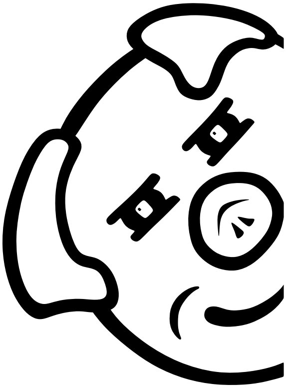
Matematický korespondenční seminář

Milý příteli!



Stejně jako v přírodě letos po podzimu přišlo hned jaro, i náš seminář se z podzimní části úspěšně přehoupl do té jarní. Pohled do výsledkové listiny prozradí, že na podzim byl boj lítý. Nakonec první dvě místa obsadili prváci, což se naposledy stalo v roce 2007/2008. Tak doufejme, že si to starší řešitelé nenechají líbit a souboj o čelní příčky bude napínavý do samého závěru.

Dobrým prostorem pro sbírání bodů je seriál. V těchto komentářích se Ti dostává do rukou jeho poslední díl. Je o něco kratší než první dva díly a navíc nevyžaduje znalost většiny dosud probrané látky, tak neváhej a začti se do něj. Ale pozor, tentokrát jsou vtipy nejen v poznámkách pod čarou, takže čti pozorně a opatrně!

Nejvíce bodů se dá tradičně „nahrabat“ v Myšmaši – čtvrté jarní sérii. Počítají se totiž všechny odeslané úlohy, takže můžeš svůj bodový zisk vylepšit až o 35 bodů! Kromě prestiže a hodnotných cen je ve hře samozřejmě i účast na podzimním soustředění, na které zveme řešitele podle výsledků jarní části semináře.

Úspěšný boj s jehlany, myšmi i konvolucemi Ti přeje

Kuba Krásenský

Co všechno je ve čtvrtých komentářích?

- Vzorová řešení 4. podzimní a 1. jarní série
- Vzorové řešení 2. seriálové série
- Poslední díl seriálu Teorie čísel
- Výsledkové listiny

- Příloha: Zadání 3. a 4. jarní série a 3. seriálové série
- Příloha: Pozvánka na jarní výlet

Náboj

Hravá týmová matematická soutěž Náboj proběhne **11. dubna 2014** v Praze, Opavě, Bratislavě, Košicích, Pasově a Oulu. Přihlašování se spouští **10. března** na stránkách *www.naboj.org*. Upozorňujeme, že zájem bývá velký a poptávka obvykle přesáhne kapacitu soutěže – proto neváhej a domluv si s kamarády tým co nejdříve!

Jarní výlet

Nepropásni ani tradiční jarní výlet – jedinečnou možnost, jak se potkat s organizátory i ostatními řešiteli a příjemně strávit den v přírodě. Uskuteční se v sobotu 22. března. Vše potřebné se dočteš v přiložené pozvánce.

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

Minima and Maxima

4TH AUTUMN SERIES VZOROVÉ ŘEŠENÍ

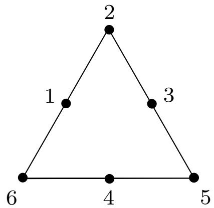
Problem 1. (70; 63; 2,73; 3,0)

Ann found a triangle with numbers 1 to 6 written at its vertices and midpoints of its sides (each number was used once). When she summed the triplets of numbers along the triangle sides, the largest sum was 15. When she summed the pairs of numbers along the midlines, the smallest sum was 4. What is the largest possible sum of the three numbers at the vertices?

(Anička Doležalová)

ŘEŠENÍ:

Keď hľadáme, aký je maximálny súčet vrcholov v trojuholníku, tak to je ekvivalentné úlohe nájsť minimálny súčet bodov, ktoré ležia v stredoch strán. Všimnime si, že súčet dvoch najmenších čísel (z týchto „stredových bodov") je 4, takže to bezpodmienečne musia byť čísla 1 a 3, a teda dvojka nemôže byť posledným stredovým bodom. Najmenšie číslo, ktoré môže byť ďalším stredovým bodom, je 4. Z toho vyplýva, že maximálny súčet vrcholov môže byť $13 = 6 + 5 + 2$. Zostáva nám už len ukázať, že také rozmiestnenie čísel vieme nájsť (viď obrázok) a splňuje zároveň aj podmienku, že súčet bodov na jednej (spodnej) strane je 15.



POZNÁMKY:

Úloha bola jednoduchá a skoro všetkým sa ju podarilo správne vyriešiť. Vo vzoráku som chcel ukázať iný spôsob, ako sa dalo prísť k výsledku. Väčšina ľudí postupovala priamočiarejšie – dopĺňali do trojuholníka postupne body a tak zistili, ako bude trojuholník vyzerať.

Na záver by som vám chcel ponúknuť luxusné video od *Rada Švarca*, ktorý nám riešenie podal v netradičnom prevedení :-). Nájdete ho na *http://www.youtube.com/watch?v=ARwwjlZ-pDQ*.

