19	6	**67,00**	67
27.	*Martin*	*Števko*	0	GAlejKošic	21	22	23	–	**66,35**	66
28.	*Marian*	*Poljak*	3	GJŠkodyPŘ	19	19	22	6	**65,81**	189
29.	*Veronika*	*Hladíková*	2	GMikul23PL	19	19	23	5	**65,65**	66
30.	*Ondřej*	*Knopp*	1	G Třeboň	21	22	19	4	**65,50**	66
31.	*Vojtěch*	*Suchánek*	4	GJarošeBO	20	19	22	4	**65,32**	246
32.	*Adéla*	*Kostelecká*	3	GLesníZlín	19	21	21	4	**65,11**	65
33.	*Jana*	*Řežábková*	3	PORG PH	19	20	20	6	**65,06**	65
34.	*Anna*	*Gajdová*	4	G ValMez	18	21	16	10	**65,00**	65
35.	*Vojtěch*	*Lukeš*	3	G LPika PL	19	21	15	9	**64,04**	206
36.	*Daniel*	*Kopf*	3	SlezkéG OP	18	18	21	6	**63,33**	63
37.	*Kateřina*	*Nová*	2	G Vimperk	17	18	20	7	**63,18**	159
38.	*Petr*	*Gebauer*	1	G Mělník	19	19	11	11	**61,41**	61
39.	*Jaroslav*	*Paidar*	1	SPŠMasarLI	20	19	19	3	**61,07**	61
40.	*Vít*	*Kalisz*	3	FSG Pirna	20	16	19	6	**60,22**	116

41.	*Zuzana*	*Svobodová*	3	G FrýdlNOs	20	20	13	5	**59,44**	350
42.	*Václav*	*Steinhauser*	1	ZŠVranéNVl	15	21	23	0	**58,93**	318
43.	*Jan*	*Šorm*	3	GJarošeBO	15	18	18	8	**58,90**	416
44.	*Martin*	*Surma*	4	GJWolkraPV	22	19	17	–	**57,52**	352
45.	*Dominik*	*Krasula*	2	G Krnov	18	15	18	5	**55,84**	387
46.	*Anh*	*Le Hoang*	3	GJarošeBO	14	20	22	–	**55,65**	148
47.	*Aleš*	*Krčil*	2	G Humpolec	18	16	22	0	**55,29**	55
48.	*Samuel*	*Karaba*	1	SŠNvh	21	18	17	–	**55,20**	55
49.	*Denisa*	*Chytilová*	1	GJŠkodyPŘ	17	22	16	–	**55,15**	55
50.	*Jan*	*Gocník*	3	GJŠkodyPŘ	15	20	20	–	**55,09**	55
51.	*Adam*	*Mendl*	0	GCoubTábor	16	24	14	–	**54,20**	54
52.	*Richard*	*Hladík*	2	GaOA MarLáz	18	9	19	7	**53,98**	54
53.	*Ondřej*	*Darmovzal*	4	GJarošeBO	15	18	20	–	**53,83**	121
54.	*Ondřej*	*Lomický*	2	G Plasy	16	21	17	–	**53,74**	54
55.	*Kamila*	*Kyzlíková*	1	GZborovPH	19	18	17	–	**53,05**	53
56.	*Anh Minh*	*Tran*	3	GJarošeBO	14	16	13	7	**51,77**	52
57.	*Daniel*	*Bárta*	0	GChodoviPH	20	16	13	–	**49,89**	50
58.	*Markéta*	*Horová*	3	GMikul23PL	15	20	15	–	**49,80**	200
59.	*Jozef*	*Burkuš*	2	G Rožňava	18	15	17	–	**49,72**	50
60.	*Peter*	*Macko*	0	ŠpMNDaG BA	22	14	13	–	**49,47**	49
61.	*Hedvika*	*Ranošová*	1	GBudějovPH	19	19	11	0	**48,68**	130
62.	*Viktor*	*Szabo*	1	GJHroncaBA	17	17	15	–	**48,55**	49
63.	*Štěpán*	*Procházka*	4	GSRandyJN	16	16	15	–	**48,32**	89
64.	*Matej*	*Hockicko*	1	SSOŠTA PP	15	14	19	–	**47,98**	48
65.	*Lucia*	*Klasová*	1	G Gröss BA	19	11	16	–	**46,55**	47
66.	*Markéta*	*Calábková*	4	GJŠkodyPŘ	12	12	17	5	**46,25**	325
67.	*Daniel*	*Magula*	1	PiarGNitra	17	8	21	0	**45,98**	46
