Průměry

1. jarní série Termín odeslání: 10. února 2014

Není-li řečeno jinak, myslíme průměrem několika čísel jejich aritmetický průměr. Aritmetický průměr n čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ je číslo $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$.

Úloha 1. (3 body)
Může být průměr 2014 (ne nutně různých) přirozených čísel[1] roven číslu 201,4?

Úloha 2. (3 body)
Děti ve 3. B mají průměrně 9,6 spolužaček. Kolik dětí chodí do 3. B? Nalezněte všechny možnosti.

Úloha 3. (3 body)
PraSátko si hraje se svými přáteli plejtvákovci šedými. Kytovci do písku vyryjí čísla $1, 2, \dots, n$. PraSátko si v každém tahu vybere dvě čísla, jejichž průměr je celočíselný, smaže je a připíše do písku onen průměr. Dokažte, že pro každé $n \geq 3$ umí PraSátko postupovat tak, že na konci zbyde v písku jediné číslo.

Úloha 4. (5 bodů)
Na tabuli jsou dvě čísla: 2014 a nějaké menší přirozené číslo n. Pokud je průměr čísel na tabuli celočíselný, Alča ho na tabuli připíše a jedno z původních dvou čísel smaže. Dokažte, že Alča může tuto operaci provést nejvýše desetkrát po sobě, a najděte n, pro nějž ji tolikrát skutečně může provést.

Úloha 5. (5 bodů)
E.T. k narozeninám dostal krásný kruhový dort a hned se rozhodl půlkruhovou část z něj věnovat nejlepšímu řešiteli PraSátka. Než ji ale stihl odkrojit, Pepa už dort nakrájel tradičním způsobem na právě $4k$ dílků tak, že $2k$ z nich bylo větších (navzájem stejných) a $2k$ menších (též navzájem stejných). Dokažte, že E.T. i tak našel několik sousedních dílků, které tvořily půlkruh. (Podařilo se mu tedy oddělit půlkruhovou část, aniž by musel nakrájené kousky přeuspořádat.)

Úloha 6. (5 bodů)
Podmnožinu množiny $M = \{1, 2, \dots, n\}$ nazveme *průměrnou*, pokud je neprázdná a průměr jejích prvků je celočíselný. Dokažte, že počet průměrných podmnožin množiny M má stejnou paritu[2] jako n.

Úloha 7. (5 bodů)
Aritmetickým poloměrem dvou čísel a, b rozumíme číslo $\frac{a+b}{4}$. Po poli skáče n jedniček. Když se dvě čísla potkají, zmizí a místo nich se na poli objeví jejich aritmetický poloměr. Takto čísla na poli postupně ubývají, až zbyde jen jedno. Dokažte, že toto číslo nebude menší než $\frac{1}{n}$.

[1] Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.
[2] Dvě čísla mají stejnou paritu, pokud jsou obě sudá nebo obě lichá.

Úloha 8. (5 bodů)

Buď ABC ostroúhlý trojúhelník se středem kružnice opsané O. Přímky AO, BO, CO protnou kružnice opsané trojúhelníkům OBC, OCA, OAB postupně v bodech D, E, F různých od O. Dokažte, že

$$|OD| \cdot |OE| \cdot |OF| \geq d^3,$$

kde d značí průměr kružnice opsané trojúhelníku ABC.