(Viktor Szabados)

Problem 2. (50; 35; 2,24; 3,0)

Numbers $1, 2, \ldots, 2014$ are written around a circle in some order. What is the smallest possible sum of the absolute differences of adjacent numbers? *(Alča Skálová)*

ŘEŠENÍ:

Na kruhu najdeme číslo 1, vyrazíme z něj jedním směrem a budeme postupně sčítat absolutní hodnoty rozdílů sousedních čísel. Než narazíme na číslo 2014, je tento součet nutně alespoň

$2014 - 1 = 2013$. Můžeme si představit, že z výšky jednoho metru nad mořem stoupáme na horu vysokou 2014 metrů. Pak také musíme překonat převýšení 2013 metrů. Podobně pokud se od čísla 1 vydáme opačným směrem, součet je opět aspoň 2013. Dohromady tedy dostáváme $2013 + 2013 = 4026$.

Máme dolní odhad, zbývá zjistit, jestli je pro nějaký kruh takový součet možný. A to už je snadné: každý kruh, v němž je mezi 1 a 2014 oběma směry jen rostoucí posloupnost čísel, má součet absolutních hodnot rozdílů právě 4026 (neboť při cestě k vrcholu hory nijak zbytečně nestoupáme ani neklesáme).

Poznámky:
Naprostá většina řešitelů bez problémů došla ke správnému výsledku. Ne všichni si ale uvědomili, že nalezení jedné možnosti a prohlášení jí za minimum nestačí. Je potřeba ukázat, že součet pro jinou možnost nemůže být menší. Důkazy se objevily všelijaké, některé byly precizní a obecné, jiné si vystačily s podobným zjevným argumentem jako výše. *(Bára Kociánová)*

Problem 3.

(49; 38; 2,22; 3,0)

Martin loves every positive integer which does not contain digit 9 in its decimal representation and which becomes a square of an integer if any single of its digits is increased by one. Out of the numbers he loves, he loves the largest one the most. Which number is it? *(Martin Čech)*

Řešení:
Označme si nějaké alespoň dvojciferné Martinovo oblíbené číslo jako n. Pak čísla $n + 1$ i $n + 10$ musí být čtverce. Nechť tedy $n + 1 = a^2$ a $n + 10 = b^2$, kde $a, b \in \mathbb{N}$ a navíc $a < b$. Po odečtení těchto rovnic dostáváme, že $b^2 - a^2 = 9$, neboli $(b + a)(b - a) = 9$. Z $b > a > 0$ plyne $b + a > b - a > 0$. Tato podmínka nám z možných rozkladů čísla 9 na součin dvou celých čísel zanechá jedinou možnost, a to $b + a = 9$, $b - a = 1$, z čehož dostáváme řešení $a = 4$, $b = 5$. Odtud máme $n = a^2 - 1 = 15$, které vyhovuje zadání. Číslo 15 je tak jediné alespoň dvojciferné Martinovo oblíbené, a je proto nejvyšší.

Poznámky:
Ačkoliv byla úloha docela jednoduchá, část řešitelů zapomněla na nějaké drobnosti, jako například proč nemusíme brát v úvahu rozklad 9 na záporná čísla. Za takové maličkosti jsem body nestrhával, rozhodl jsem se ale strhnout bod za to, že jste úplně bez důkazu tvrdili, že 5^2, 4^2 jsou jediné čtverce, jejichž rozdíl je 9. Není to pravda, protože $3^2 - 0^2 = 9$. Je však pravda, že to jsou čtverce největší, což k řešení úlohy stačí. Bohužel se našlo i pár takových, kteří si nepozorně přečetli zadání a předpokládali, že zvětšují jenom jednu cifru. *(Martin Čech)*

Problem 4.

(48; 42; 3,79; 5,0)

In terms of n, what is the largest number of subsets of the set $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ which can be chosen such that every two chosen subsets have at most two elements in common? *(David Hruška)*

Řešení:
Začneme nejprve s malými hodnotami n. Pro $n \leq 2$ můžeme jistě vybrat všechny podmnožiny, a proto pro $n = 0, 1, 2$ máme postupně 1, 2 a 4 možné podmnožiny. Dále budeme uvažovat $n \geq 3$. Jistě můžeme vybrat všechny nejvýše tříprvkové podmnožiny, neboť tyto nemohou mít více než dva společné prvky s libovolnou jinou takovou množinou. Celkový počet vybraných množin pak bude roven

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \frac{n^3 + 5n + 6}{6},$$

což funguje dokonce i pro speciálně rozebíraná malá n.