68.	*Ondřej*	*Svoboda*	2	GJarošeBO	18	15	13	–	**45,82**	46
69.	*Petr*	*Jakubčík*	1	PORG PH	18	10	17	–	**45,55**	158
70.	*Pavel*	*Myšička*	4	G Čáslav	14	16	11	4	**45,00**	45
71.	*Daniel*	*Pišťák*	3	GZborovPH	11	19	10	4	**44,91**	520
72.	*Marek*	*Malý*	2	G Neratov	16	12	17	0	**44,79**	45
73.	*Jiří*	*Nábělek*	1	G Bílovec	18	17	10	–	**44,53**	45
74.	*Filip*	*Chudoba*	1	PORG PH	16	13	16	–	**44,42**	44
75.	*Jaromír*	*Mielec*	2	GVolgogrOS	18	20	7	–	**44,41**	420
76.	*Lucie*	*Hronová*	2	GJarošeBO	13	22	9	–	**44,00**	44
77.	*Eliška*	*Cejnarová*	1	G Jaroměř	16	13	15	–	**43,42**	43
78.	*Vladimír*	*Lukačko*	1	GVarŽilina	15	17	11	–	**43,10**	43
79.	*Jan*	*Dittrich*	3	GJarošeBO	17	10	12	3	**42,82**	43
80.	*Nodari*	*Gogatishvili*	1	GZborovPH	11	14	17	–	**42,02**	42
81.	*Jakub*	*Hledík*	4	GSŘMRSkuteč	12	14	10	7	**41,82**	246
82.	*Martin*	*Vrabec*	4	GMRŠKošice	–	21	15	5	**41,27**	41
83.	*Tomáš*	*Terem*	3	GTajBanBys	11	15	8	6	**41,22**	41
84.	*Jakub*	*Ševčík*	3	GKukučPopr	15	9	16	–	**40,64**	55
85.	*Barbora*	*Mouleová*	1	G Plasy	13	14	14	–	**40,26**	40
86.	*Marek*	*Murin*	3	GJHroncaBA	18	–	13	8	**40,10**	40
87.	*Zuzana*	*Tréglová*	2	G Žatec	21	12	6	–	**40,03**	117
88.	*Štefan*	*Hollán*	1	G Bytča	17	16	7	–	**39,51**	40
89.	*Stano*	*Šípka*	3	GKukučPopr	12	12	13	–	**38,37**	38
90.	*Šimon*	*Karch*	1	G KomHavíř	19	19	–	–	**38,36**	38
91.	*Soňa*	*Burešová*	1	GHeyrovPH	21	17	–	–	**38,13**	38

92.	*Radek*	*Zikmund*	4	G HavlBrod	17	21	–	–	**38,00**	38
93.	*Martin*	*Strnad*	1	G Dobříš	15	22	–	–	**37,32**	37
94.	*Zuzana*	*Frankovská*	3	GJHroncaBA	20	10	7	–	**36,92**	37
95.	*Sára*	*Elichová*	0	GKepleraPH	15	13	8	–	**36,76**	37
96.	*Leoš*	*Smetana*	2	G Jaroměř	13	14	9	–	**36,53**	37
97.	*Marek*	*Černý*	4	G Chrudim	17	19	–	–	**35,71**	47
98.	*Jan*	*Pekař*	1	GJPekařeMB	17	19	–	–	**35,35**	35
99.	*Matěj*	*Hasala*	0	ZŠ Teplice	14	–	20	–	**34,71**	35
100.	*Marián*	*Poppr*	4	GJNerudyPH	18	16	–	–	**33,92**	471
101.	*Adam*	*Doubrava*	0	GMasarykKM	13	0	20	–	**33,47**	33
102.	*Tomáš*	*Kuzma*	3	GJHroncaBA	18	15	–	–	**33,46**	156
103.	*Kristína*	*Szabová*	1	GVarŽilina	17	14	3	–	**33,31**	33
104.	*Katarína*	*Krajčiová*	4	GAlejKošic	18	15	–	–	**33,06**	536
105.	*Alena*	*Zahradníčková*	4	GKřenováBO	15	14	4	–	**33,00**	33
106.	*Zuzana*	*Urbanová*	2	GUBalvanJN	17	16	–	–	**32,90**	33
107.	*Ondřej*	*Zeman*	4	G Lovosice	–	11	17	5	**32,88**	56
108.	*Jakub*	*Matěna*	3	GČeskoliPH	21	11	–	–	**32,55**	54
109.	*Jakub*	*Marták*	3	G GolNitra	13	7	11	–	**31,09**	104
