Čtverečkovaný papír

1. podzimní série — Termín odeslání: 30. září 2013

Úloha 1. (3 body)

Anička našla o hodině v penálu čtverečkovaný papír 9×9, i rozhodla se ho po čarách rozstříhat na několik čtverců. Chtěla, aby jich bylo celkem deset a aby takto získala každý ze čtverců $1 \times 1, \dots, 5 \times 5$ aspoň jednou. Mohlo se jí to podařit?

Úloha 2. (3 body)

Martin má čtverečkovaný papír $n \times n$. Rozstřihl ho rovně na dva kusy. Kolik nejvíce čtverečků mohl přestřihnout?[1] Svou odpověď zdůvodněte.

Úloha 3. (3 body)

Mějme na všechny strany nekonečný čtverečkovaný papír. Do každého průsečíku namalujeme puntík jednou ze čtyř barev tak, aby vrcholy každého čtverečku měly různé barvy. Dokažte, že pak se na nějaké (svislé nebo vodorovné) čáře vyskytují body pouze dvou barev.

Úloha 4. (5 bodů)

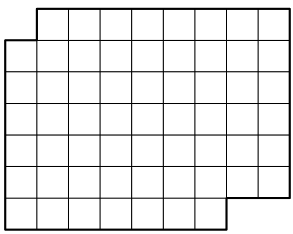
Mějme čtverečkovaný papír $m \times n$. Kolika způsoby můžeme strany všech čtverečků obarvit pomocí tří barev tak, aby každý čtvereček měl právě dvě strany obarvené jednou barvou a zbývající dvě nějakou jinou jednou barvou? Strany, kterými se sousedící čtverečky dotýkají, považujeme za totožné.

Úloha 5. (5 bodů)

Vejtek si na čtverečkovaný papír nakreslil trojúhelník. Tvrdí, že všechny jeho vrcholy, střed kružnice opsané, střed kružnice vepsané, průsečík výšek i těžiště leží ve vrcholech nějakých čtverečků. Může mít pravdu?

Úloha 6. (5 bodů)

Je možné rozstřihnout útvar na obrázku na dvě části stejného tvaru[2] a velikosti, je-li dovoleno stříhat pouze po vyznačených čarách?



[1] Čtvereček je přestřižený, jestliže na každém z dílů je aspoň kousek jeho obsahu.

[2] Přípustné je otáčení a zrcadlové převracení.

Úloha 7. (5 bodů)

Martina a Olin hrají na čtverečkovaném papíru o rozměrech 6×6 následující hru. Střídavě píšou do jednotlivých čtverečků reálná čísla, která se na papíře ještě nevyskytují. Po vyplnění celého papíru zeleně vybarví maximum v každém řádku. Olin vyhraje, pokud existuje cesta shora dolů vedoucí pouze skrz zelené čtverečky[3], v opačném případě vyhrává Martina. Kdo vyhraje, když Olin začíná a oba volí nejlepší možnou strategii?

Úloha 8. (5 bodů)

Na čtverečkovaném papíru o rozměrech $n \times n$ ($n \geq 3$) vybarvíme některé čtverečky černě a následně dva protější okraje slepíme. Ukažte, že na vzniklém válci jsou alespoň dva řádky, sloupce nebo rovnoběžné diagonály, které obsahují tentýž počet černých čtverečků.

[3] Dva čtverečky, které sousedí pouze rohem, považujeme také za sousední.

Čtverečkovaný papír

1. podzimní série — Vzorové řešení

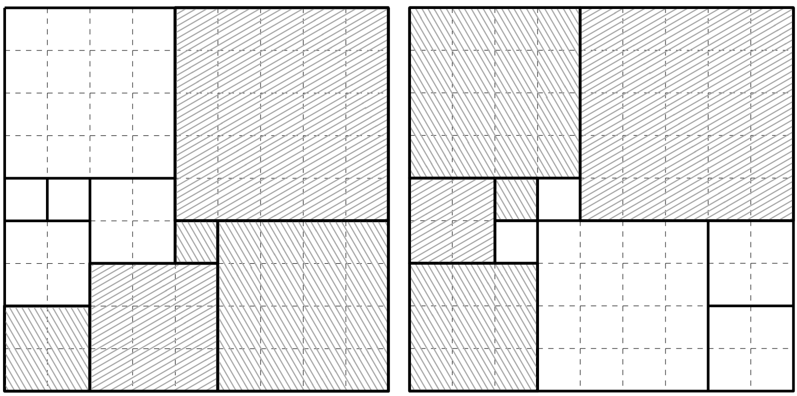
Úloha 1. (180; 168; 2,81; 3,0)