Nyní dokážeme, že větší počet podmnožin není možné vybrat. Pro spor předpokládejme, že při největším možném počtu vybraných podmnožin máme vybranou některou podmnožinu M

s více než třemi prvky. Poté můžeme M nahradit všemi jejími tříprvkovými podmnožinami – ty jsou určitě alespoň dvě a rovněž nemají společné více než dva prvky s ostatními vybranými podmnožinami. Toto je spor s tím, že se jednalo o největší počet podmnožin, a tedy není možné vybrat více podmnožin než všechny nejvýše tříprvkové.

Poznámky:
Naprostá většina z vás se dopracovala ke správnému výsledku, který ovšem mnohým vycházel o jedna menší, neboť z nějakého záhadného důvodu nemáte rádi prázdné množiny. Za absenci prázdné množiny jsem strhával jeden bod. Za správný výsledek jste mohli obdržet tři body, přičemž další dva na vás čekaly za důkaz, že se opravdu jedná o maximum. Klasický problém tu totiž spočíval v tom, že jste mluvili o výhodnosti použití všech trojic a o tom, jak si výběrem té či oné větší množiny zakážeme více dalších množin, takže je to pro nás velice nevýhodné. Nemusím snad dodávat, že tyto argumenty o výhodnosti jsou skvělým prvkem reklam, ovšem v matematickém důkazu už mají využití značně menší :) *(Lukáš Zavřel)*

Problem 5.

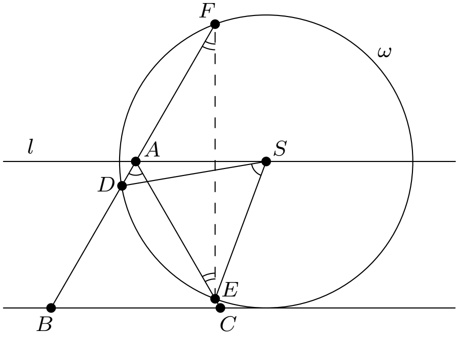
(42; 27; 3,00; 3,5)

Given an equilateral triangle ABC, let ℓ be a line passing through A parallel to BC. For every point S on ℓ, consider a circle ω centered at S and tangent to the line BC. Determine all positions of S for which the length of arc of ω lying inside $\triangle ABC$ is the maximum possible.

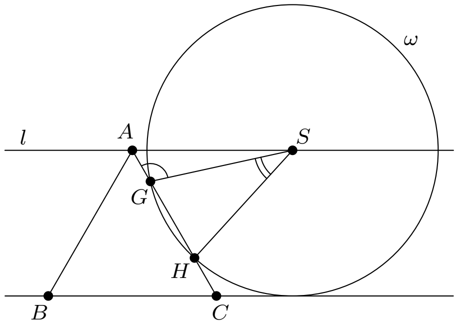
(David Hruška)

Řešení:
Pro libovolný bod $S \in l$ je poloměr odpovídající kružnice ω dán vzdáleností d přímek l a BC. Pro délku L kružnicového oblouku platí $L = \alpha \cdot r$, kde r je poloměr kružnice a α je příslušný středový úhel v radiánech ($\pi = 180°$). Jelikož všechny kružnice ω mají stejný poloměr d, je maximalita délky oblouku ekvivalentní maximalitě příslušného středového úhlu. Rozlišíme dva případy. V obou můžeme vzhledem k symetrii BÚNO předpokládat, že body C a S leží ve stejné polorovině určené přímkou AB (bod S je „vpravo" od A nebo přímo $S = A$).

(i) $|AS| \le d$. V tomto případě protíná kružnice ω obě úsečky AB i AC, každou právě jednou. Označme jejich průsečíky s ω po řadě D, E ($E \neq A$). Přímka l svírá s polopřímkou AC i s polopřímkou opačnou k polopřímce AB úhel $60°$, průsečík ω s touto opačnou polopřímkou označme F ($F \neq A$). Navíc tyto dvě polopřímky neleží na jedné přímce, tedy jsou osově souměrné podle l. Kružnice ω je taktéž osově souměrná podle l, proto jsou i odpovídající průsečíky E a F osově souměrné podle l, tedy přímka EF je kolmá na l i na BC. Z toho již snadno zjistíme, že $|\sphericalangle AFE| = 30°$. Kratšímu oblouku DE odpovídá obvodový úhel $30°$, čili příslušný středový úhel má velikost $60°$.



(ii) $|AS| > d$. Kružnice ω tentokrát protíná pouze stranu AC (pokud ji neprotíná, zkoumaný oblouk neexistuje), a to ve dvou bodech (pokud se ω dotýká AC, oblouk má nulovou délku). Označme G průsečík bližší k A. Podívejme se na trojúhelník ASG. Jelikož $|\sphericalangle GAS| = 60°$, platí $|\sphericalangle CGS| = |\sphericalangle GAS| + |\sphericalangle ASG| > |\sphericalangle GAS| = 60°$. Trojúhelník GSH, kde H je druhý průsečík AC s ω, je zřejmě rovnoramenný, tedy $|\sphericalangle GSH| = 180° - 2 \cdot |\sphericalangle HGS| < 60°$.



