Podobnost a shodnost

2. podzimní série — Termín odeslání: 4. listopadu 2013

Řekneme-li, že trojúhelníky ABC a XYZ jsou podobné, znamená to, že jejich vrcholy si odpovídají v tomto pořadí.

Úloha 1. (3 body)
Alča jednou ve svém sešitě našla narýsované dva trojúhelníky, které se shodovaly ve velikostech všech vnitřních úhlů a v délkách dvou stran, ale přesto nebyly shodné. Nalezněte dva takové trojúhelníky.

Úloha 2. (3 body)
V trojúhelníku ABC leží body D, E po řadě na stranách AB a AC tak, že trojúhelníky ABC, CBD a BEC jsou podobné. Dokažte, že pokud jsou přímky BC a DE rovnoběžné, pak je trojúhelník ABC rovnoramenný.

Úloha 3. (3 body)
Na úhlopříčce BD rovnoběžníku $ABCD$ je dán bod K tak, že přímka AK protne úsečku BC v bodě X a přímku CD v bodě Y. Dokažte, že $|AK|^2 = |KX| \cdot |KY|$.

Úloha 4. (5 bodů)
Na kružnici se středem O zvolme body A, B tak, aby platilo $|\sphericalangle AOB| = 60°$. Na kratším oblouku AB zvolme bod M. Dokažte, že spojnice středů úseček BM a AO je kolmá na spojnici středů úseček AM a BO.

Úloha 5. (5 bodů)
Pepa si nakreslil konvexní čtyřúhelník $ABCD$, v němž současně platilo $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle CAB|$ a $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ADB|$. Dokažte, že z úseček AC, AD a BC se mu podaří sestavit pravoúhlý trojúhelník.

Úloha 6. (5 bodů)
Je dán lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a ACD označme postupně O_1 a O_2, průsečík přímek AD a BC označme E. Dokažte, že přímky EO_1 a EO_2 jsou osově souměrné podle osy úhlu AEB.

Úloha 7. (5 bodů)
Konvexní pětiúhelník $ABCDE$ má strany AE a BC rovnoběžné a pro jeho vnitřní úhly platí $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle BDC|$. Označme P průsečík úhlopříček AC a BE. Dokažte, že $|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle BDP|$ a $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle ADP|$.

Úloha 8. (5 bodů)
Osa strany AC trojúhelníku ABC protne stranu BC v bodě M. Dále nechť K je průsečík osy úhlu AMB a kratšího oblouku AB kružnice opsané trojúhelníku ABC. Dokažte, že přímka spojující středy kružnic vepsaných trojúhelníkům AMK a BMK je kolmá na osu úhlu AKB.

Podobnost a shodnost

2. podzimní série Vzorové řešení

Úloha 1.

(105; 67; 1,94; 3,0)

Alča jednou ve svém sešitě našla narýsované dva trojúhelníky, které se shodovaly ve velikostech všech vnitřních úhlů a v délkách dvou stran, ale přesto nebyly shodné. Nalezněte dva takové trojúhelníky. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Uvažujme trojúhelníky ABC a DEF a jejich strany a, b, c, d, e, f takové, že čtveřice čísel a, $b = d$, $c = e$, f tvoří geometrickou posloupnost. Platí $a : d = b : e = c : f = k$, trojúhelníky si tedy jsou podobné, a tudíž mají stejné vnitřní úhly.

Požadavkům vyhovují například čísla 8, 12, 18, 27. Musíme ještě ověřit, zda mohou tvořit trojúhelníky, tj. jestli nejdelší strana trojúhelníku je kratší než součet zbylých dvou. Vskutku $8 + 12 > 18$, $12 + 18 > 27$, trojúhelníková nerovnost tedy platí.

Příkladem hledané dvojice trojúhelníků je $\triangle ABC$ s délkami stran 8, 12, 18 a $\triangle DEF$ s délkami stran 12, 18, 27.