Anička našla o hodině v penálu čtverečkovaný papír 9×9, *i rozhodla se ho po čarách rozstříhat na několik čtverců. Chtěla, aby jich bylo celkem deset a aby takto získala každý ze čtverců* $1 \times 1, \ldots, 5 \times 5$ *aspoň jednou. Mohlo se jí to podařit?* *(Anička Doležalová)*

Řešení:

Původní papír má obsah 81, čtverce $1 \times 1, \ldots, 5 \times 5$ mají obsah v součtu 55. Dalších pět čtverců, které chceme vystřihnout, má tedy obsah $81 - 55 = 26$, což můžeme poskládat jako $1 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 2 + 4 \times 4$. (Tento rozklad je jediný možný, dokazovat to zde ale nebudeme, ostatně to po nás úloha ani nechce.) Celý papír tak chceme rozdělit na jeden čtverec 5×5, dva 4×4, jeden 3×3, tři 2×2 a tři 1×1.

Musíme ještě ověřit, zda tyto čtverce skutečně jdou poskládat na papír 9×9 tak, aby se nepřekrývaly a pokryly celý papír. Na obrázcích vidíte dvě možná pokrytí.



Poznámky:

Většina úlohu vyřešila bez problémů s menším či větším zdůvodňováním, proč volí právě těchto deset čtverců (což zadání vůbec nevyžadovalo, jako důkaz stačil i samotný obrázek jednoho z možných rozložení). Část řešitelů opomněla ověřit, zda čtverce jdou na papír naskládat. Několik z vás si pak vyložilo zadání tak, že můžeme kromě deseti čtverců dostat i další útvary. Na závěr se pak sešla dvě řešení pokoušející se dokázat, že papír rozstříhat nelze.

(Anička Doležalová & Lukáš Zavřel)

Úloha 2.

(167; 134; 1,99; 2,0)

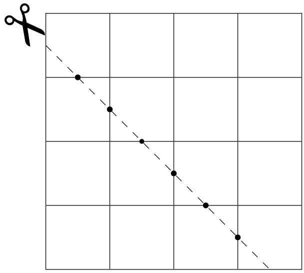
Martin má čtverečkovaný papír $n \times n$. Rozstřihl ho rovně na dva kusy. Kolik nejvíce čtverečků mohl přestřihnout?[4] Svou odpověď zdůvodněte. *(Vít „Vejtek“ Musil)*

ŘEŠENÍ:

Dokážeme, že Martin mohl přestřihnout maximálně $2n - 1$ čtverečků.

Čtverečkovaný papír $n \times n$ se celkem skládá z $2n - 2$ vnitřních a čtyř obvodových úseček. Řez procházející napříč čtverečkovaným papírem může protnout maximálně $2n - 2$ vnitřních úseček. Získáme tedy maximálně $2n - 2$ průsečíků odpovídajících $2n - 1$ částem, na které bude přímka představující rozstřižení rozdělena. To znamená, že protíná nejvýše $2n - 1$ čtverečků.

Takový řez je skutečně možné sestrojit, stačí posunout úhlopříčku směrem dolů o polovinu délky strany malého čtverečku. Takto v prvním řádku protneme jeden čtvereček a ve všech ostatních $n - 1$ řádcích dva čtverečky, takže celkem protneme $2n - 1$ čtverečků.



POZNÁMKY:

Většina řešitelů správně určila maximální počet přestřižených čtverečků. Bohužel valná část řešení neobsahovala „přesvědčivý“ důkaz, že se opravdu jedná o maximum. To byl hlavní důvod stržení bodů. Také se objevilo pár velice zajímavých řešení využívajících otočení čtverečkovaného papíru či rekurentního vyjádření maximálního počtu čtverečků.

(Anička „Anagnina“ Zavadilová & Alexander „Olin“ Slávik)

Úloha 3.

