Finální myšmaš

4. jarní série Termín odeslání: 5. května 2014

V této sérii nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, ale podle témat (v rámci každého tématu je jedna úloha snazší a jedna obtížnější). Pozor, počítají se body za všechny úlohy!

Úloha 1.

Kuba našel v šuplíku čtverečkovaný papír o rozměrech 20×14. Několikrát jej přehnul podél stran čtverečků, čímž dostal jediný čtvereček 1×1. Kolik nejvíce kusů může vzniknout, pokud Kuba rozstřihne takto složený papír podél

(a) úsečky spojující středy dvou protějších stran? (2 body)

(b) úsečky spojující středy dvou sousedních stran? (3 body)

Úloha 2.

(a) Na straně AB konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ je dán bod E tak, že $EC \parallel AD$ a $ED \parallel BC$. Dokažte, že

$$S_{CDE} \leq \frac{1}{3} S_{ABCD},$$

kde S_{CDE} a S_{ABCD} značí obsahy příslušných mnohoúhelníků. (2 body)

(b) Mějme různostranný ostroúhlý trojúhelník ABC. Označme H průsečík jeho výšek. Osa ostrého úhlu svíraného výškami z vrcholů B, C protne strany AB, AC po řadě v bodech P, Q. Nakonec buď M střed strany BC a R průsečík osy vnitřního úhlu u vrcholu A s úsečkou MH. Dokažte, že body A, P, Q, R leží na jedné kružnici. (3 body)

Úloha 3.

(a) Nalezněte funkci definovanou na reálných číslech, jejímž grafem je lomená čára[1] a která nabývá každé reálné hodnoty právě třikrát. (2 body)

(b) Pro která přirozená čísla n existuje polynom f stupně n a nekonečná posloupnost navzájem různých přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots$ taková, že platí $f(a_1) = 0$ a $f(a_i) = a_{i-1}$ pro každé $i > 1$? (3 body)

Úloha 4.

V některých k políčkách tabulky 10×10 je neviditelným inkoustem nakreslená jedna úhlopříčka. Čuch chce zjistit, která políčka to jsou. Když ukáže shora či zdola na nějaký sloupec nebo zleva či zprava na nějaký řádek, dozví se, kudy by z tabulky vyletěl paprsek světla, kdyby do ní vletěl právě z onoho směru a odrážel se pouze od vyznačených úhlopříček jako od zrcadel. Kolikrát nejméně musí Čuch do tabulky ukázat, aby potom mohl vždy s jistotou určit, kde se zrcátka nacházejí, pokud

(a) $k = 2$, (2 body)

(b) $k = 3$? (3 body)

[1] *Lomená čára* je množina libovolně (tedy i nekonečně) mnoha na sebe navazujících úseček.

Úloha 5.

(a) Mějme posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots$ takovou, že každé přirozené číslo se v ní nachází právě jednou. Dokažte, že pak existují přirozená čísla l, m, pro která platí $1 < l < m$ a $a_1 + a_m = 2a_l$. (2 body)

(b) Rozmístěte čísla $1, 2, \ldots, n$ do řady tak, aby aritmetický průměr žádných dvou z nich neležel mezi nimi. (3 body)

Úloha 6.

(a) Některé body na přímce p jsou *fešné*. Navíc platí: vezmeme-li libovolný bod z p, pak jeho vzdálenost od alespoň jednoho z fešných bodů je iracionální. Kolik nejméně může být fešných bodů? (2 body)

(b) Řešte tutéž úlohu, je-li p rovina (nikoli přímka). (3 body)

Úloha 7.

(a) Najděte konvexní mnohostěn, jehož stěny lze obarvit černě a bíle tak, aby černých stěn bylo více než bílých, ale žádné dvě černé stěny neměly společnou hranu. (2 body)

(b) Dokažte, že žádnému takovému mnohostěnu nelze vepsat kouli.[2] (3 body)

[2] Koule *vepsaná* mnohostěnu se dotýká všech jeho stěn.