Délka oblouku ležícího uvnitř trojúhelníku ABC je tedy maximální, právě když $|AS| \leq d$.

Poznámky:
S nadsázkou lze říci, že co řešení, to unikát. Ke slovu se dostala kromě standardního úhlení sinová i kosinová věta, věta o úhlu tětiv, shodná zobrazení, a co by to bylo za geometrii, kdyby ji alespoň někdo nevyřešil analyticky. Úloha se takříkajíc vzdala téměř jakémukoliv útoku. Pro fajnšmekry dodávám na rozmyšlenou – jak s řešením souvisí tzv. „antišvrk"?[1] Většina řešitelů přešla část (ii) jen s konstatováním, že když se bod S vzdaluje od A, délka oblouku uvnitř ABC se zmenšuje, apod. Použitá tvrzení tohoto typu byla sice velmi intuitivní a snadno dokazatelná, takže jsem za pouhé jejich zmínění body nestrhával, ale přesto je vždy lepší je alespoň stručně dokázat. Řešitele, kteří se o to s úspěchem pokusili, jsem ocenil kladným imaginárním bodem. Někteří řešitelé mě potěšili velmi dobrou angličtinou (občas asi lepší, než je ta moje), ostatní bych chtěl povzbudit k dalšímu zdokonalování se v tomto jazyce, odborném i obecném, neboť o jeho uplatnění v obou oblastech nemůže být pochyb. *(David Hruška)*

Problem 6.

(56; 46; 3,34; 4,0)

Find the largest possible number of rooks that can be placed on a $3n \times 3n$ chessboard so that each rook is attacked[2] by at most one other rook. *(Alča Skálová)*

Řešení:
Ukážeme, že maximální počet věží, které lze rozmístit dle zadání, je $4n$.

Předně si všimněme, že v jednom řádku či sloupci mohou být nejvýše dvě věže. Jsou-li navíc v nějakém řádku, resp. sloupci šachovnice dvě věže, pak se ve sloupcích, resp. řádcích, kde tyto dvě věže stojí, již nemůže nacházet žádná další věž.

Pro spor předpokládejme, že se nám na šachovnici podařilo korektně rozmístit alespoň $4n+1$ věží. Potom musí být v alespoň $n+1$ řádcích dvě věže. Tyto dvojice věží vynucují existenci alespoň $2(n+1)$ sloupců, ve kterých je pouze jedna věž. Ve zabývajících nejvýše $n-2$ sloupcích

---

[1] *http://iksko.org/files/sbornik1.pdf*

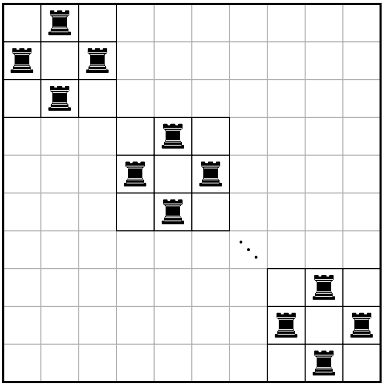
[2] A rook is attacked by another rook if they belong to the same row or column and there are no other rooks between them.

mohou být nejvýše dvě věže, tedy pokud spočítáme celkový počet věží na šachovnici přes sloupce, zjistíme, že věží je na šachovnici nejvýše

$$2(n+1)+2(n-2)=4n-2<4n+1,$$

což je hledaný spor.

Možností, jak na šachovnici $3n \times 3n$ správně rozmístit $4n$ věží, je mnoho – jeden možný způsob je celou šachovnici rozdělit na čtverce 3×3, vzít ty na diagonále a do každého z nich umístit čtyři věže tak, aby se po dvou ohrožovaly („do kříže"). Situaci ilustruje obrázek:



Poznámky:

Většina řešení nepostupovala jako výše uvedené, ale zakládala se na úvaze, že dvojice ohrožujících se věží „zabere" dva řádky a jeden sloupec či naopak, tedy do šachovnice, která má dohromady $6n$ sloupců a řádků, můžeme takovýchto dvojic umístit nanejvýš $2n$. Pak je ovšem potřeba se ještě nějak vypořádat s případnými věžemi, které nejsou vůbec ohroženy, přičemž pouhé konstatování, že ty „nejsou tak výhodné", nestačí – co kdyby byl maximální rozestavitelný počet věží lichý? Za tuto nedbalost jsem strhával bod. Mnoha řešitelům však úloha nečinila žádné obtíže a vysloužili si plný bodový zisk. *(Alexander „Olin" Slávik)*

Problem 7.

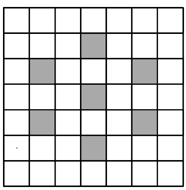
(53; 34; 3,09; 4,0)

An uncolored 7×7 chessboard is given. What is the smallest number of squares which can be colored black so that every 5-square (Greek) cross contains at least one black square?