(130; 98; 2,37; 3,0)

Mějme na všechny strany nekonečný čtverečkovaný papír. Do každého průsečíku namalujeme puntík jednou ze čtyř barev tak, aby vrcholy každého čtverečku měly různé barvy. Dokažte, že pak se na nějaké (svislé nebo vodorovné) čáře vyskytují body pouze dvou barev.

(Martina Vaváčková)

ŘEŠENÍ:

Dokažme tvrzení sporem. Předpokládejme, že v každém sloupci i řádku jsou puntíky alespoň tří barev. Pak jistě existuje trojice různobarevných puntíků, které leží bezprostředně vedle sebe v jednom řádku[5].

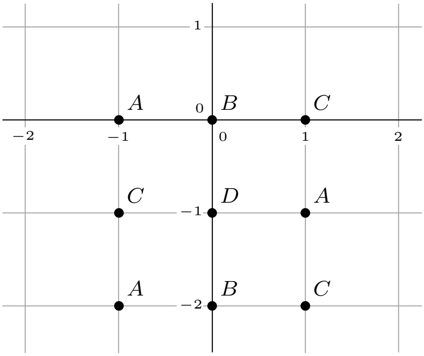
Zvolme souřadný systém tak, aby na pozicích $[-1, 0]$, $[0, 0]$ a $[1, 0]$ byly tyto puntíky s barvami po řadě A, B, C. Pak ale na pozici $[0, -1]$ je nutně puntík jiné barvy, neboť v každém čtverci jsou puntíky různých barev. Tuto barvu označíme D.

[4] Čtvereček je přestřižený, jestliže na každém z dílů je aspoň kousek jeho obsahu.

[5] Existenci takové trojice dokážeme sporem. Nechť ve zvoleném řádku zmíněná trojice neexistuje. Pak každá trojice bezprostředně sousedících puntíků na tomto řádku má jen dvě barvy (je tvaru $X\ Y\ X$), tedy zjevně se tyto dvě barvy střídají na celém řádku, což je kýžený spor.

Ze stejného důvodu je jistě barva C na pozici $[-1,-1]$ a barva A na $[1,-1]$. Analogicky musí být barva B na $[0,-2]$, A na $[-1,-2]$ a C na $[1,-2]$. Dostáváme tak trojici puntíků se stejnými barvami jako na začátku a můžeme úvahy zopakovat.

Postupně tak pro všechna nezáporná celá k dostaneme, že na pozicích $[0,-2k]$ je barva B a na pozicích $[0,-2k-1]$ je barva D. Totožně můžeme postupovat od původní trojice opačným směrem. Na všech pozicích sloupce nula tak musí být barva B nebo D, což je spor s předpokladem.



Poznámky:
Většina řešitelů úlohu dokázala sporem, nicméně kromě správných řešení se objevila i mnohá s více či méně podstatnými nedostatky. Nejčastější chybou bylo rozebrání několika případů bez vysvětlení, jak bude mřížka pokračovat do nekonečna. Jiní řešitelé nesprávně předpokládali, že se v nějaké čáře vyskytují všechny čtyři barvy. A bohužel se objevili i tací, kteří jen nakreslili obrázek, v němž byly dvoubarevné čáry. Návrh takového obarvení části sítě ovšem není důkazem zadaného tvrzení. *(Bára Kociánová & Míša Hubatová)*

Úloha 4.

(86; 58; 3,17; 4,0)

Mějme čtverečkovaný papír $m \times n$. Kolika způsoby můžeme strany všech čtverečků obarvit pomocí tří barev tak, aby každý čtvereček měl právě dvě strany obarvené jednou barvou a zbývající dvě nějakou jinou jednou barvou? Strany, kterými se sousedící čtverečky dotýkají, považujeme za totožné. *(Alexander „Olin“ Slávik)*

Řešení:
Barvy, se kterými budeme pracovat, si označme A, B, C. Nejprve vypozorujeme, že pokud už má nějaký jednotkový čtverec obarvené dvě strany, mohou nastat dva případy:

(i) Obě strany jsou obarveny jednou barvou (BÚNO[6] A): Obě zbylé strany musíme obarvit barvou B, nebo C. Máme tedy dvě možnosti, jak to udělat.