Finální myšmaš

4. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(31; 25; 3,35; 4,0)

Kuba našel v šuplíku čtverečkovaný papír o rozměrech 20×14. *Několikrát jej přehnul podél stran čtverečků, čímž dostal jediný čtvereček* 1×1. *Kolik nejvíce kusů může vzniknout, pokud Kuba rozstřihne takto složený papír podél*

(a) *úsečky spojující středy dvou protějších stran?* *(Pepa Tkadlec)*

(b) *úsečky spojující středy dvou sousedních stran?* *(Pepa Tkadlec)*

ŘEŠENÍ:

(a) Obarvíme si všechny vodorovné čáry červeně a svislé žlutě. Při každém přehnutí se červené čáry přehnou na červené a žluté na žluté, výsledný čtvereček tedy opět bude mít červené vodorovné a žluté svislé hrany. Jedním střihem tedy přestřihneme buď všechny červené, nebo všechny žluté hrany, čímž rozstřihneme papír na několik proužků – buď 15, nebo 21. Nejvyšší počet částí, na které můžeme papír rozstřihnout, je tedy 21 (zřejmě tohoto počtu dosáhnout umíme).

(b) Tentokrát obarvíme vrcholy čtverečků, a to čtyřmi barvami – tak, aby žádný čtvereček neměl dva vrcholy stejné barvy a aby v každém řádku i sloupci byly použité barvy právě dvě. Všimneme si, že při každém přehnutí na sebe opět položíme vrcholy stejné barvy, výsledný složený papír tedy bude mít všechny stejnobarevné body pod sebou. Odstřižením bodů jedné barvy dostáváme jen čtyři možné podoby rozstříhaného papíru v závislosti na odstřižené barvě. Vznikne tolik částí, kolik je vrcholů odstřižené barvy, nesmíme však zapomenout na „velkou děravou“ část. Celkem tak dostaneme nejvýše 89 částí.

POZNÁMKY:

Ve vzorovém řešení jsme úlohu vyřešili pomocí obarvování, protože to je krásná technika, po jejímž použití se úloha hned vzdá. Na ni ovšem žádný z řešitelů nepřišel. Většina řešení však byla správně, úloha se tedy ukázala spíše jednoduchou. Nejčastěji řešitelé využili pozorování, že řezy na dvou sousedních čtverečcích musejí být osově souměrné podle jejich společné hrany, což znamená, že stačí znát směr řezu v jediném čtverečku, abychom mohli určit všechny ostatní. Strhával jsem body za nezdůvodnění toho, že v části (a) vždy vzniknou stejně dlouhé proužky papíru a v části (b) vzniknou „čtvercové díry kolem některých vrcholů“. *(Martin Čech)*

Úloha 2.

(33; 29; 2,42; 2,0)

(a) *Na straně* AB *konvexního čtyřúhelníku* $ABCD$ *je dán bod* E *tak, že* $EC \parallel AD$ *a* $ED \parallel BC$. *Dokažte, že*

$$S_{CDE} \leq \frac{1}{3} S_{ABCD},$$

kde S_{CDE} *a* S_{ABCD} *značí obsahy příslušných mnohoúhelníků.* *(Martina Vaváčková)*

(b) *Mějme různostranný ostroúhlý trojúhelník ABC. Označme H průsečík jeho výšek. Osa ostrého úhlu svíraného výškami z vrcholů B, C protne strany AB, AC po řadě v bodech P, Q. Nakonec buď M střed strany BC a R průsečík osy vnitřního úhlu u vrcholu A s úsečkou MH. Dokažte, že body A, P, Q, R leží na jedné kružnici.* *(Martina Vaváčková)*

Řešení:

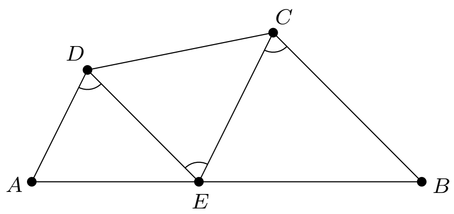
(a) Protože $AD \parallel EC$, je $|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle CEB|$; stejně tak, protože $ED \parallel BC$, je $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle EBC|$. Podle věty *uu* tedy platí $\triangle AED \sim \triangle EBC$. Koeficient podobnosti označme k, neboli $|AD| : |EC| = k$. Střídavé úhly mají stejnou velikost, proto

$$|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle ECB| = \alpha.$$

Poznamenejme, že $\sin\alpha > 0$. Ekvivalentně upravujme nerovnost ze zadání:

$$\begin{aligned}
S_{CDE} &\leq \tfrac{1}{3} S_{ABCD},\\
3S_{CDE} &\leq S_{AED} + S_{CDE} + S_{EBC},\\
2S_{CDE} &\leq S_{AED} + S_{EBC},\\
2\left(\tfrac{1}{2}\cdot (k|AD|)\cdot |DE| \cdot \sin\alpha\right) &\leq \left(\tfrac{1}{2}\cdot |AD|\cdot |DE|\cdot \sin\alpha\right) + \left(\tfrac{1}{2}\cdot (k|AD|)\cdot (k|DE|)\cdot \sin\alpha\right),\\
2k &\leq 1 + k^2,\\
0 &\leq (k-1)^2.
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost platí pro všechna reálná k a provedené úpravy byly ekvivalentní, proto platí i původní nerovnost.

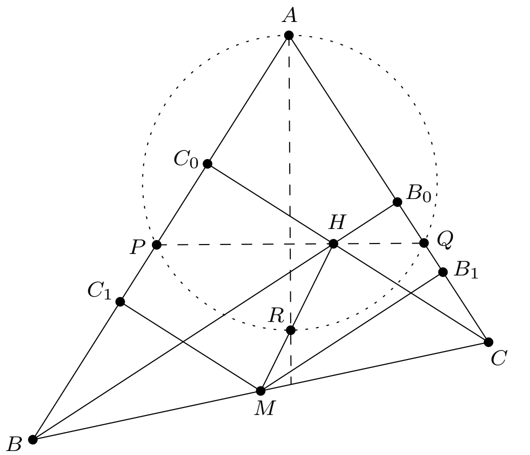


(b) Označme B_0, C_0 postupně paty výšek z vrcholů B, C. Ukážeme-li, že přímky RP, RQ jsou kolmicemi na strany AB, AC, již z toho plyne dokazované – body A, P, R, Q leží na kružnici nad průměrem AR. Konkrétně tedy dokážeme, že následující čtveřice přímek se protne v jednom bodě: osa úhlu u vrcholu A, přímka HM, kolmice na AB procházející P a kolmice na AC procházející Q.

Spočteme $|\sphericalangle HPC_0| = 90^\circ - |\sphericalangle C_0HP| = 90^\circ - |\sphericalangle B_0HQ| = |\sphericalangle B_0QH|$. (V prostřední rovnosti jsme využili skutečnosti, že OP je osou úhlu.) Díky tomu je trojúhelník APQ rovnoramenný. Tudíž se osa úhlu u vrcholu A a požadované dvě kolmice protnou v jednom bodě. Zbývá ukázat, že tento průsečík leží na přímce HM.

Nakonec ještě označme B_1, C_1 postupně kolmé projekce bodu M na strany AC, AB. Jelikož jsou trojúhelníky CC_0B a BB_0C pravoúhlé, je B_1 středem úsečky B_0C a C_1 středem úsečky C_0B. Dále platí $|\sphericalangle HCB_0| = 90^\circ - |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle HBC_0|$, navíc jsou oba trojúhelníky HCB_0, HBC_0 pravoúhlé, a proto podobné. V obou těchto podobných trojúhelnících je přímka PQ osou úhlu, proto $|B_0Q| : |B_1Q| = |C_0P| : |C_1P|$.

