# Minima and Maxima

4TH AUTUMN SERIES — DATE DUE: 6TH JANUARY 2014

*Pozor, u této série přijímáme pouze řešení napsaná anglicky!*

PROBLEM 1. (3 POINTS)
Ann found a triangle with numbers 1 to 6 written at its vertices and midpoints of its sides (each number was used once). When she summed the triplets of numbers along the triangle sides, the largest sum was 15. When she summed the pairs of numbers along the midlines, the smallest sum was 4. What is the largest possible sum of the three numbers at the vertices?

PROBLEM 2. (3 POINTS)
Numbers $1, 2, \ldots, 2014$ are written around a circle in some order. What is the smallest possible sum of the absolute differences of adjacent numbers?

PROBLEM 3. (3 POINTS)
Martin loves every positive integer which does not contain digit 9 in its decimal representation and which becomes a square of an integer if any single of its digits is increased by one. Out of the numbers he loves, he loves the largest one the most. Which number is it?

PROBLEM 4. (5 POINTS)
In terms of $n$, what is the largest number of subsets of the set $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ which can be chosen such that every two chosen subsets have at most two elements in common?

PROBLEM 5. (5 POINTS)
Given an equilateral triangle $ABC$, let $\ell$ be a line passing through $A$ parallel to $BC$. For every point $S$ on $\ell$, consider a circle $\omega$ centered at $S$ and tangent to the line $BC$. Determine all positions of $S$ for which the length of arc of $\omega$ lying inside $\triangle ABC$ is the maximum possible.

PROBLEM 6. (5 POINTS)
Find the largest possible number of rooks that can be placed on a $3n \times 3n$ chessboard so that each rook is attacked[1] by at most one other rook.

PROBLEM 7. (5 POINTS)
An uncolored $7 \times 7$ chessboard is given. What is the smallest number of squares which can be colored black so that every 5-square (Greek) cross contains at least one black square?

PROBLEM 8. (5 POINTS)
In a certain grocery store, Bartcha noticed 100 boxes full of fruits. Every box contained apples, bananas, and pineapples. Prove that Bartcha can buy 51 of these boxes so that she gets at least half of the apples, bananas and pineapples simultaneously.

[1] A rook is attacked by another rook if they belong to the same row or column and there are no other rooks between them.

# Minima and Maxima – Introduction

This text aims to give you a basic grasp of what a typical solution of a problem involving minima or maxima should look like and warn about common mistakes. Perhaps the most instructive way of doing so is through an example.

**Problem.** Find the largest number of chess knights that can be placed on an $8 \times 8$ chessboard so that no knight is attacked by another knight.

*Solution.* The first step in attacking such problems is usually to "guess" the desired number.[2] In this case it might consist of trying various configurations of knights, observing conditions on them etc.

We may notice that if two knights attack each other, then they are necessarily placed on squares with different colors, thus by filling all the light (or all the dark) squares with knights gives a valid configuration of 32 knights. Since this seems like a promising number, let us try to prove that it is indeed the maximum. We have to show two separate propositions:

(i) that we are really able to distribute 32 knights on the chessboard in accordance with the given condition, and
(ii) that whenever we place at least 33 knights, there will be at least two of them attacking each other.

Concerning the proposition (i), we do not have much work left: We have already described one suitable placement in the previous paragraph. However, keep in mind that the solution of any minima/maxima problem is incomplete without providing an example (or at least proving the existence) of a situation in which the extremum is attained.

The proposition (ii) is more challenging. Seeing the configuration from (i), one might try to argue that we have placed the knights in "the best possible way", and hence there is no way to place more than 32 of them. Unfortunately, showing something like that is usually very difficult and the reasoning based on "best ways" is *almost never* correct.

A better approach is to examine a situation with too many knights and derive a contradiction. Consider a division of the chessboard into eight $2 \times 4$ rectangles. Observe that when there are more than 32 knights, one of these rectangles has to contain at least five of them. But in every such rectangle, each knight attacks exactly one square, thus each "covers" two squares out of eight. We infer that every rectangle can hold at most four non-attacking knights, contradicting the observation above.