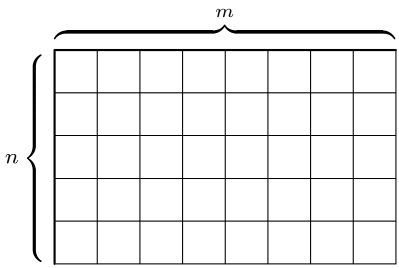
(ii) Strany jsou obarveny různými barvami (BÚNO A, B): Jednu ze zbývajících stran musíme obarvit barvou A a druhou barvou B, nebo naopak. I zde tedy máme dvě možnosti obarvení.

Z toho vyplývá, že pokud budeme obarvovat čtverec, který má už dvě strany obarvené, můžeme tak učinit vždy právě dvěma způsoby.

Nyní začněme obarvovat. Nejdříve levou a horní hranu papíru (na obrázku naznačeny tučně), které se sestávají z m resp. n stran jednotkových čtverců. Obarvení jednotlivých stran je na sobě

[6] Bez újmy na obecnosti.

nezávislé, takže každou můžeme nabarvit třemi způsoby. Daných stran je přitom $m + n$, takže aplikací pravidla kombinatorického součinu dostáváme 3^{m+n} možností.



Dále obarvujme políčka od levého horního rohu „ve směru čtení", tedy zleva doprava a shora dolů. Zjevně přitom vždy budeme obarvovat čtverec, který už má dvě strany nabarvené, takže jej můžeme obarvit dvěma způsoby. Těchto čtverečků je $m \cdot n$, takže aplikací pravidla kombinatorického součinu zjišťujeme, že počet možností, jak to udělat, je 2^{mn}.

Nyní stačí aplikovat pravidlo kombinatorického součinu ještě jednou a získat tak počet všech možných způsobů obarvení $3^{m+n} \cdot 2^{mn}$. Papír tedy můžeme obarvit $3^{m+n} \cdot 2^{mn}$ způsoby.

POZNÁMKY:

Přibližně jedna třetina řešitelů si s úlohou hravě poradila. Většina správných řešení se ale nedržela vzorového. Řešitelé obarvovali už od začátku „po čtverečkách", čímž si přidělali práci navíc. Těm, kteří se jí naopak vyhnuli, jsem udělil imaginární bod. Z ostatních došlých řešení mě nepříjemně překvapilo, jak velké množství řešitelů používalo místo pravidla kombinatorického součinu pravidlo kombinatorického součtu. Ještě více lidí ale nepochopilo zadání a řešilo jinou úlohu, proto bych rád doporučil všem, kteří mají ohledně zadání jakékoliv nejasnosti, aby se nebáli zeptat. *(Martin „E. T." Sýkora & Michael „Majkl" Bílý)*

Úloha 5.

(91; 42; 2,31; 1,0)

Vejtek si na čtverečkovaný papír nakreslil trojúhelník. Tvrdí, že všechny jeho vrcholy, střed kružnice opsané, střed kružnice vepsané, průsečík výšek i těžiště leží ve vrcholech nějakých čtverečků. Může mít pravdu? (Martina Vaváčková)

ŘEŠENÍ:

Ak nájdeme trojuholník vyhovujúci zadaniu, znamená to, že Vejtek môže mať pravdu. Skúsme dokázať, že zadaniu vyhovuje pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C so súradnicami $A = [0, 18]$, $B = [24, 0]$, $C = [0, 0]$.

Keďže je to pravouhlý trojuholník, tak priesečník výšok bude totožný s bodom C, teda bude ležať na vrchole štvorčeka. Z toho istého dôvodu bude stred opísanej kružnice (označme si ho S) ležať v strede prepony AB trojuholníka. Čiže bod S má súradnice $S = (A + B)/2 = [12, 9]$. Ďalej polohu ťažiska T vyrátame pomocou známeho vzorca

