Průměry

1. jarní série | Termín odeslání: 10. února 2014

Není-li řečeno jinak, myslíme průměrem několika čísel jejich aritmetický průměr. Aritmetický průměr n čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ je číslo $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$.

Úloha 1. (3 body)
Může být průměr 2014 (ne nutně různých) přirozených čísel[1] roven číslu 201,4?

Úloha 2. (3 body)
Děti ve 3. B mají průměrně 9,6 spolužaček. Kolik dětí chodí do 3. B? Nalezněte všechny možnosti.

Úloha 3. (3 body)
PraSátko si hraje se svými přáteli plejtvákovci šedými. Kytovci do písku vyryjí čísla $1, 2, \dots, n$. PraSátko si v každém tahu vybere dvě čísla, jejichž průměr je celočíselný, smaže je a připíše do písku onen průměr. Dokažte, že pro každé $n \geq 3$ umí PraSátko postupovat tak, že na konci zbyde v písku jediné číslo.

Úloha 4. (5 bodů)
Na tabuli jsou dvě čísla: 2014 a nějaké menší přirozené číslo n. Pokud je průměr čísel na tabuli celočíselný, Alča ho na tabuli připíše a jedno z původních dvou čísel smaže. Dokažte, že Alča může tuto operaci provést nejvýše desetkrát po sobě, a najděte n, pro nějž ji tolikrát skutečně může provést.

Úloha 5. (5 bodů)
E.T. k narozeninám dostal krásný kruhový dort a hned se rozhodl půlkruhovou část z něj věnovat nejlepšímu řešiteli PraSátka. Než ji ale stihl odkrojit, Pepa už dort nakrájel tradičním způsobem na právě $4k$ dílků tak, že $2k$ z nich bylo větších (navzájem stejných) a $2k$ menších (též navzájem stejných). Dokažte, že E.T. i tak našel několik sousedních dílků, které tvořily půlkruh. (Podařilo se mu tedy oddělit půlkruhovou část, aniž by musel nakrájené kousky přeuspořádat.)

Úloha 6. (5 bodů)
Podmnožinu množiny $M = \{1, 2, \dots, n\}$ nazveme *průměrnou*, pokud je neprázdná a průměr jejích prvků je celočíselný. Dokažte, že počet průměrných podmnožin množiny M má stejnou paritu[2] jako n.

Úloha 7. (5 bodů)
Aritmetickým poloměrem dvou čísel a, b rozumíme číslo $\frac{a+b}{4}$. Po poli skáče n jedniček. Když se dvě čísla potkají, zmizí a místo nich se na poli objeví jejich aritmetický poloměr. Takto čísla na poli postupně ubývají, až zbyde jen jedno. Dokažte, že toto číslo nebude menší než $\frac{1}{n}$.

[1] Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.
[2] Dvě čísla mají stejnou paritu, pokud jsou obě sudá nebo obě lichá.

Úloha 8. (5 bodů)

Buď ABC ostroúhlý trojúhelník se středem kružnice opsané O. Přímky AO, BO, CO protnou kružnice opsané trojúhelníkům OBC, OCA, OAB postupně v bodech D, E, F různých od O. Dokažte, že

$$|OD| \cdot |OE| \cdot |OF| \geq d^3,$$

kde d značí průměr kružnice opsané trojúhelníku ABC.

Průměry

1. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1. (81; 78; 2,91; 3,0)

Může být průměr 2014 *(ne nutně různých) přirozených čísel*[3] *roven číslu* 201,4*?*

(Pepa Tkadlec)

ŘEŠENÍ:
Uvažujme přirozená čísla $a_1, \ldots, a_{2014}$, jejichž průměr je roven 201,4. Ze vzorce pro aritmetický průměr vyplývá, že $a_1 + \cdots + a_{2014} = 2014 \cdot 201{,}4 = 405\,619{,}6$, což jistě není přirozené číslo. Ale součtem přirozených čísel musí být opět číslo přirozené. Dostali jsme spor, tedy průměr 2014 přirozených čísel nemůže být roven 201,4.

POZNÁMKY:
Někteří řešitelé se vydali obtížnějšími cestami než vzorové řešení, naprostá většina se však dobrala kýženého cíle oceněného třemi body. Základem úspěchu bylo správně si přečíst zadání :-).