The propositions (i) and (ii) together imply that 32 is indeed the sought largest number.

We hope that reading this short introduction helps you deal with any minima/maxima problems and wish you good luck in solving the problems of the 4th autumn series!

---

[2] Of course, this step is omitted if the problem already says what the sought extreme value is; that would be the case if the problem above was formulated like "Prove that the largest number of chess knights (...) is 32."

# Minima and Maxima

4TH AUTUMN SERIES | VZOROVÉ ŘEŠENÍ

## Problem 1.

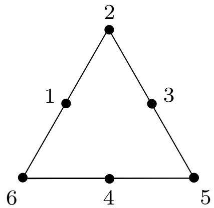
(70; 63; 2,73; 3,0)

*Ann found a triangle with numbers 1 to 6 written at its vertices and midpoints of its sides (each number was used once). When she summed the triplets of numbers along the triangle sides, the largest sum was 15. When she summed the pairs of numbers along the midlines, the smallest sum was 4. What is the largest possible sum of the three numbers at the vertices?*

*(Anička Doležalová)*

ŘEŠENÍ:

Keď hľadáme, aký je maximálny súčet vrcholov v trojuholníku, tak to je ekvivalentné úlohe nájsť minimálny súčet bodov, ktoré ležia v stredoch strán. Všimnime si, že súčet dvoch najmenších čísel (z týchto „stredových bodov") je 4, takže to bezpodmienečne musia byť čísla 1 a 3, a teda dvojka nemôže byť posledným stredovým bodom. Najmenšie číslo, ktoré môže byť ďalším stredovým bodom, je 4. Z toho vyplýva, že maximálny súčet vrcholov môže byť $13 = 6 + 5 + 2$. Zostáva nám už len ukázať, že také rozmiestnenie čísel vieme nájsť (viď obrázok) a splňuje zároveň aj podmienku, že súčet bodov na jednej (spodnej) strane je 15.




POZNÁMKY:

Úloha bola jednoduchá a skoro všetkým sa ju podarilo správne vyriešiť. Vo vzoráku som chcel ukázať iný spôsob, ako sa dalo prísť k výsledku. Väčšina ľudí postupovala priamočiarejšie – doplňali do trojuholníka postupne body a tak zistili, ako bude trojuholník vyzerať.

Na záver by som vám chcel ponúknuť luxusné video od *Rada Švarca*, ktorý nám riešenie podal v netradičnom prevedení :-). Nájdete ho na *http://www.youtube.com/watch?v=ARwwjlZ-pDQ*.

*(Viktor Szabados)*

## Problem 2.

(50; 35; 2,24; 3,0)

*Numbers* $1, 2, \ldots, 2014$ *are written around a circle in some order. What is the smallest possible sum of the absolute differences of adjacent numbers?*

*(Alča Skálová)*

ŘEŠENÍ:

Na kruhu najdeme číslo 1, vyrazíme z něj jedním směrem a budeme postupně sčítat absolutní hodnoty rozdílů sousedních čísel. Než narazíme na číslo 2014, je tento součet nutně alespoň

$2014 - 1 = 2013$. Můžeme si představit, že z výšky jednoho metru nad mořem stoupáme na horu vysokou 2014 metrů. Pak také musíme překonat převýšení 2013 metrů. Podobně pokud se od čísla 1 vydáme opačným směrem, součet je opět aspoň 2013. Dohromady tedy dostáváme $2013 + 2013 = 4026$.

Máme dolní odhad, zbývá zjistit, jestli je pro nějaký kruh takový součet možný. A to už je snadné: každý kruh, v němž je mezi 1 a 2014 oběma směry jen rostoucí posloupnost čísel, má součet absolutních hodnot rozdílů právě 4026 (neboť při cestě k vrcholu hory nijak zbytečně nestoupáme ani neklesáme).