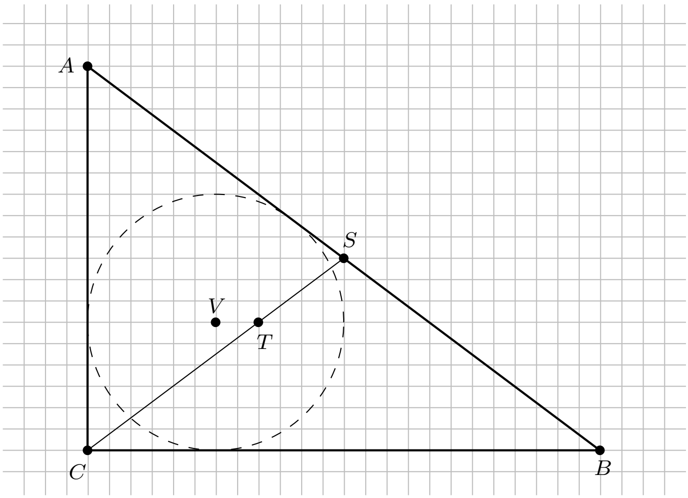
$$T = \frac{A + B + C}{3} = \left[\frac{0 + 24 + 0}{3}, \frac{18 + 0 + 0}{3}\right] = [8, 6],$$

takže tiež leží na vrchole štvorčeka.

Zostáva nám už len ukázať, že tam leží aj stred kružnice vpísanej. Pre polomer kružnice vpísanej do trojuholníka platí $\rho = 2S/O$, kde S je obsah a O je obvod trojuholníka. Keďže je to pravouhlý trojuholník, obsah ľahko vyjadríme ako $S = |AC| \cdot |CB|/2$. Teda pre polomer platí

$$\rho = \frac{|AC| \cdot |CB|}{O} = \frac{18 \cdot 24}{18 + 24 + 30} = 6.$$

A keďže strany splývajú s osami x a y, tak z toho vidno, že stred vpísanej kružnice musí mať súradnice $V = [6, 6]$. Takže sme ukázali, že všetky body ležia na vrcholoch štvorčekov v sieti.



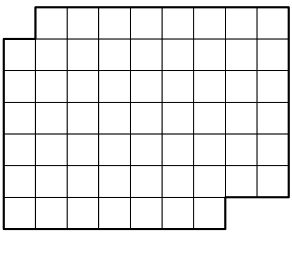
Poznámky:
Zadaniu samozrejme vyhovujú aj iné trojuholníky, ale nám to stačí dokázať pre jeden, aby Vejtek mohol mať pravdu. Veľa z vás nakreslilo obrázok, v ktorom sa zdalo, že vyhovuje zadaniu, ale po dôkladnejšom počítaní sa ukázalo, že to nie je pravda. V dôkaze musíte jednoznačne ukázať, že vaše tvrdenie je pravdivé, inak vám za to nemôžeme dať body. Niektorí z vás ani vyhovujúci trojuholník nenašli, čo je celkom škoda, lebo potom ste svoje tvrdenie, že taký trojuholník neexistuje, ani nemohli dokázať, a za to išli body opäť dole. Ale našťastie vás bolo dosť aj takých, ktorí trojuholník našli a aj poriadne dokázali, že vyhovuje zadaniu.

(Lucka Magurová & Viktor Szabados)

Úloha 6.

(87; 42; 2,56; 1,0)

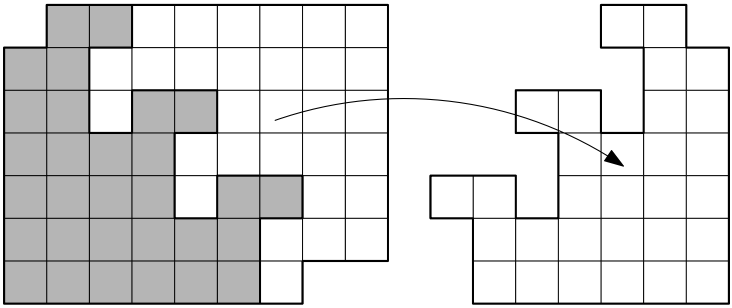
Je možné rozstřihnout útvar na obrázku na dvě části stejného tvaru[7] a velikosti, je-li dovoleno stříhat pouze po vyznačených čarách?



