# Finální myšmaš

4. jarní série Termín odeslání: 5. května 2014

*V této sérii nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, ale podle témat (v rámci každého tématu je jedna úloha snazší a jedna obtížnější). Pozor, počítají se body za všechny úlohy!*

Úloha 1.

Kuba našel v šuplíku čtverečkovaný papír o rozměrech $20 \times 14$. Několikrát jej přehnul podél stran čtverečků, čímž dostal jediný čtvereček $1 \times 1$. Kolik nejvíce kusů může vzniknout, pokud Kuba rozstřihne takto složený papír podél

**(a)** úsečky spojující středy dvou protějších stran? (2 body)

**(b)** úsečky spojující středy dvou sousedních stran? (3 body)

Úloha 2.

**(a)** Na straně $AB$ konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ je dán bod $E$ tak, že $EC \parallel AD$ a $ED \parallel BC$. Dokažte, že

$$S_{CDE} \leq \frac{1}{3} S_{ABCD},$$

kde $S_{CDE}$ a $S_{ABCD}$ značí obsahy příslušných mnohoúhelníků. (2 body)

**(b)** Mějme různostranný ostroúhlý trojúhelník $ABC$. Označme $H$ průsečík jeho výšek. Osa ostrého úhlu svíraného výškami z vrcholů $B$, $C$ protne strany $AB$, $AC$ po řadě v bodech $P$, $Q$. Nakonec buď $M$ střed strany $BC$ a $R$ průsečík osy vnitřního úhlu u vrcholu $A$ s úsečkou $MH$. Dokažte, že body $A$, $P$, $Q$, $R$ leží na jedné kružnici. (3 body)

Úloha 3.

**(a)** Nalezněte funkci definovanou na reálných číslech, jejímž grafem je lomená čára[4] a která nabývá každé reálné hodnoty právě třikrát. (2 body)

**(b)** Pro která přirozená čísla $n$ existuje polynom $f$ stupně $n$ a nekonečná posloupnost navzájem různých přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots$ taková, že platí $f(a_1) = 0$ a $f(a_i) = a_{i-1}$ pro každé $i > 1$? (3 body)

Úloha 4.

V některých $k$ políčkách tabulky $10 \times 10$ je neviditelným inkoustem nakreslená jedna úhlopříčka. Čuch chce zjistit, která políčka to jsou. Když ukáže shora či zdola na nějaký sloupec nebo zleva či zprava na nějaký řádek, dozví se, kudy by z tabulky vyletěl paprsek světla, kdyby do ní vletěl právě z onoho směru a odrážel se pouze od vyznačených úhlopříček jako od zrcadel. Kolikrát nejméně musí Čuch do tabulky ukázat, aby potom mohl vždy s jistotou určit, kde se zrcátka nacházejí, pokud

**(a)** $k = 2$, (2 body)

**(b)** $k = 3$? (3 body)

[4] *Lomená čára* je množina libovolně (tedy i nekonečně) mnoha na sebe navazujících úseček.

Úloha 5.

**(a)** Mějme posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, \dots$ takovou, že každé přirozené číslo se v ní nachází právě jednou. Dokažte, že pak existují přirozená čísla $l$, $m$, pro která platí $1 < l < m$ a $a_1 + a_m = 2a_l$. (2 body)

**(b)** Rozmístěte čísla $1, 2, \dots, n$ do řady tak, aby aritmetický průměr žádných dvou z nich neležel mezi nimi. (3 body)

Úloha 6.

**(a)** Některé body na přímce $p$ jsou *fešné*. Navíc platí: vezmeme-li libovolný bod z $p$, pak jeho vzdálenost od alespoň jednoho z fešných bodů je iracionální. Kolik nejméně může být fešných bodů? (2 body)

**(b)** Řešte tutéž úlohu, je-li $p$ rovina (nikoli přímka). (3 body)

Úloha 7.

**(a)** Najděte konvexní mnohostěn, jehož stěny lze obarvit černě a bíle tak, aby černých stěn bylo více než bílých, ale žádné dvě černé stěny neměly společnou hranu. (2 body)

**(b)** Dokažte, že žádnému takovému mnohostěnu nelze vepsat kouli.[5] (3 body)

[5] Koule *vepsaná* mnohostěnu se dotýká všech jeho stěn.