Poznámky:

Ačkoliv stačilo v podstatě jen najít dva vhodné trojúhelníky, správných řešení bylo jen lehce přes půlku. Část z nich uvažovala pravoúhlý trojúhelník a díky Pythagorově větě se pak nemusela řešit trojúhelníková nerovnost. Mnoho z ostatních pohořelo na jejím opomenutí (a snažilo se pak vydávat úsečky o délkách 1, 2, 4 za trojúhelník). Další skupinu pak tvořili ti, kteří zaslali trojúhelníky, které si nebyly podobné či neměly dvě strany stejně dlouhé. Někteří se také omezili na pouhé konstatování vlastností takových trojúhelníků nebo jen na narýsování bez jakéhokoli popisu stran.

Na závěr bych ráda podotkla, že když máte nalézt dva trojúhelníky daných vlastností a zadání říká, že existují, pak nemá cenu dokazovat jejich existenci ani neexistenci :) (Pokusů o jedno či druhé bylo dvojciferně.) *(Anička Doležalová)*

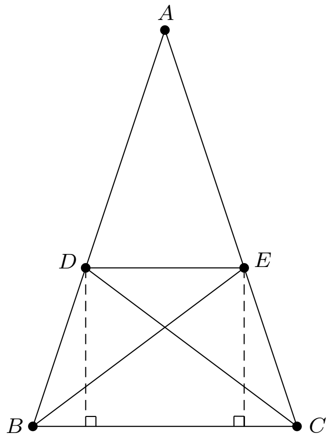
Úloha 2.

(100; 75; 2,28; 3,0)

V trojúhelníku ABC leží body D, E po řadě na stranách AB a AC tak, že trojúhelníky ABC, CBD a BEC jsou podobné. Dokažte, že pokud jsou přímky BC a DE rovnoběžné, pak je trojúhelník ABC rovnoramenný. *(Martin „E.T.“ Sýkora)*

Řešení (podle Kristýny Šmídové):

Protože $DE \parallel BC$, tak výška trojúhelníku CBD na stranu BC je shodná s výškou trojúhelníku BEC na stranu BC. Obsahy těchto trojúhelníků jsou tedy shodné, a protože ze zadání víme, že $\triangle CBD \sim \triangle BEC$, jsou shodné i samotné trojúhelníky. Díky tomu je koeficient podobnosti k mezi trojúhelníky ABC a CBD stejný jako koeficient podobnosti mezi trojúhelníky ABC a BEC.



Z podobnosti $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ plyne $|AB| = k \cdot |BC|$ a z podobnosti $\triangle BEC \sim \triangle ABC$ plyne $k \cdot |BC| = |AC|$, celkem tedy $|AB| = k \cdot |BC| = |AC|$ a trojúhelník ABC je rovnoramenný.

Poznámky:
Většina řešitelů úlohu řešila postupem, na který navádí hinty na chatu našich internetových stránek. Jiní si zapsali podobnost jako shodnost poměrů délek stran podobných trojúhelníků a postupnými úpravami se dostali k rovnosti $|AB| = |AC|$. Oba způsoby vedly k řešení. Za originální myšlenku shodnosti podobných trojúhelníků uvedenou ve vzorovém řešení bych chtěl speciálně pochválit *Kristýnu Šmídovou* a *Eduarda Batmendijna*.

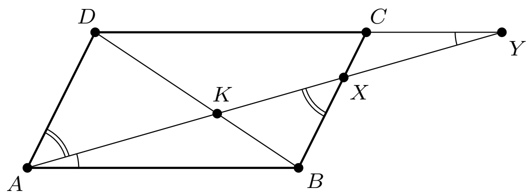
Závěrem bych chtěl upozornit na to, že pokud řekneme, že trojúhelníky ABC a XYZ jsou si podobné, myslíme tím, že jejich vrcholy si odpovídají v tomto pořadí, a tedy, že $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle XYZ|$. I když jsme tuto skutečnost v zadání zmiňovali, mnozí ji nevzali v potaz a úlohu si zbytečně zkomplikovali. *(Martin „E.T." Sýkora)*

Úloha 3.