(Kristýna „Kikina" Zemková)

Úloha 2. (72; 59; 2,51; 3,0)

Děti ve 3. B mají průměrně 9,6 *spolužaček. Kolik dětí chodí do 3. B? Nalezněte všechny možnosti.*

(Pepa Tkadlec)

ŘEŠENÍ:
Označme c počet chlapců a d počet dívek. Každý chlapec bude mít d spolužaček a každá dívka $d-1$ spolužaček. Pro průměrný počet spolužaček tedy platí

$$\frac{cd + d(d-1)}{c+d} = 9{,}6.$$

Protože 9,6 je průměrem z čísel d a $d-1$, musí být $d - 1 \leq 9{,}6 \leq d$, a tedy $d = 10$. Po dosazení za počet dívek dostáváme, že chlapců je 15 a žáků ve 3. B celkem 25.

POZNÁMKY:
Úloha byla relativně lehká a pro většinu nepředstavovala velký problém. Většina neúspěšných řešení ztroskotala na nějaké základní úvaze z teorie čísel, což mi vzhledem k letošnímu seriálu na toto téma přijde škoda. Určitě bych i začínajícím řešitelům doporučil, aby si přečetli alespoň začátek seriálu.

(Martin Töpfer)

[3] Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.

Úloha 3.

(63; 52; 2,44; 3,0)

PraSátko si hraje se svými přáteli plejtvákovci šedými. Kytovci do písku vyryjí čísla $1, 2, \ldots, n$. *PraSátko si v každém tahu vybere dvě čísla, jejichž průměr je celočíselný, smaže je a připíše do písku onen průměr. Dokažte, že pro každé* $n \geq 3$ *umí PraSátko postupovat tak, že na konci zbyde v písku jediné číslo.* *(Martin „E.T.“ Sýkora)*

Řešení:

Nejprve PraSátko smaže čísla 1 a 3 a připíše jejich průměr $\frac{1+3}{2} = 2$. V druhém kroku zprůměruje dvě dvojky, čímž má pro $n = 3$ hotovo. Je-li $n > 3$, v písku jsou po druhém kroku čísla $2, 4, 5, \ldots, n$. PraSátko dále v k-tém kroku smaže dvě nejmenší čísla v písku, což jsou $k-1$ a $k+1$, a připisuje jejich průměr $\frac{k-1+k+1}{2} = k$. Tedy po k-tém kroku v písku zbývají čísla $k, k+2, k+3, \ldots, n$. Nakonec po $n-1$ krocích zbyde PraSátku jediné číslo, kterým je $n-1$.

Poznámky:

Mnoho řešitelů rozebíralo úlohu na několik případů a navrhovalo PraSátku různé postupy – podle parity n či dokonce podle zbytku, jaký dává n po dělení čtyřmi. To bylo pracné a zdlouhavé. Proto jsem udělila $+i$ všem řešitelům, kteří našli elegantní, univerzální postup, který funguje pro jakékoli $n \geq 3$. *(Michaela „Míša“ Hubatová)*

Úloha 4.

(55; 52; 4,20; 5,0)

Na tabuli jsou dvě čísla: 2014 a nějaké menší přirozené číslo n. *Pokud je průměr čísel na tabuli celočíselný, Alča ho na tabuli připíše a jedno z původních dvou čísel smaže. Dokažte, že Alča může tuto operaci provést nejvýše desetkrát po sobě, a najděte* n, *pro nějž ji tolikrát skutečně může provést.* *(Alča Skálová)*

Řešení:

Využijeme následující pozorování:

Tvrzení. *Po provedení operace bude rozdíl čísel napsaných na tabuli vždy poloviční oproti rozdílu čísel před provedením operace.*

Důkaz. Nechť $a \geq b$ jsou dvě čísla napsaná na tabuli. Při provádění operace Alča na tabuli připíše číslo $\frac{a+b}{2}$ a jedno z původních čísel smaže.

(1) Smaže-li Alča číslo a, tak rozdíl zbylých čísel bude roven $\frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$.
(2) Smaže-li Alča číslo b, tak rozdíl zbylých čísel bude roven $a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}$.

Neformálně se dá tvrzení také nahlédnout tak, že Alča vždy připíše číslo „uprostřed“ a jedno z krajních čísel smaže.