110.	*Lukáš*	*Kubacki*	2	GNadKavaPH	14	9	8	–	**31,06**	115
111.	*Václav*	*Málek*	3	G Chotěboř	17	13	–	–	**30,74**	31
112.	*Jan*	*Knížek*	4	G Strakon	19	–	12	–	**30,18**	60
113.	*Anežka*	*Soukupová*	1	SPŠchemBrno	15	7	8	–	**30,16**	30
114.	*Timotej*	*Šujan*	3	GJarošeBO	15	10	4	–	**29,76**	40
115.	*Lukáš*	*Fruněk*	2	GLesníZlín	17	12	–	–	**28,79**	29
116.	*Michal*	*Bubeník*	2	BiskG Brno	13	15	–	–	**28,05**	28
117.	*Barbora*	*Sedláková*	4	GKonštanPV	8	11	9	–	**28,00**	28
118.	*Pavla*	*Nováková*	3	GJarošeBO	13	14	–	–	**27,94**	28
119.	*Zdeněk*	*Lukeš*	3	GNeumannŽR	13	13	–	–	**26,94**	27
120.	*Iva*	*Švecová*	1	GJMasar JI	20	7	–	–	**26,79**	27
121.	*Michaela*	*Jakešová*	3	GJarošeBO	9	11	6	–	**26,09**	26
122.	*Lukáš*	*Zíb*	3	GPísnickPH	15	10	–	–	**25,73**	26
123.	*Martin*	*Scheubrein*	3	G MasNámTŘ	13	8	4	–	**25,70**	26
124.	*Alžběta*	*Neubauerová*	1	GNadKavaPH	10	7	8	–	**25,27**	25
125.	*František*	*Couf*	2	GZborovPH	–	10	–	15	**24,82**	505
126.	*Pál*	*Somogyi*	3	GIM Šamorín	9	4	11	–	**24,79**	25
127.	*Filip*	*Oplt*	2	GBudějovPH	19	5	–	–	**24,64**	25
128.	*Šárka*	*Vavrečková*	2	GBezručeFM	15	9	–	–	**24,53**	25
129.	*Martin*	*Zahradníček*	4	GŠlapanice	16	8	–	–	**24,27**	24
130.	*Dominika*	*Levická*	4	GMRŠKošice	–	16	8	0	**24,00**	24
131.	*Matúš*	*Varhaník*	1	G Bytča	11	11	–	–	**22,76**	23
132.	*Borek*	*Požár*	1	G Rakovník	16	7	–	–	**22,68**	23
133.	*Noemk*	*Kuželová*	3	GBalbínaHK	9	13	–	–	**22,64**	23
134.	*Přemysl*	*Šťastný*	2	G Žamberk	17	5	–	–	**22,53**	70
135.	*Soňa*	*Lisníková*	2	GBezručeFM	13	9	–	–	**22,48**	22
136.	*David*	*Kozina*	1	SPŠEIT BO	22	–	–	–	**22,43**	22
137.	*Veronika*	*Venclová*	1	G Chrudim	14	8	–	–	**22,29**	22
138.	*Martin*	*Hubata*	0	GMikul23PL	–	13	8	–	**21,37**	21
139.	*Stepan*	*Yakimov*	4		–	–	21	–	**21,00**	21
140.	*Michaela*	*Brabcová*	3	G Jírov ČB	–	16	5	–	**20,85**	98
141.	*Michal*	*Porubsky*	3	GCyMeNitra	11	9	–	–	**20,56**	21
142.	*Tomáš*	*Macek*	2	G Náchod	20	–	–	–	**20,12**	20

143.	*Ondrej*	*Bínovský*	4	GAnMeTr	10	–	10	–	**19,22**	45
144.	*Minh Thao*	*Nguyen*	3	GEBenešeKL	19	–	–	–	**19,00**	19
145.	*Petr*	*Gintar*	3	MendelG OP	6	4	9	–	**18,86**	23
146.	*Petr*	*Ježek*	1	GBNěmcovHK	19	–	–	–	**18,52**	19
147.	*David*	*Pokorný*	3	G Bučovice	10	8	–	–	**18,30**	18
148.	*Lukáš*	*Pavela*	0	LSG Letohrad	18	–	–	–	**18,23**	18
149.–152.	*Martin*	*Barnovský*	2	GStĽubovňa	18	–	–	–	**17,77**	18
149.–152.	*Petr*	*Chmel*	2	G Kralupy	18	–	–	–	**17,77**	18