(79; 56; 2,18; 3,0)

Na úhlopříčce BD rovnoběžníku $ABCD$ je dán bod K tak, že přímka AK protne úsečku BC v bodě X a přímku CD v bodě Y. Dokažte, že $|AK|^2 = |KX| \cdot |KY|$. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:



Trojúhelníky BAK a DYK jsou si navzájem podobné podle věty *uu* ($\sphericalangle BAK$ a $\sphericalangle DYK$ jsou střídavé, $\sphericalangle AKB$ a $\sphericalangle YKD$ vrcholové). Odtud plyne vztah

$$\frac{|AK|}{|KY|} = \frac{|BK|}{|DK|}.$$

Obdobně i trojúhelníky BXK a DAK jsou podobné ($\sphericalangle BXK$ a $\sphericalangle DAK$ jsou střídavé, $\sphericalangle XKB$ a $\sphericalangle AKD$ vrcholové), což nám dává

$$\frac{|KX|}{|AK|} = \frac{|BK|}{|DK|}.$$

Porovnáním levých stran obou vztahů dostáváme

$$\frac{|AK|}{|KY|} = \frac{|KX|}{|AK|},$$

a to po úpravě dává dokazovanou rovnost.

Poznámky:
Řešení byla převážně správná a podobná vzorovému, i když nezřídka zbytečně komplikovaná. Většina nezdařilých pokusů bohužel ztroskotala na nepochopení zadání – jejich autoři měli za to, že přímka AK musí protnout stranu CD, a vyřešili tedy pouze případ, kdy prochází bodem C.

Další řešitelé si všimli, že dokazovaná rovnost připomíná Eukleidovu větu o odvěsně nebo mocnost bodu ke kružnici, a vymysleli si pomocnou konstrukci, na kterou pak to či ono použili. Nikomu z nich se však nepodařilo uspokojivě ukázat, že takovou konstrukci lze opravdu sestrojit.

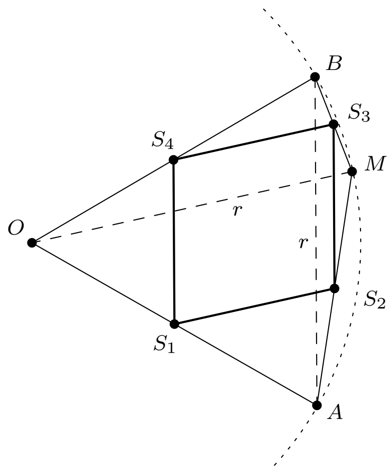
Imaginární bod obdržel *Miroslav Psota* za jediné správné řešení, které se zásadně odlišovalo od vzorového. *(Ondřej Cífka)*

Úloha 4.

(97; 74; 3,66; 5,0)

Na kružnici se středem O zvolme body A, B tak, aby platilo $|\sphericalangle AOB| = 60^\circ$. Na kratším oblouku AB zvolme bod M. Dokažte, že spojnice středů úseček BM a AO je kolmá na spojnici středů úseček AM a BO. *(Martina Vaváčková)*

Řešení:



Označme r polomer kružnice a body S_1, S_2, S_3, S_4 postupne stredy úsečiek OA, AM, MB, BO. Pretože $|\sphericalangle AOB| = 60^\circ$ a $|AO| = |OB| = r$, trojuholník ABO je rovnostranný. Preto aj $|AB| = r$. Uvažujme rovnoľahlosť so stredom v bode O a koeficientom $1/2$, bod A sa zobrazí na S_1, bod B na S_4. A teda $|S_1S_4| = |AB|/2 = r/2$. Analogicky rovnoľahlosť so stredom v bode M a koeficientom $1/2$ nám zobrazí úsečku AB na S_2S_3, rovnoľahlosť so stredom v bode A a koeficientom $1/2$ zobrazí úsečku OM na S_1S_2 a konečne rovnoľahlosť so stredom v bode B a koeficientom $1/2$ zobrazí úsečku OM na S_3S_4. Dostávame

$$|S_1S_4| = |S_2S_3| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}|OM| = |S_1S_2| = |S_3S_4|.$$

Štvoruholník $S_1S_2S_3S_4$ je teda kosoštvorec a v kosoštvorci sú uhlopriečky na seba vždy kolmé.