Dále pro spor předpokládejme, že existuje přirozené číslo $n < 2014$ takové, že Alča může provézt operaci více než desetkrát. Pro počáteční rozdíl $d = 2014 - n$ čísel na tabuli platí $0 < d < 2014$. Po provedení jedenácti operací tak bude rozdíl čísel na tabuli roven $d/2^{11}$, ovšem protože $0 < d/2^{11} < 2014/2048 < 1$, výsledný rozdíl nemůže být celé číslo, což je spor s tím, že na tabuli zbudou dvě celá čísla.

Začne-li Alča s číslem $n = 2014 - 2^{10} = 990$, potom ať bude provádět operace naprosto libovolně, budou díky dokázanému tvrzení na tabuli po každém provedení operace dvě celá čísla – jedno číslo je vždy celé, protože zůstalo na tabuli z minula, a druhé, protože rozdíl je celý (postupně se snižující mocnina dvojky). Po provedení poslední operace zbudou na tabuli dvě čísla s rozdílem jedna.

Poznámky:

Myšlenka s „půlením vzdáleností“ mezi dvěma čísly na tabuli se ukázala být poměrně jednoduchá, ale občas byl pro někoho trochu problém ji pořádně formulovat a korektně zapsat. Body jsem strhával, pokud někdo uvažoval pouze mazání menšího čísla a nikdy tak nesmazal číslo

2014, čímž si úlohu neúměrně zjednodušil (sice se ukáže, že je vlastně jedno, které číslo škrtáme, ale je potřeba to nejprve ospravedlnit). Nemálo řešitelů ukazovalo postup, jakým bude Alča provádět operace, pokud začne s číslem 990, ale stačí v podstatě říci, že se to nikdy nemůže pokazit. Můžete si také povšimnout, že se jedná o *jediné* číslo, které vyhovuje podmínkám úlohy.

(Filip Hlásek)

Úloha 5.

(44; 31; 3,45; 5,0)

E.T. k narozeninám dostal krásný kruhový dort a hned se rozhodl půlkruhovou část z něj věnovat nejlepšímu řešiteli PraSátka. Než ji ale stihl odkrojit, Pepa už dort nakrájel tradičním způsobem na právě $4k$ dílků tak, že $2k$ z nich bylo větších (navzájem stejných) a $2k$ menších (též navzájem stejných). Dokažte, že E.T. i tak našel několik sousedních dílků, které tvořily půlkruh. (Podařilo se mu tedy oddělit půlkruhovou část, aniž by musel nakrájené kousky přeuspořádat.)

(Martin „E.T." Sýkora)

Řešení:

E.T. dort rozdělil na dvě souvislé části sestávající se z $2k$ dílků. Buď byly stejně velké a měl vyhráno, nebo byla jedna menší. A právě menší část, ve které bylo větších dílků méně než k, si E.T. vybral. Ve zbylé části dortu pak bylo větších dílků více než k.

Nyní si uvědomme, co by se stalo, pokud by E.T. posunul svůj výběr $2k$ dílků o jeden kousek proti směru hodinových ručiček. Původní a posunutá část dortu by měly všechny dílky, až na dva krajní, společné, a proto by se počet větších dílků v daných částech rovnal nebo lišil o jedna. E.T. postupně posouval svůj výběr $2k$ dílků proti směru hodinových ručiček a sledoval, kolik větších dílků bylo v jeho výběru. Začínal s číslem menším než k, po $2k$ krocích skončil s číslem větším než k, přičemž v každém kroku daný počet zůstal beze změny nebo se změnil o jedna. Proto zřejmě v nějakém kroku musel být k.

V některém úseku o $2k$ dílcích bylo k větších, a proto i k menších dílků. Od obou typů dílků v něm tak byla obsažena polovina a E.T. tedy mohl oddělit půlkruhovou část dortu.

Poznámky:

Většina došlých řešení byla správná a kopírovala vzorové řešení. Všichni se tak dopustili drobné nekorektnosti, když prohlašovali za zřejmé, že při nějakém „otočení" bude počet vybraných větších dílků k (viz poslední věta druhého odstavce vzorového řešení). Ve skutečně podrobném řešení by se mělo dané tvrzení dokázat (což si můžete zkusit jako cvičení), ale nám úplně stačí považovat jej za zřejmé.