Kolmice na stranu AB vedená bodem P dělí úsečku HM v poměru $|C_0P| : |C_1P|$; ve stejném poměru ji dělí i kolmice vedená bodem Q na stranu AB. Proto tyto dvě kolmice protínají HM v jednom bodě, což jsme chtěli dokázat.



Poznámky:

S první úlohou si poradil prakticky každý, kdo se do ní pustil. Zásadní bylo všimnout si podobnosti trojúhelníků. Pak už stačilo vyjádřit obsahy a dojít ke známé nerovnosti. Jen mě zarazilo, že několik řešitelů počítalo obsah trojúhelníku jako dvojnásobek platného vzorce $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, kde γ je úhel mezi stranami a, b. Na další postup chyba neměla vliv, ale ta polovina tam opravdu patří.

Druhá úloha naopak dělala velké problémy. I došlých řešení bylo poskrovnu, navíc velká část z nich skončila ještě před dotažením důkazu. Zaujalo mě, že z těch správných řešení žádná dvě nebyla stejná, každý řešitel postupoval jiným způsobem. Využívali stejnolehlost, osovou symetrii i další zobrazení a více či méně komplikovaně nakonec došli k cíli. *(Bára Kociánová)*

Úloha 3.

(29; 23; 2,48; 2,0)

(a) *Nalezněte funkci definovanou na reálných číslech, jejímž grafem je lomená čára*[3] *a která nabývá každé reálné hodnoty právě třikrát.* *(David Hruška)*

(b) *Pro která přirozená čísla n existuje polynom f stupně n a nekonečná posloupnost navzájem různých přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots$ taková, že platí $f(a_1) = 0$ a $f(a_i) = a_{i-1}$ pro každé $i > 1$?* *(David Hruška)*

Řešení:

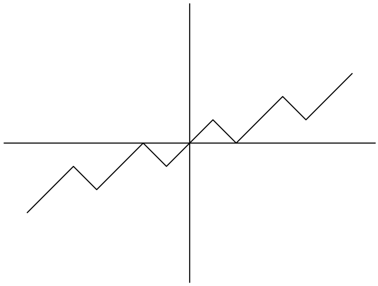
(a) (Podľa Jána Jurku)

Zadanie splňuje funkcia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná tak, že pre každé $k \in \mathbb{Z}$ platí:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2k & \text{pre } 3k - 1 \le x \le 3k + 1, \\ -x + 2 + 4k & \text{pre } 3k + 1 \le x \le 3k + 2. \end{cases}$$

Graf tejto funkcie vyzerá takto:

[3] *Lomená čára* je množina libovolně (tedy i nekonečně) mnoha na sebe navazujících úseček.



Z obrázku je jasné, že táto funkcia vyhovuje zadaniu.

(b) (Podľa Mateja Konečného)
Pre $n = 1$ existuje napríklad polynóm $f(x) = x - 1$ s postupnosťou $a_i = i$. Sporom ukážeme, že pre $n \geq 2$ taký polynóm nenájdeme.

Nech teda existuje taký polynóm f, ktorý splňuje naše zadanie. Podľa znamienka pri vedúcom koeficiente je náš polynóm od nejakého x buď stále kladný, alebo stále záporný. Ak by bol od tohto x stále záporný, tak by náš polynóm f mohol nadobúdať iba konečne veľa kladných hodnôt, čo je spor. Keďže je náš polynóm stupňa aspoň dva, potom aj polynóm $f(x) - x$ je od nejakého x_0 stále kladný. Tým pádom pre všetky x väčšie ako x_0 platí $f(x) > x$.