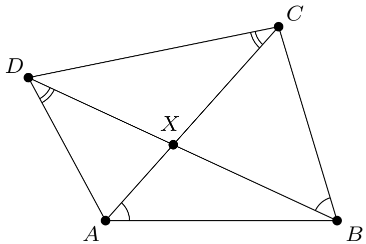
Poznámky:
Na úlohu sa dalo nahliadnuť viacerými spôsobmi, či už pomocou podobných trojuholníkov, alebo stredných priečok, ako to robila väčšina z vás. Našlo sa aj pár riešiteľov, ktorí úlohu (vy)riešili pomocou nejakých iných metód, uhlením, prípadne s využitím zhodných zobrazení. Takéto riešenia boli však väčšinou dvakrát dlhšie. Nakoniec pripomínam, že búšiť analytikou do takéhoto roztomilého príkladíku je priam barbarstvo, a každý, kto tak koná, mal by sa nad sebou zamyslieť ;-) *(Marta Kossaczká)*

Úloha 5.

(69; 49; 3,45; 5,0)

Pepa si nakreslil konvexní čtyřúhelník $ABCD$, v němž současně platilo $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle CAB|$ a $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ADB|$. Dokažte, že z úseček AC, AD a BC se mu podaří sestavit pravoúhlý trojúhelník. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:
Označme X průsečík úhlopříček konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Protože je čtyřúhelník konvexní, leží bod X uvnitř úsečky AC, platí tedy rovnost $|AX| + |CX| = |AC|$.



Trojúhelníky ABC a BXC jsou podobné, protože podle zadání platí $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CBD|$ a vnitřní úhel u vrcholu C mají společný. Z podobnosti plyne:

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|XC|}{|BC|}, \quad \text{neboli} \quad |BC|^2 = |AC| \cdot |XC|.$$

Obdobně i trojúhelníky CDA a DXA jsou podobné, protože podle zadání platí $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ADB|$ a mají společný úhel u vrcholu A. Z podobnosti plyne:

$$\frac{|DA|}{|CA|} = \frac{|XA|}{|DA|}, \quad \text{neboli} \quad |DA|^2 = |CA| \cdot |XA|.$$

Sečtením těchto dvou rovností dostaneme:

$$|AD|^2 + |BC|^2 = |AC| \cdot (|XC| + |XA|) = |AC|^2.$$

Délky úseček AC, AD a BC splňují podmínku obrácené Pythagorovy věty, a proto z nich lze sestrojit pravoúhlý trojúhelník.

Alternativní přístup:
Místo podobnosti trojúhelníků můžeme také využít úsekového úhlu a z $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CBD|$ vyvodit, že CB je tečna ke kružnici opsané trojúhelníku AXB. Mocnost bodu C k této kružnici pak dává kýženou rovnost $|BC|^2 = |AC| \cdot |XC|$. Obdobně samozřejmě i pro druhou dvojici stejně velkých úhlů.

Poznámky:
Většina řešení byla v pořádku, ale občas bych ocenil větší množství slovního popisu. Někteří řešitelé končili tím, že ukázali rovnost $|AD|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$, ale už nezdůvodnili, proč je tím pádem úloha vyřešena. Nejvíce mě zklamalo, že se našlo i několik řešitelů, kteří nepochopili zadání a místo obecného důkazu řešili nějaký jeden konkrétní případ (obvykle pro čtverec).

(Martin Töpfer)

Úloha 6.