149.–152.	*Jan*	*Dopita*	2	GBudějovPH	18	–	–	–	**17,77**	18
149.–152.	*Adrián*	*Mokrý*	2	GNVPlániPH	18	–	–	–	**17,77**	18
153.	*Jakub*	*Gregora*	1	GLanškroun	18	–	–	–	**17,70**	18
154.	*Andrej*	*Čermák*	1	GJF Šaľa	13	–	5	–	**17,53**	18
155.	*Jan*	*Václavek*	3	G Ústí n O	17	–	–	–	**17,24**	137
156.	*Tereza*	*Kislingerová*	2	G Klatovy	17	–	–	–	**17,15**	121
157.	*František*	*Zajíc*	2	G Nymburk	17	–	–	–	**16,90**	17
158.–159.	*Jakub*	*Ditrich*	1	GÚstavníPH	17	–	–	–	**16,83**	17
158.–159.	*Roman*	*Walica*	1	G Třinec	17	–	–	–	**16,83**	17
160.	*Adéla*	*Jalovcová*	2	GNerudCheb	16	–	–	–	**16,00**	16
161.	*Matěj*	*Kletečka*	1	G HavlBrod	16	–	–	–	**15,89**	16
162.	*Kristýna*	*Šudomová*	3	GValašKlob	12	–	4	–	**15,70**	156
163.–164.	*Filip*	*Keller*	0	G Milevsko	15	–	–	–	**15,39**	15
163.–164.	*Jaroslava*	*Šamanová*	0	G Tišnov	15	–	–	–	**15,39**	15
165.–167.	*Ronald*	*Luc*	2	GJarošeBO	15	–	–	–	**15,00**	22
165.–167.	*Martin*	*Repčík*	4		9	6	–	–	**15,00**	15
165.–167.	*Emese*	*Szabó*	4	GZKMJ Gal	4	3	8	0	**15,00**	15
168.	*Lucie*	*Janštová*	2	SlovanG OL	13	–	2	–	**14,91**	15
169.–172.	*Jan*	*Došek*	1	G Brandýs	15	–	–	–	**14,89**	15
169.–172.	*Vladislav*	*Najvárek*	1	GBezručeFM	15	–	–	–	**14,89**	15
169.–172.	*Marián*	*Okál*	1	SŠNvh	15	–	–	–	**14,89**	15
169.–172.	*Adéla*	*Zvěřinová*	1	GJiříPoděb	10	–	5	–	**14,89**	15
173.	*Pavel*	*Šklíba*	2	GDašickáPA	–	15	–	–	**14,79**	15
174.	*Martin*	*Kutiš*	3	G Humpolec	14	–	–	–	**14,47**	14
175.	*Jan*	*Šuta*	2	GJŠkodyPŘ	14	–	–	–	**14,05**	14
176.	*Zuzana*	*Klimsová*	1	GJMasar JI	14	–	–	–	**13,81**	14
177.	*Marie*	*Vonzino*	2	GTomkovaOL	14	–	–	–	**13,69**	67
178.	*Adéla*	*Šedová*	3	GJungmanLT	13	–	–	–	**13,38**	25
179.	*Ekaterina*	*Pichugina*	0	GJarkovPH	13	–	–	–	**13,03**	13
180.	*Martina*	*Petráková*	2	GOA Pelh	13	–	–	–	**13,00**	13
181.–184.	*Martin*	*Beran*	1	SPŠLegioJI	13	–	–	–	**12,64**	13
181.–184.	*Matyáš*	*Kalous*	1	GDomažlice	13	–	–	–	**12,64**	13
181.–184.	*Vladimír*	*Kistan*	1	G Rýmařov	13	–	–	–	**12,64**	13
181.–184.	*Matěj*	*Konvalinka*	1	GOA Sedlča	13	–	–	–	**12,64**	13
185.	*Miroslav*	*Mareš*	4	GBudějovPH	6	6	–	–	**12,27**	12
186.	*Jakub*	*Kvasil*	2	GMozartovaPA	7	–	5	–	**12,03**	12
187.	*Pavel*	*Mikuš*	4	G Mělník	12	–	–	–	**12,00**	12
188.	*Marie*	*Freibergová*	2	G Děčín	12	–	–	–	**11,89**	12
189.	*Anežka*	*Michálková*	3	GaSOŠ Telč	4	8	–	–	**11,85**	44
190.	*Martin*	*Kopřiva*	3	GMikul23PL	12	–	–	–	**11,78**	184
191.	*Tomáš*	*Troján*	0	GNerudCheb	12	–	–	–	**11,66**	12