(Martin „E.T." Sýkora)

Úloha 6.

(22; 17; 3,82; 5,0)

Podmnožinu množiny $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ nazveme průměrnou, pokud je neprázdná a průměr jejích prvků je celočíselný. Dokažte, že počet průměrných podmnožin množiny M má stejnou paritu[4] jako n.

(Tomáš „Šavlík" Pavlík)

Řešení:

Všechny průměrné množiny rozdělíme na tři skupiny: A, B a C. Ve skupině A budou jednoprvkové množiny. Ve skupině B budou víceprvkové množiny obsahující svůj průměr. Ve skupině C budou zbylé průměrné množiny, tedy víceprvkové takové, které neobsahují svůj průměr. Každá jednoprvková množina je průměrná, tedy $|A| = n$. Teď už stačí dokázat, že $|B| = |C|$. Všechny množiny z B spárujeme s množinami z C tak, že množině přidáme, respektive odebereme její průměr. Už zbývá jen ověřit, že žádná množina nebude spárovaná s jednoprvkovou množinou. To by se mohlo stát, pouze pokud by dvouprvková množina obsahovala svůj průměr, což není možné.

[4] Dvě čísla mají stejnou paritu, pokud jsou obě sudá nebo obě lichá.

Poznámky:

Mnoho správných řešení k důkazu přistupovalo trochu jinak. Řešitelé párování vytvářeli v symetrii s průměrem samotné množiny M, což nebylo tak elegantní. Museli totiž ošetřit takto symetrické množiny, a to vedlo na rozebrání dvou možností podle parity n. Ti, kteří přišli na autorské řešení, si vysloužili imaginární bod. *(Tomáš „Šavlík“ Pavlík)*

Úloha 7.

(28; 15; 2,82; 3,5)

Aritmetickým poloměrem dvou čísel a, b rozumíme číslo $\frac{a+b}{4}$. Po poli skáče n jedniček. Když se dvě čísla potkají, zmizí a místo nich se na poli objeví jejich aritmetický poloměr. Takto čísla na poli postupně ubývají, až zbyde jen jedno. Dokažte, že toto číslo nebude menší než $\frac{1}{n}$.

(Tomáš „Šavlík“ Pavlík)

Řešení:

Tvrzení dokážeme indukcí. Pro $n = 1$ je splněno triviálně. Předpokládejme tedy, že podmínka ze zadání je splněna pro každý počet jedniček rovný $k < n$, a dokažme tvrzení pro n jedniček. Čísla na poli se potkávají až do té doby, než tam zbudou poslední dvě. Jedno přitom vzniklo z k jedniček a druhé z $n - k$ jedniček, kde $1 \le k < n$. Podle indukčního předpokladu jsou tato čísla alespoň $\frac{1}{k}$, resp. $\frac{1}{n-k}$. Jejich aritmetický poloměr si označme d. Poté platí:

$$d \ge \frac{\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}}{4} = \frac{n}{4k(n-k)} \ge \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n},$$

neboť $(n - 2k)^2 \ge 0$ a roznásobením dostaneme $n^2 \ge 4k(n - k)$. Pro n jedniček nám tedy na konci zbude číslo, které je alespoň $\frac{1}{n}$, což jsme měli dokázat.

Poznámky:

Kromě několika řešení na pár řádků se objevila spousta obchodníků, kteří provolávali mocná slova, že pokud se budou celou dobu budou potkávat dvě stejná čísla, bude výsledek vždy nejmenší, a proto je pro nás nejvýhodnější, když tak budeme činiti, ale na konci nám vyjde číslo větší než $\frac{1}{n}$, a proto je úloha dokázána. Nemusím dodávat, že tato slova, která jsou většinou pravdivá, je nutno podepřít argumenty, a to zde nemohlo být nic jiného než nerovnosti. Proto tito obchodníci svou úlohu neprodali za více než jeden štědrý bod. *(Lukáš Zavřel)*

Úloha 8.