Poznámky:

Naprostá většina řešitelů bez problémů došla ke správnému výsledku. Ne všichni si ale uvědomili, že nalezení jedné možnosti a prohlášení jí za minimum nestačí. Je potřeba ukázat, že součet pro jinou možnost nemůže být menší. Důkazy se objevily všelijaké, některé byly precizní a obecné, jiné si vystačily s podobným zjevným argumentem jako výše. *(Bára Kociánová)*

## Problem 3.

(49; 38; 2,22; 3,0)

*Martin loves every positive integer which does not contain digit 9 in its decimal representation and which becomes a square of an integer if any single of its digits is increased by one. Out of the numbers he loves, he loves the largest one the most. Which number is it?* *(Martin Čech)*

Řešení:

Označme si nějaké alespoň dvojciferné Martinovo oblíbené číslo jako $n$. Pak čísla $n+1$ i $n+10$ musí být čtverce. Nechť tedy $n + 1 = a^2$ a $n + 10 = b^2$, kde $a, b \in \mathbb{N}$ a navíc $a < b$. Po odečtení těchto rovnic dostáváme, že $b^2 - a^2 = 9$, neboli $(b + a)(b - a) = 9$. Z $b > a > 0$ plyne $b + a > b - a > 0$. Tato podmínka nám z možných rozkladů čísla 9 na součin dvou celých čísel zanechá jedinou možnost, a to $b + a = 9$, $b - a = 1$, z čehož dostáváme řešení $a = 4$, $b = 5$. Odtud máme $n = a^2 - 1 = 15$, které vyhovuje zadání. Číslo 15 je tak jediné alespoň dvojciferné Martinovo oblíbené, a je proto nejvyšší.

Poznámky:

Ačkoliv byla úloha docela jednoduchá, část řešitelů zapomněla na nějaké drobnosti, jako například proč nemusíme brát v úvahu rozklad 9 na záporná čísla. Za takové maličkosti jsem body nestrhával, rozhodl jsem se ale strhnout bod za to, že jste úplně bez důkazu tvrdili, že $5^2$, $4^2$ jsou jediné čtverce, jejichž rozdíl je 9. Není to pravda, protože $3^2 - 0^2 = 9$. Je však pravda, že to jsou čtverce největší, což k řešení úlohy stačí. Bohužel se našlo i pár takových, kteří si nepozorně přečetli zadání a předpokládali, že zvětšují jenom jednu cifru. *(Martin Čech)*

## Problem 4.

(48; 42; 3,79; 5,0)

*In terms of $n$, what is the largest number of subsets of the set $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ which can be chosen such that every two chosen subsets have at most two elements in common?* *(David Hruška)*

Řešení:

Začneme nejprve s malými hodnotami $n$. Pro $n \leq 2$ můžeme jistě vybrat všechny podmnožiny, a proto pro $n = 0, 1, 2$ máme postupně 1, 2 a 4 možné podmnožiny. Dále budeme uvažovat $n \geq 3$. Jistě můžeme vybrat všechny nejvýše tříprvkové podmnožiny, neboť tyto nemohou mít více než dva společné prvky s libovolnou jinou takovou množinou. Celkový počet vybraných množin pak bude roven

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \frac{n^3 + 5n + 6}{6},$$

což funguje dokonce i pro speciálně rozebíraná malá $n$.

Nyní dokážeme, že větší počet podmnožin není možné vybrat. Pro spor předpokládejme, že při největším možném počtu vybraných podmnožin máme vybranou některou podmnožinu $M$

s více než třemi prvky. Poté můžeme $M$ nahradit všemi jejími tříprvkovými podmnožinami – ty jsou určitě alespoň dvě a rovněž nemají společné více než dva prvky s ostatními vybranými podmnožinami. Toto je spor s tím, že se jednalo o největší počet podmnožin, a tedy není možné vybrat více podmnožin než všechny nejvýše tříprvkové.