(Martina Vaváčková)

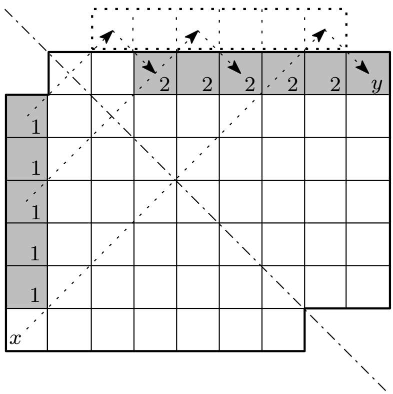
[7] Přípustné je otáčení a zrcadlové převracení.

Řešení:
Ano, je to možné, viz obrázek.



Jak se na to dalo přijít:
U úloh tohoto typu nám uvedené řešení skutečně stačí. Způsob, jak se k němu dopracovat, nastíníme v této části. Předpokládejme, že zadaný útvar lze rozdělit podle zadání. Zřejmě existuje nějaké shodné zobrazení převádějící jednu část útvaru na druhou. Každé shodné zobrazení v rovině je posunutí, otočení nebo osová souměrnost podle osy o následovaná posunutím ve směru o (tzv. osové posunutí), jak se můžete dočíst v seriálu Geometrická zobrazení k 31. ročníku. Posunutí i otočení po chvíli zkoušení vyloučíme (např. otočení o přímý úhel, tedy středovou souměrnost, kvůli tomu, že náš útvar není středově souměrný, ostatní možnosti jsou trochu otravnější).

Rozeberme tedy poslední možnost, osové posunutí. Aby se čtverečky zobrazily na čtverečky, musí osa být vodorovná, svislá, nebo svírající $\pm 45°$ s vodorovným směrem a procházet buď vrcholy mřížky, nebo středy hran mřížky. Pro každý směr už je jednoznačně daná tím, že musí útvar obsahově půlit – všechno, co bylo na jedné straně osy, se totiž musí (nezávisle na tom, které části to patřilo) zobrazit na všechno na druhé straně. Tím pádem už máme jednoznačně určenou osu mířící doprava dolů (ostatní tři osy nevedou ani vrcholy, ani středy), viz obrázek.



Čtverečky x, y jsou nejdál od osy, čili se musejí zobrazit na sebe. Z toho nám vychází vektor posunutí při zobrazení x na y roven $(1, -1)$ (mřížku BÚNO prohlašme za jednotkovou). Postupně rozhodneme i pro všechny ostatní čtverečky, do které části patří. Do každého čtverečku napíšeme buď 1, nebo 2. Začneme tím, že do políčka x napíšeme jedničku a do y dvojku. Pro každý čtvereček jsou dva jeho potenciální protějšky dané zrcadlením podle o a posunutím o $(1,-1)$, resp. $(-1,1)$. Podívejme se na sloupec čtverečků nad x (obrázek). Co budou jejich protějšky? Je jasné, že posunutí jejich zrcadlového obrazu o $(-1,1)$ by je zobrazilo mimo náš útvar, což nelze. Musejí tedy být součástí útvaru 1. A opravdu, posunutí o $(1,-1)$ už nedělá problém. Obdobným postupem (občas se trefíme sice dovnitř, ale do již jinak určeného čtverečku) lze každý čtvereček jednoznačně zařadit do 1 nebo do 2 a dopracovat se tak k rozdělení z prvního obrázku.

Poznámky:
Úloha se ukázala být docela problematická, protože většina řešení se pokoušela dokázat neexistenci požadovaného rozdělení. To bylo pochopitelně tentokrát nemožné, ale obecně platí, že důkaz neexistence řešení v podobných případech je těžký a zdlouhavý, rozebírající mnoho možností (jistě je vám jasné, že kapitolka „Jak se na to dalo přijít“ má k důkazu daleko). Takže se spíš vyplatí zkoušet řešení najít, případně se pokusit něco o něm obecně zjistit (tentokrát svoje úvahy nemusíme sepisovat a dokazovat), například zredukovat počet „typů“ řešení, jako jsme to udělali my.