(12; 7; 2,92; 5,0)

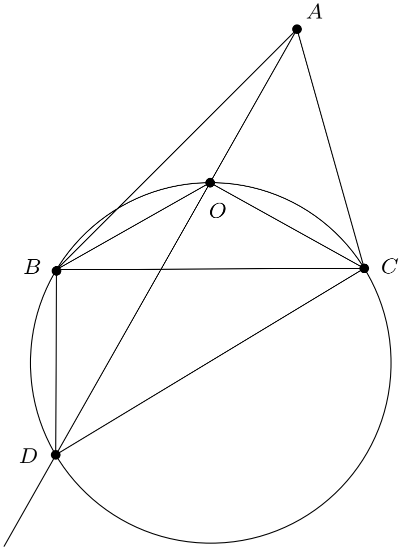
Buď ABC ostroúhlý trojúhelník se středem kružnice opsané O. Přímky AO, BO, CO protnou kružnice opsané trojúhelníkům OBC, OCA, OAB postupně v bodech D, E, F různých od O. Dokažte, že

$$|OD| \cdot |OE| \cdot |OF| \ge d^3,$$

kde d značí průměr kružnice opsané trojúhelníku ABC. *(Filip Hlásek)*

Řešení (podle Anh Dung „Tondy“ Le):

Jelikož je ABC ostroúhlý, leží bod O v něm. Při standardním značení úhlů plyne z věty o obvodovém a středovém úhlu $|\sphericalangle BOC| = 2\alpha$, $|\sphericalangle AOC| = 2\beta$ a $|\sphericalangle AOB| = 2\gamma$. V tětivovém čtyřúhelníku $BOCD$ platí $|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle DOB| = 180^\circ - 2\gamma$. Analogicky $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle COD| = 180^\circ - 2\beta$. Dále z tětivovosti plyne $|\sphericalangle BDC| = 180^\circ - 2\alpha$.



Vyjádřeme nyní délky úseček vystupujících v zadání. Z Ptolemaiovy věty pro tětivový čtyřúhelník $BOCD$ plyne

$$|BC| \cdot |OD| = |BO| \cdot |CD| + |CO| \cdot |BD|, \quad \text{tedy} \quad |OD| = \frac{d(|BD| + |CD|)}{2|BC|}.$$

Použitím sinové věty v trojúhelníku BCD dostáváme

$$\frac{|BD|}{\sin(180^\circ - 2\gamma)} = \frac{|CD|}{\sin(180^\circ - 2\beta)} = \frac{|BC|}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}.$$

Pomocí těchto vztahů a identity $\sin(180^\circ - \varphi) = \sin\varphi$ dostáváme

$$|OD| = \frac{d}{2} \cdot \frac{\sin(2\gamma) + \sin(2\beta)}{\sin(2\alpha)}$$

a analogicky pro zbylé dvě délky platí:

$$|OE| = \frac{d}{2} \cdot \frac{\sin(2\gamma) + \sin(2\alpha)}{\sin(2\beta)}$$

a

$$|OF| = \frac{d}{2} \cdot \frac{\sin(2\beta) + \sin(2\alpha)}{\sin(2\gamma)}.$$

Dosazením odvozených vztahů do zadání dostáváme ekvivalentní nerovnost

$$\big(\sin(2\alpha) + \sin(2\beta)\big)\big(\sin(2\alpha) + \sin(2\gamma)\big)\big(\sin(2\gamma) + \sin(2\beta)\big) \geq 8\sin(2\alpha)\sin(2\beta)\sin(2\gamma).$$

Tato nerovnost je však jen cyklickým součinem tří AG nerovností tvaru

$$\sin(2\alpha) + \sin(2\beta) \geq 2\sqrt{\sin(2\alpha)\sin(2\beta)},$$

přičemž nezápornost členů plyne z ostroúhlosti trojúhelníka.

Poznámky:
Došlá řešení se dala rozdělit na dvě podobně velké skupiny – na zcela správná a zcela špatná. K mojí radosti bylo ale přece jenom těch správných více. Jediným častým nedostatkem těch správných bylo opomenutí zdůraznění toho, že některé použité úvahy fungují jen pro ostroúhlý trojúhelník. Body jsem za to nakonec nestrhával. Téměř všichni úspěšní řešitelé této úlohy použili stejně jako vzorové řešení AG nerovnost, což je nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým *průměrem*, takže úloha byla skutečně zařazena do správné série :-). *(David Hruška)*