Poznámky:
Naprostá většina z vás se dopracovala ke správnému výsledku, který ovšem mnohým vycházel o jedna menší, neboť z nějakého záhadného důvodu nemáte rádi prázdné množiny. Za absenci prázdné množiny jsem strhával jeden bod. Za správný výsledek jste mohli obdržet tři body, přičemž další dva na vás čekaly za důkaz, že se opravdu jedná o maximum. Klasický problém tu totiž spočíval v tom, že jste mluvili o výhodnosti použití všech trojic a o tom, jak si výběrem té či oné větší množiny zakážeme více dalších množin, takže je to pro nás velice nevýhodné. Nemusím snad dodávat, že tyto argumenty o výhodnosti jsou skvělým prvkem reklam, ovšem v matematickém důkazu už mají využití značně menší :) *(Lukáš Zavřel)*

## Problem 5.

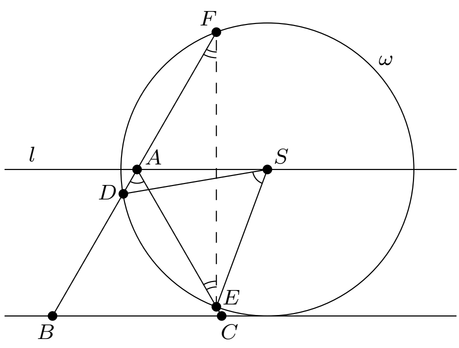
(42; 27; 3,00; 3,5)

*Given an equilateral triangle $ABC$, let $\ell$ be a line passing through $A$ parallel to $BC$. For every point $S$ on $\ell$, consider a circle $\omega$ centered at $S$ and tangent to the line $BC$. Determine all positions of $S$ for which the length of arc of $\omega$ lying inside $\triangle ABC$ is the maximum possible.*

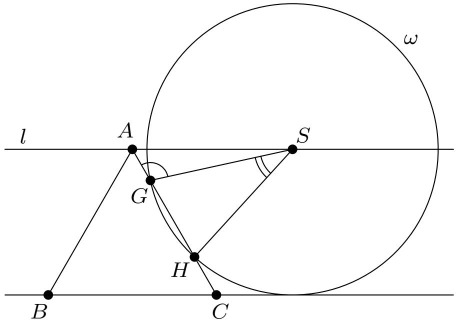
*(David Hruška)*

Řešení:
Pro libovolný bod $S \in l$ je poloměr odpovídající kružnice $\omega$ dán vzdáleností $d$ přímek $l$ a $BC$. Pro délku $L$ kružnicového oblouku platí $L = \alpha \cdot r$, kde $r$ je poloměr kružnice a $\alpha$ je příslušný středový úhel v radiánech ($\pi = 180°$). Jelikož všechny kružnice $\omega$ mají stejný poloměr $d$, je maximalita délky oblouku ekvivalentní maximalitě příslušného středového úhlu. Rozlišíme dva případy. V obou můžeme vzhledem k symetrii BÚNO předpokládat, že body $C$ a $S$ leží ve stejné polorovině určené přímkou $AB$ (bod $S$ je „vpravo“ od $A$ nebo přímo $S = A$).

(i) $|AS| \leq d$. V tomto případě protíná kružnice $\omega$ obě úsečky $AB$ i $AC$, každou právě jednou. Označme jejich průsečíky s $\omega$ po řadě $D$, $E$ ($E \neq A$). Přímka $l$ svírá s polopřímkou $AC$ i s polopřímkou opačnou k polopřímce $AB$ úhel $60°$, průsečík $\omega$ s touto opačnou polopřímkou označme $F$ ($F \neq A$). Navíc tyto dvě polopřímky neleží na jedné přímce, tedy jsou osově souměrné podle $l$. Kružnice $\omega$ je taktéž osově souměrná podle $l$, proto jsou i odpovídající průsečíky $E$ a $F$ osově souměrné podle $l$, tedy přímka $EF$ je kolmá na $l$ i na $BC$. Z toho již snadno zjistíme, že $|\sphericalangle AFE| = 30°$. Kratšímu oblouku $DE$ odpovídá obvodový úhel $30°$, čili příslušný středový úhel má velikost $60°$.