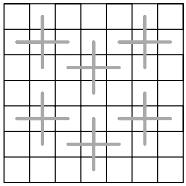
(Martin Töpfer)

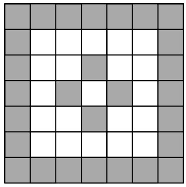
Řešení:

Vyhovující obarvení sedmi polí je znázorněno na následujícím obrázku.

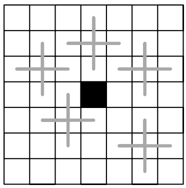


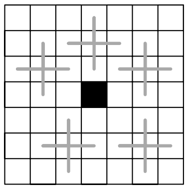
Nyní pro spor předpokládejme, že stačí obarvit nejvýše šest polí. Když tabulku 7×7 pokryjeme šesti nepřekrývajícími se kříži (viz obrázek), bude muset být v každém kříži právě jedno obarvené políčko. To znamená, že políčka mimo tyto kříže nemohou být obarvená. To samé platí i v případě, že znázorněné pokrytí otočíme o $90°$, tedy obarvené nemůže být žádné z šedých políček na obrázku vpravo. K tomu, aby středový kříž obsahoval obarvené políčko, musí být obarvené prostřední pole.





Stejný trik nyní zopakujeme. Protože je prostřední pole již obarvené, budeme pokrývat zbylá pole pěti nepřekrývajícími se kříži. Opět bude muset každý z nich obsahovat právě jedno obarvené pole, a tedy pole mimo kříže musí být neobarvená. Využijeme tato dvě pokrytí:





Když uvážíme všechna čtyři otočení pokrytí vlevo a u pokrytí vpravo uvážíme nejen jeho otočení, ale i otočení jeho symetrické varianty, vyloučíme tak obarvení všech políček kromě prostředního. To ale znamená, že vyhovující pokrytí má obarvené jediné políčko, což je zjevně spor.

Poznámky:

Sedmá úloha s šachovnicí 7×7 a výsledkem 7 nalákala nezvykle mnoho řešitelů. Bohužel v mnohých řešeních úplně chyběl pokus o důkaz, že nestačí obarvit šest políček. Občas se vyskytlo i vágní přesvědčování, že jsme vybírali ta nejlepší možná políčka. Takový postup ale u podobných úloh téměř nikdy nevede ke kýženému výsledku a ani tato úloha nebyla výjimkou.

Často se v řešení objevovalo počítání, kolik křížů obarvením daného políčka „vyřešíme“. Tento postup většinou slavil úspěch, jen bylo potřeba pořádně rozebrat situace s kříži v rohu. Chtěl bych také vyzdvihnout naprosto originální řešení *Eduarda Batmendijna*, který si tím vysloužil imaginární bod a můj věčný obdiv. *(Martin Töpfer)*

Problem 8.

(12; 2; 0,67; 0,0)

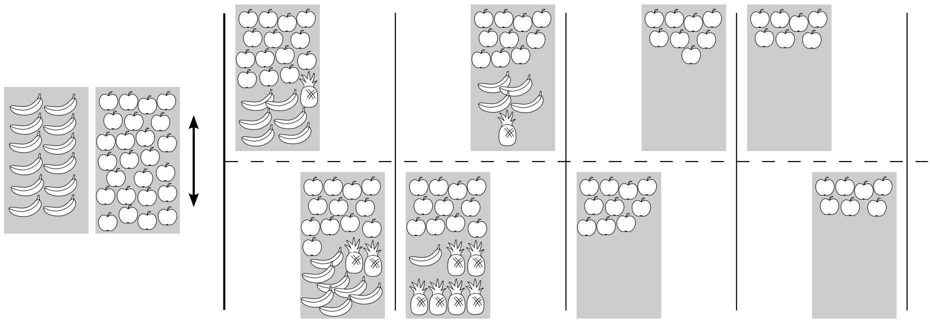
In a certain grocery store, Bartcha noticed 100 boxes full of fruits. Every box contained apples, bananas, and pineapples. Prove that Bartcha can buy 51 of these boxes so that she gets at least half of the apples, bananas and pineapples simultaneously. *(Martina Vaváčková)*

Řešení:

Z celkového počtu 100 přepravek odebereme tu s největším počtem jablek a ze zbylých 99 tu s největším počtem banánů – označme je postupně J a B. Zbývajících 98 přepravek seřadíme sestupně podle počtu jablek a rozdělíme je do dvojic (první s druhou, třetí se čtvrtou, až devadesátá sedmá s devadesátou osmou).