Ti, kteří úlohu nevyřešili, mohli dostat až dva body za nějaká pozorování (v drtivé většině šlo o jeden bod za zjištění, že útvar má sudý počet políček, což nebrání existenci hledaného rozdělení). Rád bych takových bodů rozdal více a mnozí z vás ve svých řešeních skutečně tvrdili daleko méně triviální věci, ale bohužel byli také vesměs daleko od jejich důkazu (čemuž se nelze divit, jak bylo řečeno výše). Kladný imaginární bod obdržela *Karolína Kuchyňová* za podle mého nejlepší popis postupu, který ji k řešení dovedl. Kuriózní je ovšem to, že si v obrázku s řešením přidala jeden řádek navíc, takže výsledné rozdělení měla „špatně“, čímž dosáhla neobvyklého bodového zisku $4+i$. Nakonec bych chtěl pochválit ty, kteří projevili dost trpělivosti a invence a řešení našli, a všem potom popřát hodně štěstí a dobrých nápadů do dalších sérií.

(David Hruška & Martina Vaváčková)

Úloha 7.

(71; 32; 2,24; 1,0)

Martina a Olin hrají na čtverečkovaném papíru o rozměrech 6×6 následující hru. Střídavě píšou do jednotlivých čtverečků reálná čísla, která se na papíře ještě nevyskytují. Po vyplnění celého papíru zeleně vybarví maximum v každém řádku. Olin vyhraje, pokud existuje cesta shora dolů vedoucí pouze skrz zelené čtverečky[8], v opačném případě vyhrává Martina. Kdo vyhraje, když Olin začíná a oba volí nejlepší možnou strategii? *(Alexander „Olin“ Slávik)*

Řešení:
Vyhraje Martina. Předvedeme si pro ni dvě možné jednoduché vyhrávající strategie.

První strategie – spárování dvou řádků:
Martina se zaměří na první dva řádky a políčka prvního řádku spáruje s políčky druhého řádku podle následujícího obrázku.

A	B	C	D	E	F
D	E	F	A	B	C

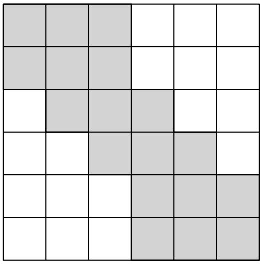
Kdykoli Olin napíše číslo mimo první dva řádky, Martina zahraje také mimo – to může udělat, protože před každým Olinovým tahem bude v této oblasti sudý počet políček.

Dále, pokud Olin zahraje do prvních dvou řádků, Martina vyplní spárované políčko. Navíc, pokud Olin napsal číslo, které je právě i-té největší ve svém řádku, napíše i Martina takové číslo, aby bylo i-té nejvyšší.

Takto bude na konci vyplněna zeleně některá dvojice spárovaných políček a zelená cesta nepovede ani přes první dva řádky.

[8] Dva čtverečky, které sousedí pouze rohem, považujeme také za sousední.

Druhá strategie – ochranná zeď:
Martina si představí v každém řádku tři šedě vybarvená políčka podle následujícího obrázku.



Vždy, když Olin někam zahraje, zareaguje Martina ve stejném řádku. A to tak, že když umístil Olin číslo na bílé políčko, dá Martina nižší číslo na šedé, a když napíše Olin číslo na šedé políčko, dá Martina vyšší číslo na bílé. Takto po každém Martinině tahu bude v každém řádku vyplněno stejně bílých jako šedých políček a v žádném šedém nebude nejvyšší číslo řádku.

Zelená cesta tak nemůže vést shora až dolů, protože nemůže překřížit šedou oblast.

Poznámky:
Naprostá většina řešitelů postupovala podle jednoho ze dvou vzorových řešení. Nesprávná řešení většinou předpokládala něco, co nemusela být pravda. Nejčastěji to, že už znají maximum v nějakém řádku a podle toho hrají dál – zapomněli ale, že některá z dalších políček už mohla být vyplněná. Velká část řešitelů také pouze napsala, že Martina vyhraje, protože může v každém řádku doplnit poslední číslo a tím určit maximum. To je sice skoro pravda, ale jako důkaz takové tvrzení nestačí. Za tato řešení jsem dával 0–2 bodů. Dále se bohužel našlo i pár takových, kteří špatně pochopili zadání a předpokládali, že hráči vyplňují políčka popořadě. Těmto řešitelům jsem za vyřešení mnohem jednodušší úlohy udělil dva body. *(Martin Čech & Mirek Olšák)*

Úloha 8.