(ii) $|AS| > d$. Kružnice $\omega$ tentokrát protíná pouze stranu $AC$ (pokud ji neprotíná, zkoumaný oblouk neexistuje), a to ve dvou bodech (pokud se $\omega$ dotýká $AC$, oblouk má nulovou délku). Označme $G$ průsečík bližší k $A$. Podívejme se na trojúhelník $ASG$. Jelikož $|\sphericalangle GAS| = 60°$, platí $|\sphericalangle CGS| = |\sphericalangle GAS| + |\sphericalangle ASG| > |\sphericalangle GAS| = 60°$. Trojúhelník $GSH$, kde $H$ je druhý průsečík $AC$ s $\omega$, je zřejmě rovnoramenný, tedy $|\sphericalangle GSH| = 180° - 2 \cdot |\sphericalangle HGS| < 60°$.




Délka oblouku ležícího uvnitř trojúhelníku $ABC$ je tedy maximální, právě když $|AS| \leq d$.

Poznámky:

S nadsázkou lze říci, že co řešení, to unikát. Ke slovu se dostala kromě standardního úhlení sinová i kosinová věta, věta o úhlu tětiv, shodná zobrazení, a co by to bylo za geometrii, kdyby ji alespoň někdo nevyřešil analyticky. Úloha se takříkajíc vzdala téměř jakémukoliv útoku. Pro fajnšmekry dodávám na rozmyšlenou – jak s řešením souvisí tzv. „antišvrk"?[3] Většina řešitelů přešla část (ii) jen s konstatováním, že když se bod $S$ vzdaluje od $A$, délka oblouku uvnitř $ABC$ se zmenšuje, apod. Použitá tvrzení tohoto typu byla sice velmi intuitivní a snadno dokazatelná, takže jsem za pouhé jejich zmínění body nestrhával, ale přesto je vždy lepší je alespoň stručně dokázat. Řešitele, kteří se o to s úspěchem pokusili, jsem ocenil kladným imaginárním bodem. Někteří řešitelé mě potěšili velmi dobrou angličtinou (občas asi lepší, než je ta moje), ostatní bych chtěl povzbudit k dalšímu zdokonalování se v tomto jazyce, odborném i obecném, neboť o jeho uplatnění v obou oblastech nemůže být pochyb. *(David Hruška)*

## Problem 6.

(56; 46; 3,34; 4,0)

*Find the largest possible number of rooks that can be placed on a $3n \times 3n$ chessboard so that each rook is attacked[4] by at most one other rook.* *(Alča Skálová)*

Řešení:

Ukážeme, že maximální počet věží, které lze rozmístit dle zadání, je $4n$.

Předně si všimněme, že v jednom řádku či sloupci mohou být nejvýše dvě věže. Jsou-li navíc v nějakém řádku, resp. sloupci šachovnice dvě věže, pak se ve sloupcích, resp. řádcích, kde tyto dvě věže stojí, již nemůže nacházet žádná další věž.

Pro spor předpokládejme, že se nám na šachovnici podařilo korektně rozmístit alespoň $4n+1$ věží. Potom musí být v alespoň $n+1$ řádcích dvě věže. Tyto dvojice věží vynucují existenci alespoň $2(n+1)$ sloupců, ve kterých je pouze jedna věž. Ve zabývajících nejvýše $n-2$ sloupcích

[3] *http://iksko.org/files/sbornik1.pdf*

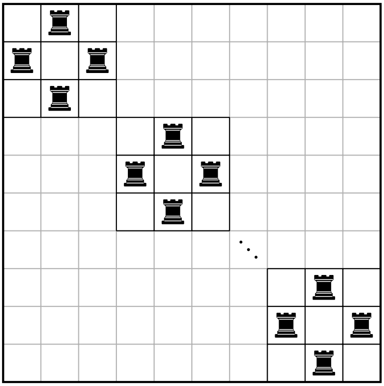
[4] A rook is attacked by another rook if they belong to the same row or column and there are no other rooks between them.

mohou být nejvýše dvě věže, tedy pokud spočítáme celkový počet věží na šachovnici přes sloupce, zjistíme, že věží je na šachovnici nejvýše

$$2(n+1) + 2(n-2) = 4n - 2 < 4n + 1,$$

což je hledaný spor.