Nyní vytvoříme dvě skupiny po 49 přepravkách. Budeme postupně brát všechny dvojice a přepravku s větším počtem banánů vždy umístíme do skupiny, v níž je aktuálně banánů méně, druhou přepravku do druhé skupiny. Pokud je v obou přepravkách nebo v obou skupinách aktuálně stejný počet banánů, můžeme si vybrat, kterou přepravku dáme kam. Tímto postupem zajistíme, že v každém kroku se budou počty banánů v jednotlivých skupinách lišit nejvýše o počet banánů v B. Když tedy k libovolné ze skupin přidáme přepravky B a J, budeme mít zaručeno, že zde máme nadpoloviční většinu banánů.

Ukážeme, že totéž platí pro jablka. Označme počty jablek v přepravkách v první, resp. v druhé skupině sestupně $a_1, a_2, \dots, a_{49}$, resp. $b_1, b_2, \dots, b_{49}$. Označme počet jablek v J jako a_0 a přidejme tuto přepravku k první skupině. Pak platí $a_i \geq b_{i+1}$, $i = 0, \dots, 48$. Po sečtení všech nerovností dostaneme, že počet jablek v první skupině spolu s J je větší nebo roven počtu jablek v druhé skupině. Stejnou úvahu můžeme provést i naopak.



Stačí tedy vybrat skupinu s větším počtem ananasů a přidat k ní přepravky B a J. Takto Barča v každém případě získá 51 přepravek, v nichž bude dohromady alespoň polovina celkového počtu jablek, banánů i ananasů.

Poznámky:
Sešla se spousta řešení, z nichž drtivá většina byla špatně. Obzvlášť typické byly chybné předpoklady, které úlohu zjednodušily natolik, že se z ní stala očividná záležitost.

(Martina Vaváčková)

Průměry

1. jarní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

(81; 78; 2,91; 3,0)

Může být průměr 2014 *(ne nutně různých) přirozených čísel*[3] *roven číslu* 201,4*?*

(Pepa Tkadlec)

Řešení:

Uvažujme přirozená čísla $a_1, \ldots, a_{2014}$, jejichž průměr je roven 201,4. Ze vzorce pro aritmetický průměr vyplývá, že $a_1 + \cdots + a_{2014} = 2014 \cdot 201{,}4 = 405\,619{,}6$, což jistě není přirozené číslo. Ale součtem přirozených čísel musí být opět číslo přirozené. Dostali jsme spor, tedy průměr 2014 přirozených čísel nemůže být roven 201,4.

Poznámky:

Někteří řešitelé se vydali obtížnějšími cestami než vzorové řešení, naprostá většina se však dobrala kýženého cíle oceněného třemi body. Základem úspěchu bylo správně si přečíst zadání :-). *(Kristýna „Kikina“ Zemková)*

Úloha 2.

(72; 59; 2,51; 3,0)

Děti ve 3. B mají průměrně 9,6 *spolužaček. Kolik dětí chodí do 3. B? Nalezněte všechny možnosti.*

(Pepa Tkadlec)

Řešení:

Označme c počet chlapců a d počet dívek. Každý chlapec bude mít d spolužaček a každá dívka $d - 1$ spolužaček. Pro průměrný počet spolužaček tedy platí

$$\frac{cd + d(d-1)}{c + d} = 9{,}6.$$

Protože 9,6 je průměrem z čísel d a $d - 1$, musí být $d - 1 \leq 9{,}6 \leq d$, a tedy $d = 10$. Po dosazení za počet dívek dostáváme, že chlapců je 15 a žáků ve 3. B celkem 25.

Poznámky:

Úloha byla relativně lehká a pro většinu nepředstavovala velký problém. Většina neúspěšných řešení ztroskotala na nějaké základní úvaze z teorie čísel, což mi vzhledem k letošnímu seriálu na toto téma přijde škoda. Určitě bych i začínajícím řešitelům doporučil, aby si přečetli alespoň začátek seriálu. *(Martin Töpfer)*

[3] Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.

Úloha 3.

(63; 52; 2,44; 3,0)

PraSátko si hraje se svými přáteli plejtvákovci šedými. Kytovci do písku vyryjí čísla $1, 2, \ldots, n$. PraSátko si v každém tahu vybere dvě čísla, jejichž průměr je celočíselný, smaže je a připíše do písku onen průměr. Dokažte, že pro každé $n \geq 3$ umí PraSátko postupovat tak, že na konci zbyde v písku jediné číslo. *(Martin „E.T.“ Sýkora)*

Řešení:

Nejprve PraSátko smaže čísla 1 a 3 a připíše jejich průměr $\frac{1+3}{2} = 2$. V druhém kroku zprůměruje dvě dvojky, čímž má pro $n = 3$ hotovo. Je-li $n > 3$, v písku jsou po druhém kroku čísla $2, 4, 5, \ldots, n$. PraSátko dále v k-tém kroku smaže dvě nejmenší čísla v písku, což jsou $k - 1$ a $k + 1$, a připisuje jejich průměr $\frac{k-1+k+1}{2} = k$. Tedy po k-tém kroku v písku zbývají čísla $k, k + 2, k + 3, \ldots, n$. Nakonec po $n - 1$ krocích zbyde PraSátku jediné číslo, kterým je $n - 1$.