(42; 25; 2,57; 4,0)

Je dán lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a ACD označme postupně O_1 a O_2, průsečík přímek AD a BC označme E. Dokažte, že přímky EO_1 a EO_2 jsou osově souměrné podle osy úhlu AEB. (Pepa Tkadlec)

Řešení:
BÚNO můžeme předpokládat, že $|AB| > |CD|$; rovnost nastat nemůže, jelikož při ní by neexistoval bod E, a při opačné nerovnosti provedeme přeznačení.

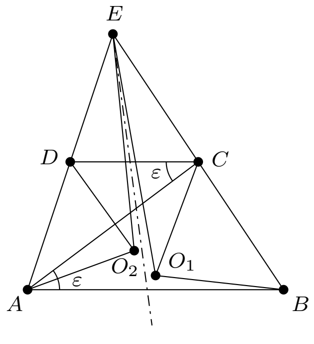
Díky rovnoběžnosti AB a CD platí $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACD|$, označme velikost tohoto úhlu ε. Je-li $\varepsilon = 90°$, pak jsou trojúhelníky ABC, ABD pravoúhlé a $O_1 \in EB$, $O_2 \in EA$, tvrzení ze zadání tedy triviálně platí. Předpokládejme dále, že tomu tak není, tedy $\varepsilon \neq 90°$, $O_1 \notin EB$ a $O_2 \notin EA$.

Úhel BO_1C je (vzhledem ke kružnici opsané trojúhelníku ABC) středovým úhlem s příslušným obvodovým úhlem BAC, v tomtéž vztahu jsou i úhly AO_2D a ACD. Protože zmiňované obvodové úhly mají stejnou velikost ε, mají stejnou velikost i středové úhly, neboli $|\sphericalangle BO_1C| = |\sphericalangle AO_2D|$. Z téhož důvodu také platí, že úhly BO_1E, AO_2E jsou vždy opačně orientované – oba jsou buď vně úhlu AEB (pokud $\varepsilon > 90°$), nebo do něj oba zasahují (pokud $\varepsilon < 90°$). Díky tomu nám pro důkaz osové souměrnosti přímek EO_1, EO_2 podle osy úhlu AEB stačí ukázat $|\sphericalangle BO_1E| = |\sphericalangle AO_2E|$.

Předně si všimněme, že trojúhelníky BO_1C, AO_2D jsou oba rovnoramenné se stejně velkými úhly proti základně, jsou tedy podobné (*sus*) a je $|\sphericalangle EBO_1| = |\sphericalangle CBO_1| = |\sphericalangle DAO_2| = |\sphericalangle EAO_2|$. Dále jsou podobné i trojúhelníky EAB a EDC (díky $AB \parallel CD$), takže $|EA| : |EB| = |ED| : |EC|$; označíme tento poměr k. Ještě si všimneme, že

$$\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|EA| - |ED|}{|EB| - |EC|} = \frac{k \cdot |EB| - k \cdot |EC|}{|EB| - |EC|} = k,$$

ovšem díky podobnosti $\triangle BO_1C$ a $\triangle AO_2D$ máme také $|AO_2| : |BO_1| = |AD| : |BC| = k$. Trojúhelníky EAO_2 a EBO_1 jsou tedy podobné dle věty *sus*, z čehož dostáváme požadovanou rovnost $|\sphericalangle BO_1E| = |\sphericalangle AO_2E|$.



Poznámky:
Úloha nebyla nijak zvlášť obtížná, ale velká většina řešitelů získala pouhé čtyři body kvůli přílišnému upnutí k jedné konfiguraci bodů A, B, C, D, typicky k takové, jako je znázorněna na obrázku výše. Poté se jali víceméně správně dokazovat rovnost $|\sphericalangle BO_1E| = |\sphericalangle AO_2E|$, ovšem již nezdůvodnili, že tyto úhly jsou opačně orientované, bez čehož požadovanou osovou souměrnost ještě dokázanou nemáme. S případem $\varepsilon = 90°$ si taky nikdo příliš hlavu nelámal, ačkoliv v této situaci je velmi ošemetné argumentovat trojúhelníkem EBO_1 a podobnými (pro takovéto „trojúhelníky" např. neplatí věta *uu*). Pouze *František Couf* a *Martin Raszyk* podali dostatečně důkladný rozbor situace, čímž si vysloužili plný počet bodů. Konečně *Antonín Češík* a *Miroslav Stankovič* poslali zajímavé řešení využívající geometrických zobrazení, čímž se výše provedeným diskusím elegantně vyhnuli a vysloužili si $+i$. *(Alexander „Olin" Slávik)*