(65; 24; 1,68; 0,0)

Na čtverečkovaném papíru o rozměrech $n \times n$ ($n \geq 3$) vybarvíme některé čtverečky černě a následně dva protější okraje slepíme. Ukažte, že na vzniklém válci jsou alespoň dva řádky, sloupce nebo rovnoběžné diagonály, které obsahují tentýž počet černých čtverečků.

(Alexander „Olin“ Slávik)

Řešení:
Dokážeme to sporom. Predpokladajme, že existuje ofarbenie, v ktorom žiadne dva riadky (stĺpce, rastúce ani klesajúce diagonály) nemajú rovnaký počet čiernych štvorčekov, a označme počet čiernych políčok v i-tomu riadku, stĺpci, klesajúcej a rastúcej diagonále postupne r_i, s_i, d_i a u_i. Ďalej označme C celkový počet čiernych štvorčekov. Pretože každé políčko náleží práve jednému riadku, stĺpci aj diagonále oboch smerov, musí platiť

$$C = \sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} u_i.$$

Každý riadok, stĺpec aj diagonála obsahuje práve n štvorčekov, teda určite $0 \leq r_i, s_i, d_i, u_i \leq n$. Podľa predpokladu vieme, že čísla r_i (s_i, d_i, u_i) musia byť rôzne, preto musíme použiť všetky čísla $0, \ldots, n$ okrem jedného – označme ho r (analogicky pre ostatné smery s, d, u). Potom platí

$$C = \frac{n(n+1)}{2} - s = \frac{n(n+1)}{2} - r = \frac{n(n+1)}{2} - d = \frac{n(n+1)}{2} - u,$$

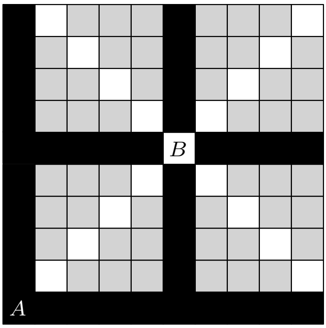
z čoho dostávame rovnosť $r = s = d = u$.

V prípade, že $0 < r < n$, musí existovať nejaký celočierny aj celobiely riadok, ale zároveň aj celočierny a celobiely stĺpec, čo nie je možné. Preto $r = 0$ alebo $r = n$, BUNV zvoľme $r = 0$, v opačnom prípade iba zinvertujeme farby. Máme teda $1 \leq r_i, s_i, d_i, u_i \leq n$.

Uvažujme teraz celočierny riadok a stĺpec – tie sa pretnú v štvorčeku A. Keďže každá diagonála zdieľa s každým riadkom aj stĺpcom jeden štvorček, musia diagonály oboch smerov s práve jedným čiernym políčkom prechádzať štvorčekom A, zvyšky týchto diagonál musia byť biele. V prípade, že sa tieto diagonály už v inom štvorčeku nepretnú, tak v každom riadku okrem celočierneho sú už určite 2 biele štvorčeky, každý z jednej diagonály. Preto neexistuje riadok, v ktorom je práve jeden biely štvorček, čo je spor.

Ak sa tieto diagonály pretnú ešte v jednom štvorčeku (označíme ho B), tak vo všetkých riadkoch, okrem tých obsahujúcich A alebo B, sú aspoň dva biele štvorčeky. Preto riadok s jediným bielym políčkom musí byť ten prechádzajúci cez políčko B. Analogicky identifikujeme aj stĺpec s jedným bielym štvorčekom.

Pozrime sa na riadok s práve jedným čiernym políčkom. Určite neobsahuje štvorček A ani B, lebo tieto riadky majú n alebo $n - 1$ čiernych políčok. Všetky ostatné riadky ale obsahujú jeden čierny štvorček zo stĺpca s políčkom A a druhý čierny štvorček zo stĺpca s B. Opäť dostávame spor. Tvrdenie v zadaní teda musí platiť.



Poznámky:
Príklad bol na osmičku pomerne ľahký, zarmucujúce ale je, že dosť veľa riešiteľov nepochopilo zadanie. Druhým kameňom úrazu bolo uvedomiť si, že diagonály sa môžu pretnúť až v dvoch bodoch.

(Marta Kossaczká & Peter „πtr“ Korcsok)