Poznámky:

Mnoho řešitelů rozebíralo úlohu na několik případů a navrhovalo PraSátku různé postupy – podle parity n či dokonce podle zbytku, jaký dává n po dělení čtyřmi. To bylo pracné a zdlouhavé. Proto jsem udělila $+i$ všem řešitelům, kteří našli elegantní, univerzální postup, který funguje pro jakékoli $n \geq 3$. *(Michaela „Míša“ Hubatová)*

Úloha 4.

(55; 52; 4,20; 5,0)

Na tabuli jsou dvě čísla: 2014 a nějaké menší přirozené číslo n. Pokud je průměr čísel na tabuli celočíselný, Alča ho na tabuli připíše a jedno z původních dvou čísel smaže. Dokažte, že Alča může tuto operaci provést nejvýše desetkrát po sobě, a najděte n, pro nějž ji tolikrát skutečně může provést. *(Alča Skálová)*

Řešení:

Využijeme následující pozorování:

Tvrzení. *Po provedení operace bude rozdíl čísel napsaných na tabuli vždy poloviční oproti rozdílu čísel před provedením operace.*

Důkaz. Nechť $a \geq b$ jsou dvě čísla napsaná na tabuli. Při provádění operace Alča na tabuli připíše číslo $\frac{a+b}{2}$ a jedno z původních čísel smaže.

(1) Smaže-li Alča číslo a, tak rozdíl zbylých čísel bude roven $\frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$.
(2) Smaže-li Alča číslo b, tak rozdíl zbylých čísel bude roven $a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}$.

Neformálně se dá tvrzení také nahlédnout tak, že Alča vždy připíše číslo „uprostřed“ a jedno z krajních čísel smaže.

Dále pro spor předpokládejme, že existuje přirozené číslo $n < 2014$ takové, že Alča může provézt operaci více než desetkrát. Pro počáteční rozdíl $d = 2014 - n$ čísel na tabuli platí $0 < d < 2014$. Po provedení jedenácti operací tak bude rozdíl čísel na tabuli roven $d/2^{11}$, ovšem protože $0 < d/2^{11} < 2014/2048 < 1$, výsledný rozdíl nemůže být celé číslo, což je spor s tím, že na tabuli zbudou dvě celá čísla.

Začne-li Alča s číslem $n = 2014 - 2^{10} = 990$, potom ať bude provádět operace naprosto libovolně, budou díky dokázanému tvrzení na tabuli po každém provedení operace dvě celá čísla – jedno číslo je vždy celé, protože zůstalo na tabuli z minula, a druhé, protože rozdíl je celý (postupně se snižující mocnina dvojky). Po provedení poslední operace zbudou na tabuli dvě čísla s rozdílem jedna.

Poznámky:

Myšlenka s „půlením vzdáleností“ mezi dvěma čísly na tabuli se ukázala být poměrně jednoduchá, ale občas byl pro někoho trochu problém ji pořádně formulovat a korektně zapsat. Body jsem strhával, pokud někdo uvažoval pouze mazání menšího čísla a nikdy tak nesmazal číslo

2014, čímž si úlohu neúměrně zjednodušil (sice se ukáže, že je vlastně jedno, které číslo škrtáme, ale je potřeba to nejprve ospravedlnit). Nemálo řešitelů ukazovalo postup, jakým bude Alča provádět operace, pokud začne s číslem 990, ale stačí v podstatě říci, že se to nikdy nemůže pokazit. Můžete si také povšimnout, že se jedná o *jediné* číslo, které vyhovuje podmínkám úlohy.

(Filip Hlásek)

Úloha 5.

(44; 31; 3,45; 5,0)

E.T. k narozeninám dostal krásný kruhový dort a hned se rozhodl půlkruhovou část z něj věnovat nejlepšímu řešiteli PraSátka. Než ji ale stihl odkrojit, Pepa už dort nakrájel tradičním způsobem na právě $4k$ dílků tak, že $2k$ z nich bylo větších (navzájem stejných) a $2k$ menších (též navzájem stejných). Dokažte, že E.T. i tak našel několik sousedních dílků, které tvořily půlkruh. (Podařilo se mu tedy oddělit půlkruhovou část, aniž by musel nakrájené kousky přeuspořádat.)

(Martin „E.T." Sýkora)

Řešení:

E.T. dort rozdělil na dvě souvislé části sestávající se z $2k$ dílků. Buď byly stejně velké a měl vyhráno, nebo byla jedna menší. A právě menší část, ve které bylo větších dílků méně než k, si E.T. vybral. Ve zbylé části dortu pak bylo větších dílků více než k.