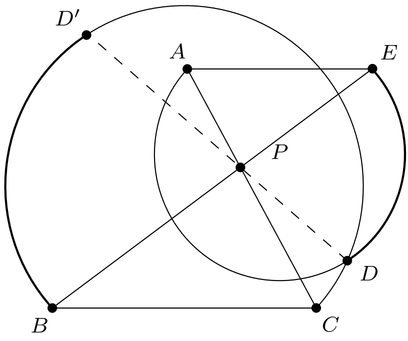
Úloha 7.

(34; 15; 2,18; 1,0)

Konvexní pětiúhelník $ABCDE$ má strany AE a BC rovnoběžné a pro jeho vnitřní úhly platí $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle BDC|$. Označme P průsečík úhlopříček AC a BE. Dokažte, že $|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle BDP|$ a $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle ADP|$. *(Alča Skálová)*

Řešení:
Stačí ukázat $|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle BDP|$, druhá rovnost se dokáže analogicky prohozením bodů A a B a bodů E a C.

Úsečky AE a CB jsou rovnoběžné a opačně orientované, proto existuje záporná stejnolehlost se středem v P, která zobrazí A na C a E na B. Díky rovnosti $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle BDC|$ a tomu, že bod D leží mezi rovnoběžkami AE, BC, se v této stejnolehlosti zobrazí oblouk EDA na oblouk BDC.



Dále obraz bodu D označme D', pak body D, P, D' leží na jedné přímce a podoblouk ED se ve stejnolehlosti zobrazí na podoblouk BD'. Těmto podobloukům proto odpovídají stejné obvodové úhly, a tak $|\sphericalangle BDD'| = |\sphericalangle AED|$, což jsme chtěli dokázat. Ještě dodejme, že bod D neleží na podoblouku BD', protože leží v opačné polorovině určené přímkou EB.

Poznámky:
Řešení se v zásadě dělila na dva typy – víceméně vzorová (za 5 bodů) a ta, co tvrdila, že takový pětiúhelník nutně musí být osově souměrný (za 0 bodů). Pak ještě dorazilo několik delších řešení pomocí sinových vět. Žádné z nich se ale nedokázalo dobře popasovat se skutečností, že funkce kosinus není prostá, za což jsem strhával jeden bod. *(Mirek Olšák)*

Úloha 8. (27; 13; 2,30; 1,0)

Osa strany AC trojúhelníku ABC protne stranu BC v bodě M. Dále nechť K je průsečík osy úhlu AMB a kratšího oblouku AB kružnice opsané trojúhelníku ABC. Dokažte, že přímka spojující středy kružnic vepsaných trojúhelníkům AMK a BMK je kolmá na osu úhlu AKB.

(Alča Skálová)

Řešení:

Trojúhelník AMC je rovnoramenný, neboť M leží na ose úsečky AC. Spolu s využitím faktu, že přímka MK je osa úhlu AMB, dostáváme:

$$|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle CMA|) = \frac{1}{2}|\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle AMK| = |\sphericalangle BMK|.$$

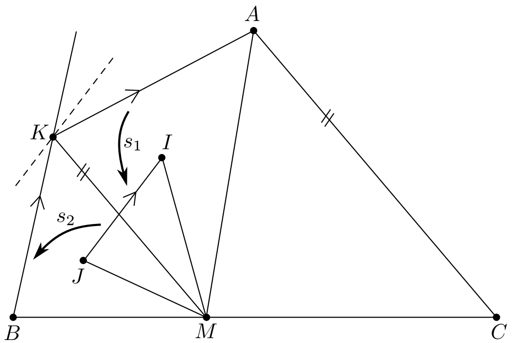
Z rovnosti $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle BMK|$ plyne rovnoběžnost přímek AC a MK.