Označme i_0 také prirodzené číslo, že pre všetky prirodzené i väčšie ako i_0 platí, že aj a_i je väčšie ako x_0. (Poznamenajme, že také i_0 existuje, pretože a_i je nekonečná postupnosť rôznych prirodzených čísel a tých, ktoré sú menšie ako x_0, je konečne veľa.)

Pozrime sa na našu postupnosť $a_{i_0+1}, a_{i_0+2}, \ldots$. Zo zadania platí, že $a_{i_0+j} = f(a_{i_0+j+1})$ pre všetky prirodzené j, a keďže a_{i_0+j+1} je väčšie ako x_0, tak platí aj $f(a_{i_0+j+1}) > a_{i_0+j+1}$. Podobnou úvahou dostávame, že $a_{i_0+j} > a_{i_0+j+1} > a_{i_0+j+2} > \cdots$. Keďže neexistuje nekonečná klesajúca postupnosť prirodzených čísel, tak sa dostávame k sporu, že taký polynóm $f(x)$ existuje.

Poznámky:
Komentár k (a): Došlo mi veľa rozmanitých predpisov funkcií, ktoré vyhovovali zadaniu. Väčšina z vás mala obrázok podobný tomu, ktorý je uvedený vo vzoráku.

Komentár k (b): Chcel by som vás pochváliť, že ste sa nezľakli zadania a pokúsili sa ho vyriešiť. Všetci ste to mali viac-menej správne, čo ma potešilo. *(Viktor Szabados)*

Úloha 4.

(39; 20; 2,05; 2,0)

V některých k políčkách tabulky 10×10 je neviditelným inkoustem nakreslená jedna úhlopříčka. Čuch chce zjistit, která políčka to jsou. Když ukáže shora či zdola na nějaký sloupec nebo zleva či zprava na nějaký řádek, dozví se, kudy by z tabulky vyletěl paprsek světla, kdyby do ní vletěl právě z onoho směru a odrážel se pouze od vyznačených úhlopříček jako od zrcadel. Kolikrát nejméně musí Čuch do tabulky ukázat, aby potom mohl vždy s jistotou určit, kde se zrcátka nacházejí, pokud

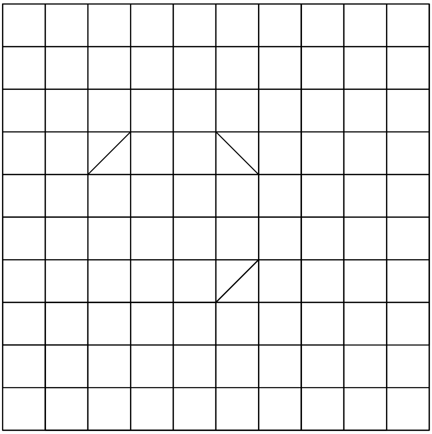
(a) $k = 2$, *(Martin Čech)*

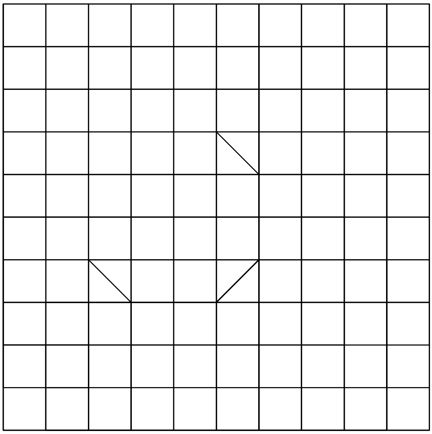
(b) $k = 3$? *(David Hruška)*

Řešení:
(a) Nejprve dokážeme, že deset ukázání nestačí. Po devíti ukázáních totiž určitě najdeme alespoň jeden sloupec nebo řádek, v němž Čuch neukázal na alespoň dvě políčka. Jsou-li zrcátka zrovna na těchto políčkách, pak Čuch nemůže jedním ukázáním zjistit, jak jsou natočená.