192.	*Markéta*	*Doležalová*	3	GTNovákBO	11	–	–	–	**11,39**	11
193.	*Daniela*	*Hrbáčová*	1	WichtG OS	11	0	–	–	**11,38**	11

194.	*Adam*	*Říha*	3	G ČesLípa	11	–	–	–	**11,09**	48
195.	*David*	*Neugebauer*	2	SlezkéG OP	11	–	–	–	**10,72**	11
196.	*Marek*	*Jaroš*	3	GJM Gal	–	10	–	–	**10,30**	10
197.	*Kateřina*	*Čížková*	1	G Rokycany	10	–	–	–	**10,00**	10
198.	*Tereza*	*Rašková*	4	GTomkovaOL	7	3	–	–	**9,71**	25
199.–203.	*Ludmila*	*Hudská*	2	RakGymPH	9	–	–	–	**9,48**	9
199.–203.	*Veronika*	*Jehličková*	2	GNadKavaPH	9	–	–	–	**9,48**	9
199.–203.	*Kateřina*	*Škorvánková*	2	G Rokycany	9	–	–	–	**9,48**	9
199.–203.	*Pavel*	*Turinský*	2	G Brandýs	9	–	–	–	**9,48**	9
199.–203.	*David*	*Ucháč*	2	EDUCA PAR	–	9	–	–	**9,48**	9
204.	*Milan*	*Kubala*	3	GTajBanBys	9	–	–	–	**9,17**	9
205.	*Alexandra*	*Horkavá*	1	GB Sučany	8	–	–	–	**8,48**	8
206.–207.	*Petr*	*Bartoš*	4	OpenGate	7	1	–	–	**8,00**	8
206.–207.	*Jiří*	*Matyáš*	3	OATGM KnO	8	–	–	–	**8,00**	8
208.	*Andrea*	*Kučerová*	3	G ČKrumlov	7	–	–	–	**7,43**	84
209.	*Karel*	*Jílek*	4	GKepleraPH	–	–	7	–	**7,42**	52
210.	*Jan*	*Bráblík*	3	GJarošeBO	3	4	–	–	**7,11**	7
211.	*Jiří*	*Čech*	4	G Strakon	2	–	5	–	**6,85**	17
212.–214.	*Jakub*	*Jelen*	1	GBalbínaHK	7	–	–	–	**6,79**	7
212.–214.	*Dominik*	*Kovář*	3	G Litomyšl	7	–	–	–	**6,79**	7
212.–214.	*Klára*	*Machová*	3	GDomažlice	7	–	–	–	**6,79**	7
215.–216.	*Jakub*	*Dostál*	2	SlovanG OL	–	7	–	–	**6,76**	7
215.–216.	*Jana*	*Vývodová*	2	G FHajdyOS	7	–	–	–	**6,76**	7
217.	*Jiří*	*Štrincl*	4	GSRandyJN	7	–	–	–	**6,52**	47
218.–219.	*Martina*	*Chamrová*	4	GOPavla PH	6	–	–	–	**6,00**	6
218.–219.	*Miroslav*	*Juroška*	4	ČaOG FrMýs	6	–	–	–	**6,00**	6
220.	*Tomáš*	*Hrbek*	3	G Chrudim	6	–	–	–	**5,53**	6
221.	*Sarah*	*Jedličková*	4	GJarošeBO	3	–	3	–	**5,52**	45
222.	*Matěj*	*Coufal*	2	G HavlBrod	–	5	–	–	**5,19**	21
223.	*Magdaléna*	*Horváthová*	4	SGJHTr	5	–	–	–	**5,00**	5
224.	*Peter*	*Vook*	4	GPošKošice	5	–	–	–	**4,62**	45
225.	*Robert*	*Pelc*	4	GÚstavníPH	4	–	–	–	**4,00**	4
226.	*Jan*	*Erhart*	4	GFXŠaldyLI	3	–	–	–	**2,83**	228
227.–230.	*Jan*	*Klaus*	1	GJPekařeMB	0	–	–	–	**0,00**	0
227.–230.	*Klára*	*Mocová*	0	G Mělník	0	–	–	–	**0,00**	0
227.–230.	*Veronika*	*Nováková*	0	ZŠ Chrast	0	–	–	–	**0,00**	0
227.–230.	*Pavla Mária*	*Švagerková*	3	GKukučPopr	0	–	–	–	**0,00**	0

adresa: *Korespondenční seminář*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
web: *http://mks.mff.cuni.cz/*
e-mail: *mks@mff.cuni.cz*