Možností, jak na šachovnici $3n \times 3n$ správně rozmístit $4n$ věží, je mnoho – jeden možný způsob je celou šachovnici rozdělit na čtverce $3 \times 3$, vzít ty na diagonále a do každého z nich umístit čtyři věže tak, aby se po dvou ohrožovaly („do kříže“). Situaci ilustruje obrázek:



Poznámky:
Většina řešení nepostupovala jako výše uvedené, ale zakládala se na úvaze, že dvojice ohrožujících se věží „zabere“ dva řádky a jeden sloupec či naopak, tedy do šachovnice, která má dohromady $6n$ sloupců a řádků, můžeme takovýchto dvojic umístit nanejvýš $2n$. Pak je ovšem potřeba se ještě nějak vypořádat s případnými věžemi, které nejsou vůbec ohroženy, přičemž pouhé konstatování, že ty „nejsou tak výhodné“, nestačí – co kdyby byl maximální rozestavitelný počet věží lichý? Za tuto nedbalost jsem strhával bod. Mnoha řešitelům však úloha nečinila žádné obtíže a vysloužili si plný bodový zisk. *(Alexander „Olin“ Slávik)*

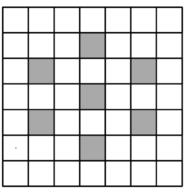
## Problem 7.

(53; 34; 3,09; 4,0)

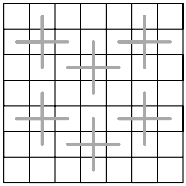
*An uncolored $7 \times 7$ chessboard is given. What is the smallest number of squares which can be colored black so that every 5-square (Greek) cross contains at least one black square?*

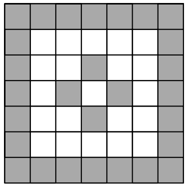
*(Martin Töpfer)*

Řešení:
Vyhovující obarvení sedmi polí je znázorněno na následujícím obrázku.

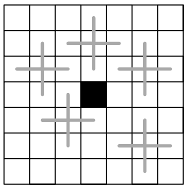


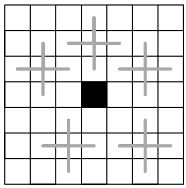
Nyní pro spor předpokládejme, že stačí obarvit nejvýše šest polí. Když tabulku $7 \times 7$ pokryjeme šesti nepřekrývajícími se kříži (viz obrázek), bude muset být v každém kříži právě jedno obarvené políčko. To znamená, že políčka mimo tyto kříže nemohou být obarvená. To samé platí i v případě, že znázorněné pokrytí otočíme o $90^\circ$, tedy obarvené nemůže být žádné z šedých políček na obrázku vpravo. K tomu, aby středový kříž obsahoval obarvené políčko, musí být obarvené prostřední pole.





Stejný trik nyní zopakujeme. Protože je prostřední pole již obarvené, budeme pokrývat zbylá pole pěti nepřekrývajícími se kříži. Opět bude muset každý z nich obsahovat právě jedno obarvené pole, a tedy pole mimo kříže musí být neobarvená. Využijeme tato dvě pokrytí:





Když uvážíme všechna čtyři otočení pokrytí vlevo a u pokrytí vpravo uvážíme nejen jeho otočení, ale i otočení jeho symetrické varianty, vyloučíme tak obarvení všech políček kromě prostředního. To ale znamená, že vyhovující pokrytí má obarvené jediné políčko, což je zjevně spor.

Poznámky:

Sedmá úloha s šachovnicí $7 \times 7$ a výsledkem 7 nalákala nezvykle mnoho řešitelů. Bohužel v mnohých řešeních úplně chyběl pokus o důkaz, že nestačí obarvit šest políček. Občas se vyskytlo i vágní přesvědčování, že jsme vybírali ta nejlepší možná políčka. Takový postup ale u podobných úloh téměř nikdy nevede ke kýženému výsledku a ani tato úloha nebyla výjimkou.