Nyní dokážeme, že jedenáct pokusů stačí. Čuch bude postupně odshora ukazovat na jednotlivé řádky. Jakmile narazí na zrcátko (což je právě tehdy, když paprsek nevyletí na druhé straně), ukáže na příslušný řádek z druhé strany. Tím určí počet a polohu zrcátek v tomto řádku. Pokud našel pouze jedno zrcátko, pokračuje dále, dokud nenarazí na řádek se zrcátkem. Polohu tohoto zrcátka už umí jednoznačně určit. Ukázal tedy na devět řádků nejvýše jednou a na jeden dvakrát, což je dohromady nanejvýš jedenáct pokusů.

(b) Čuchovi se to nemusí podařit, ať svítí jakkoli – existují totiž dvě různá rozmístění zrcátek taková, že každý vyslaný paprsek vyletí z obou na stejném místě. Jedna z mnoha možných dvojic je na obrázku:





Poznámky:
Část (a) se nakonec ukázala skoro těžší než část (b). Bylo to hlavně proto, že jsem se rozhodl být přísný a strhávat bod za neúplný důkaz toho, že deset ukázání nestačí. Tvrzeními typu „nejvýhodnější bude …“ nebo „nejhorší, co se může stát, je, že …“ začínají přesně ty části důkazů, za které se nejčastěji strhávají body – je tedy potřeba je pořádně odůvodnit nebo vysvětlit (spousta řešitelů používajících tyto výrazy navíc dospěla k závěru, že u tří zrcátek je potřeba 18–19 pokusů, přestože většinou to jde na 12). Řešení části (b) bylo možná trochu nečekané, ale nebylo to tak těžké – při rozebírání možností se na něj nutně muselo narazit. Překvapivě se však našlo několik zkušených řešitelů, kteří se pokusili dokázat, že dvanáct ukázání stačí. Za to jsem uděloval jeden bod. *(Martin Čech)*

Úloha 5. (24; 20; 3,50; 4,5)

(a) *Mějme posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots$ takovou, že každé přirozené číslo se v ní nachází právě jednou. Dokažte, že pak existují přirozená čísla l, m, pro která platí $1 < l < m$ a $a_1 + a_m = 2a_l$.* *(Alča Skálová)*

(b) *Rozmístěte čísla $1, 2, \ldots, n$ do řady tak, aby aritmetický průměr žádných dvou z nich neležel mezi nimi.* *(Tomáš „Šavlík“ Pavlík)*

Řešení:
(a) Najdeme nejmenší index l takový, že $a_l > a_1$, a dále budeme hledat index m, aby platila rovnost ze zadání: $a_1 + a_m = 2a_l$, kterou si upravíme na $a_m = 2a_l - a_1$. Jelikož je v posloupnosti

každé přirozené číslo právě jednou, je v ní i toto číslo a_m. Platí $a_l > a_1$, proto $2a_l - a_1 > a_l$, tedy $a_m > a_l > a_1$. Protože l je nejmenší index čísla většího než a_1, je index m určitě větší. V libovolné posloupnosti přirozených čísel tedy umíme najít indexy l, m takové, že platí $1 < l < m$ a zároveň $a_1 + a_m = 2a_l$.

(b) Konečné posloupnosti čísel, ve které mezi žádnými dvěma čísly neleží jejich aritmetický průměr, budeme nazývat *vhodné*. Vhodnou n-prvkovou permutací rozumíme vhodnou n-prvkovou posloupnost, která obsahuje každé číslo $1, \ldots, n$ právě jednou. Automaticky je 1-prvková permutace vhodná, jelikož ani neobsahuje dva různé členy.