Nyní ukážeme, že trojúhelníky AMK a KMB jsou podobné pomocí věty *uu*. Jak již víme, platí $|\sphericalangle AMK| = |\sphericalangle BMK|$. Druhou rovnost úhlů dostaneme takto:

$$\begin{aligned}|\sphericalangle KBM| &= 180^\circ - |\sphericalangle KAC| = 180^\circ - |\sphericalangle KAM| - |\sphericalangle MAC| = \\ &= 180^\circ - |\sphericalangle KAM| - |\sphericalangle AMK| = |\sphericalangle AKM|.\end{aligned}$$

(V první rovnosti jsme využili, že čtyřúhelník $AKBC$ je tětivový.)

Označme I (resp. J) střed kružnice vepsané trojúhelníku AMK (resp. KMB). Protože $\triangle AMK$ a $\triangle KMB$ jsou podobné, jsou také podobné trojúhelníky AMI a KMJ. Z toho plyne $|AM| : |IM| = |KM| : |JM|$. Zároveň platí, že I (resp. J) leží na ose úhlu AMK (resp. KMB), a proto $|\sphericalangle IMJ| = |\sphericalangle IMK| + |\sphericalangle KMJ| = (|\sphericalangle AMK| + |\sphericalangle KMB|)/2 = |\sphericalangle AMK|$, takže spolu s rovností poměrů délek stran dostáváme, že $\triangle IMJ$ je také podobný trojúhelníkům AMK a KMB.



Uvažme spirální podobnost[1] s_1 (resp. s_2) zobrazující trojúhelník AMK (resp. IMJ) na podobný trojúhelník IMJ (resp. KMB) se středem v M a úhlem otočení AMI (resp. KMJ). Protože $|\sphericalangle AMI| = |\sphericalangle KMJ|$, mají úhly otočení s_1 a s_2 stejnou velikost. Pro spirální podobnost platí, že (orientovaný) úhel mezi přímkou a jejím obrazem je roven úhlu příslušného otočení. To v našem případě znamená, že orientované[2] přímky KA a JI svírají stejný orientovaný úhel (AMI dle s_1) jako orientované přímky JI a BK (KMJ dle s_2). Přímka JI je proto rovnoběžná s osou úhlu mezi orientovanými přímkami BK a KA. Konečně tato osa úhlu je kolmá na osu vedlejšího úhlu – tedy úhlu BKA. Přímka IJ je tak kolmá na osu úhlu BKA, což jsme chtěli dokázat.

---

[1] Spirální podobnost je složení stejnolehlosti a otočení podle stejného středu.

[2] U orientovaných přímek bereme v potaz pořadí vrcholů, které ji udávají. Například orientovaná přímka KA je „jiná“ (opačná) než orientovaná přímka AK.

Poznámky:
Sešlo se 26 řešení, z toho 12 bylo dobře. Správná řešení většinou využívala počítání úhlů a posléze nějakou variantu spirální podobnosti. Elegancí při použití spirální podobnosti vynikla řešení *Eduarda Batmendijna* a *Miroslava Psoty*, za což si jmenovaní vysloužili $+i$. Další $+i$ dostal *Jakub Svoboda* za velmi odlišný přístup využívající „mrkvovo-salámové“ a „Bismarckovo“ lemma, neboli originálně pojmenované úvahy o Švrčkově bodu.[3] *Radovan Švarc* ve svém řešení využíval dokonce kruhovou inverzi. Nesprávná řešení obvykle obsahovala pouze jeden konkrétní příklad v podobě obrázku, byť pečlivě narýsovaného, případně nějaká pozorování, která ale nebyla dostatečně odůvodněná. *(Pepa Svoboda)*

[3] Švrčkův bod příslušející vrcholu A v trojúhelníku ABC je střed oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, neobsahujícího bod A.