Často se v řešení objevovalo počítání, kolik křížů obarvením daného políčka „vyřešíme". Tento postup většinou slavil úspěch, jen bylo potřeba pořádně rozebrat situace s kříži v rohu. Chtěl bych také vyzdvihnout naprosto originální řešení *Eduarda Batmendijna*, který si tím vysloužil imaginární bod a můj věčný obdiv. *(Martin Töpfer)*

## Problem 8.

(12; 2; 0,67; 0,0)

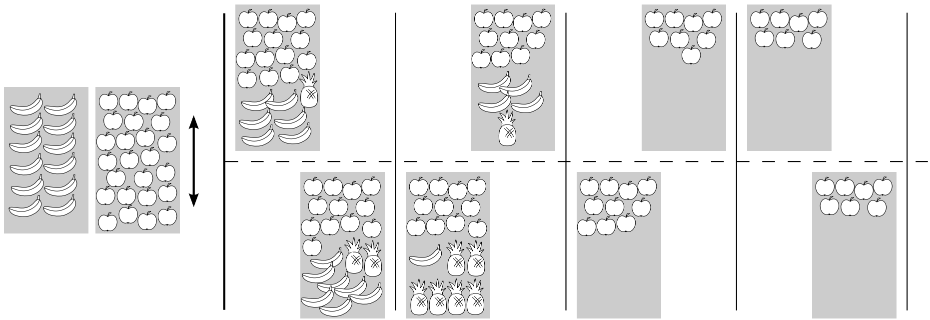
*In a certain grocery store, Bartcha noticed 100 boxes full of fruits. Every box contained apples, bananas, and pineapples. Prove that Bartcha can buy 51 of these boxes so that she gets at least half of the apples, bananas and pineapples simultaneously.* *(Martina Vaváčková)*

Řešení:

Z celkového počtu 100 přepravek odebereme tu s největším počtem jablek a ze zbylých 99 tu s největším počtem banánů – označme je postupně $J$ a $B$. Zbývajících 98 přepravek seřadíme sestupně podle počtu jablek a rozdělíme je do dvojic (první s druhou, třetí se čtvrtou, až devadesátá sedmá s devadesátou osmou).

Nyní vytvoříme dvě skupiny po 49 přepravkách. Budeme postupně brát všechny dvojice a přepravku s větším počtem banánů vždy umístíme do skupiny, v níž je aktuálně banánů méně, druhou přepravku do druhé skupiny. Pokud je v obou přepravkách nebo v obou skupinách aktuálně stejný počet banánů, můžeme si vybrat, kterou přepravku dáme kam. Tímto postupem zajistíme, že v každém kroku se budou počty banánů v jednotlivých skupinách lišit nejvýše o počet banánů v $B$. Když tedy k libovolné ze skupin přidáme přepravky $B$ a $J$, budeme mít zaručeno, že zde máme nadpoloviční většinu banánů.

Ukážeme, že totéž platí pro jablka. Označme počty jablek v přepravkách v první, resp. v druhé skupině sestupně $a_1, a_2, \ldots, a_{49}$, resp. $b_1, b_2, \ldots, b_{49}$. Označme počet jablek v $J$ jako $a_0$ a přidejme tuto přepravku k první skupině. Pak platí $a_i \geq b_{i+1}$, $i = 0, \ldots, 48$. Po sečtení všech nerovností dostaneme, že počet jablek v první skupině spolu s $J$ je větší nebo roven počtu jablek v druhé skupině. Stejnou úvahu můžeme provést i naopak.



Stačí tedy vybrat skupinu s větším počtem ananasů a přidat k ní přepravky $B$ a $J$. Takto Barča v každém případě získá 51 přepravek, v nichž bude dohromady alespoň polovina celkového počtu jablek, banánů i ananasů.

Poznámky:

Sešla se spousta řešení, z nichž drtivá většina byla špatně. Obzvlášť typické byly chybné předpoklady, které úlohu zjednodušily natolik, že se z ní stala očividná záležitost.

*(Martina Vaváčková)*