Z n-prvkové vhodné permutace $a_1, \ldots, a_n$ sestrojíme $2n$-prvkovou vhodnou permutaci. Pro dané x, y, z je výrok „y je aritmetickým průměrem x a z" ekvivalentní výroku „$2y$ je aritmetickým průměrem $2x$ a $2z$" a rovněž výroku „$2y - 1$ je aritmetickým průměrem $2x - 1$ a $2z - 1$". Proto je vhodná i posloupnost

$$2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_n \quad \text{a stejně tak} \quad 2a_1 - 1, 2a_2 - 1, \ldots, 2a_n - 1.$$

Zbývá si uvědomit, že položením obou vhodných posloupností za sebe získáme stále vhodnou posloupnost – první posloupnost totiž obsahuje pouze sudá čísla a druhá lichá, nemá tedy smysl uvažovat průměry napříč oběma posloupnostmi. Navíc je zde použito právě jednou každé číslo od 1 do $2n$, tedy jedná se o kýženou $2n$-prvkovou permutaci.

Opakováním tohoto postupu vyřešíme úlohu pro všechna n, která jsou mocninou dvojky. Pro n různé od mocniny dvojky stačí uvážit konstrukci pro nejbližší vyšší mocninu dvojky a následně nadbytečné prvky z permutace odebrat, čímž se její vhodnost neporuší.

Poznámky:

K části (a): Některá řešení se více či méně podobala tomu výše uvedenému, které mi připadá nejsnadnější. Zbytek většinou našel někde v posloupnosti číslo $a_1 + 1$ a postupoval sporem. Zjistil, že v nevyhovující posloupnosti by všechna $a_1 + 2^k$, $k > 0$, musela ležet před $a_1 + 1$. Což ale nelze, protože bychom před $a_1 + 1$ měli nekonečně mnoho členů. Oba postupy jsou správné a většina řešitelů si vysloužila dva body.

K části (b): I v této části byly dva oblíbené způsoby řešení. Kromě tohoto indukčního se řešitelé pouštěli do důkazu správnosti rekurzivního algoritmu, v němž v každém kroku rozdělili část posloupnosti na dvě podle zbytků po dělení mocninou dvou. Ti, kteří se nezamotali v indexech a úvahách, dostali plný počet bodů. *(Bára Kociánová)*

Úloha 6.

(35; 32; 2,63; 2,0)

(a) *Některé body na přímce p jsou fešné. Navíc platí: vezmeme-li libovolný bod z p, pak jeho vzdálenost od alespoň jednoho z fešných bodů je iracionální. Kolik nejméně může být fešných bodů?* *(Tomáš „Šavlík" Pavlík)*

(b) *Řešte tutéž úlohu, je-li p rovina (nikoli přímka).* *(Tomáš „Šavlík" Pavlík)*

Řešení:

(a) Jeden fešný bod nám nestačí, pretože určite nájdeme bod v racionálnej vzdialenosti od neho (napr. on sám). Ukážeme, že dva fešné body stačia.

Zvoľme ľubovoľné dva body priamky, ktorých vzdialenosť je iracionálna (napr. $\sqrt{2}$). Ak má ľubovoľný bod z priamky racionálnu vzdialenosť x k jednému z nich, jeho vzdialenosť od druhého fešného bodu je (podľa vzájomnej polohy bodov) buď $x + \sqrt{2}$, $\sqrt{2} - x$, alebo $x - \sqrt{2}$, ale vo všetkých troch prípadoch dostaneme iracionálne číslo.

(b) Podobne ako v a), jeden fešný bod nestačí. Rovnako nestačia ani dva fešné body (vo vzdialenosti x), pretože vieme zostrojiť rovnoramenný trojuholník, kde základňu tvorí spojnica fešných bodov a ramená majú dĺžku $\lceil x \rceil$. Posledný vrchol má teda racionálnu vzdialenosť od oboch fešných bodov. Ukážeme, že nám postačia tri body.

Označme za fešné body $(0,0)$, $(1,0)$ a $(\sqrt{2},0)$ a pre spor predpokladajme, že nejaký bod (x,y) má od všetkých troch racionálne vzdialenosti – označme ich postupne k, l a m. Potom dostávame:

$$\begin{aligned} k^2 &= x^2 + y^2, \\ l^2 &= (x-1)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2x, \\ m^2 &= \left(x - \sqrt{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2 - 2\sqrt{2}\,x. \end{aligned}$$

Z prvých dvoch vzťahov a racionality k a l dostávame, že aj x musí byť racionálne, a teda $\sqrt{2}\,x$ je iracionálne. Keď to ale dosadíme do posledného vzťahu, dostaneme, že m^2 musí byť iracionálne, čo je spor s predpokladom, že m je racionálne.

Vidíme teda, že takto zvolené fešné body zadaniu vyhovujú.

Poznámky:

Úloha (alebo aspoň časť (a)) nebola ťažká, čomu odpovedá aj to, že takmer všetky riešenia boli správne. Niektorí ste síce zabudli spomenúť, prečo jeden bod nestačil, ale body som za to nestrhával. Za konštatovanie, že musia byť 2 fešné body, ale bez patričného odôvodnenia, ste mohli dostať len jeden bod.

Ak ste poslali aj časť (b) (a nezamotali sa v dôkaze), tak som vám to väčšinou uznal aj napriek malým problémom v značení alebo znamienkach. Opäť, za obyčajné konštatovanie, že musia byť tri fešné body, ktoré ste ale nedokázali (aspoň trochu uveriteľne), bol iba jeden bodík.

(Peter „πtr“ Korcsok)

Úloha 7.

(24; 23; 1,92; 2,0)

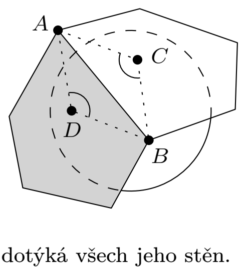
(a) *Najděte konvexní mnohostěn, jehož stěny lze obarvit černě a bíle tak, aby černých stěn bylo více než bílých, ale žádné dvě černé stěny neměly společnou hranu.* *(Pepa Tkadlec)*

(b) *Dokažte, že žádnému takovému mnohostěnu nelze vepsat kouli.*[4] *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

(a) Mnohostěn můžeme zkonstruovat například takto: Vezmeme krychli, která je uvnitř černá a na povrchu bílá. Poté odřízneme každý roh krychle rovinou. Tím dostaneme těleso, které je jistě konvexní, má šest bílých a osm černých stěn a žádné dvě černé stěny se nedotýkají hranou.

(b) Předpokládejme pro spor, že máme nějaký mnohostěn, který splňuje podmínky a přitom má vepsanou kouli. Vezměme nějaké dvě stěny mnohostěnu, které se dotýkají hranou AB. Body dotyku vepsané koule s těmito dvěma stěnami označme C a D. Trojúhelníky ABC a ABD jsou shodné podle věty *sss*, neboť délka různých tečen (jako úseček) z bodu ke kouli je stejná.



[4] Koule *vepsaná* mnohostěnu se dotýká všech jeho stěn.

Nyní zvlášť pro černé a zvlášť pro bílé stěny spočítáme součet úhlů ACB za všechny hrany mnohostěnu. Při každé hraně máme buď jednu černou a jednu bílou stěnu, nebo dokonce dvě bílé, výsledný součet u černých stěn tedy (díky shodnosti) určitě nebude vyšší než součet u bílých stěn. Přitom je ale černých stěn více než bílých a součet úhlů u každého z bodů dotyku je 360°, takže musí být součet úhlů u černých stěn alespoň o 360° větší než u těch bílých. To je spor.

Poznámky:

Naprostá většina z vás si poradila s částí (a). Objevily se rozmanité tvary, nejčastěji krychle bez rohů nebo dva víceboké jehlany vzájemně k sobě šikovně přilepené podstavami. Jako bonus si můžete rozmyslet, kolik nejméně stěn je třeba. Bohužel nikdo nevyřešil část (b), která přitom nevyžadovala žádné složité techniky, jen pěknou myšlenku. *(Josef Svoboda)*