Nyní si uvědomme, co by se stalo, pokud by E.T. posunul svůj výběr $2k$ dílků o jeden kousek proti směru hodinových ručiček. Původní a posunutá část dortu by měly všechny dílky, až na dva krajní, společné, a proto by se počet větších dílků v daných částech rovnal nebo lišil o jedna. E.T. postupně posouval svůj výběr $2k$ dílků proti směru hodinových ručiček a sledoval, kolik větších dílků bylo v jeho výběru. Začínal s číslem menším než k, po $2k$ krocích skončil s číslem větším než k, přičemž v každém kroku daný počet zůstal beze změny nebo se změnil o jedna. Proto zřejmě v nějakém kroku musel být k.

V některém úseku o $2k$ dílcích bylo k větších, a proto i k menších dílků. Od obou typů dílků v něm tak byla obsažena polovina a E.T. tedy mohl oddělit půlkruhovou část dortu.

Poznámky:

Většina došlých řešení byla správná a kopírovala vzorové řešení. Všichni se tak dopustili drobné nekorektnosti, když prohlašovali za zřejmé, že při nějakém „otočení" bude počet vybraných větších dílků k (viz poslední věta druhého odstavce vzorového řešení). Ve skutečně podrobném řešení by se mělo dané tvrzení dokázat (což si můžete zkusit jako cvičení), ale nám úplně stačí považovat jej za zřejmé.

(Martin „E.T." Sýkora)

Úloha 6.

(22; 17; 3,82; 5,0)

Podmnožinu množiny $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ nazveme průměrnou, pokud je neprázdná a průměr jejích prvků je celočíselný. Dokažte, že počet průměrných podmnožin množiny M má stejnou paritu[4] jako n.

(Tomáš „Šavlík" Pavlík)

Řešení:

Všechny průměrné množiny rozdělíme na tři skupiny: A, B a C. Ve skupině A budou jednoprvkové množiny. Ve skupině B budou víceprvkové množiny obsahující svůj průměr. Ve skupině C budou zbylé průměrné množiny, tedy víceprvkové takové, které neobsahují svůj průměr. Každá jednoprvková množina je průměrná, tedy $|A| = n$. Teď už stačí dokázat, že $|B| = |C|$. Všechny množiny z B spárujeme s množinami z C tak, že množině přidáme, respektive odebereme její průměr. Už zbývá jen ověřit, že žádná množina nebude spárovaná s jednoprvkovou množinou. To by se mohlo stát, pouze pokud by dvouprvková množina obsahovala svůj průměr, což není možné.

[4] Dvě čísla mají stejnou paritu, pokud jsou obě sudá nebo obě lichá.

Poznámky:

Mnoho správných řešení k důkazu přistupovalo trochu jinak. Řešitelé párování vytvářeli v symetrii s průměrem samotné množiny M, což nebylo tak elegantní. Museli totiž ošetřit takto symetrické množiny, a to vedlo na rozebrání dvou možností podle parity n. Ti, kteří přišli na autorské řešení, si vysloužili imaginární bod. *(Tomáš „Šavlík“ Pavlík)*

Úloha 7.

(28; 15; 2,82; 3,5)

Aritmetickým poloměrem dvou čísel a, b rozumíme číslo $\frac{a+b}{4}$. Po poli skáče n jedniček. Když se dvě čísla potkají, zmizí a místo nich se na poli objeví jejich aritmetický poloměr. Takto čísla na poli postupně ubývají, až zbyde jen jedno. Dokažte, že toto číslo nebude menší než $\frac{1}{n}$.

(Tomáš „Šavlík“ Pavlík)

Řešení:

Tvrzení dokážeme indukcí. Pro $n = 1$ je splněno triviálně. Předpokládejme tedy, že podmínka ze zadání je splněna pro každý počet jedniček rovný $k < n$, a dokažme tvrzení pro n jedniček. Čísla na poli se potkávají až do té doby, než tam zbudou poslední dvě. Jedno přitom vzniklo z k jedniček a druhé z $n-k$ jedniček, kde $1 \leq k < n$. Podle indukčního předpokladu jsou tato čísla alespoň $\frac{1}{k}$, resp. $\frac{1}{n-k}$. Jejich aritmetický poloměr si označme d. Poté platí:

$$d \geq \frac{\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}}{4} = \frac{n}{4k(n-k)} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n},$$

neboť $(n-2k)^2 \geq 0$ a roznásobením dostaneme $n^2 \geq 4k(n-k)$. Pro n jedniček nám tedy na konci zbude číslo, které je alespoň $\frac{1}{n}$, což jsme měli dokázat.

Poznámky:

Kromě několika řešení na pár řádků se objevila spousta obchodníků, kteří provolávali mocná slova, že pokud se budou celou dobu budou potkávat dvě stejná čísla, bude výsledek vždy nejmenší, a proto je pro nás nejvýhodnější, když tak budeme činiti, ale na konci nám vyjde číslo větší než $\frac{1}{n}$, a proto je úloha dokázána. Nemusím dodávat, že tato slova, která jsou většinou pravdivá, je nutno podepřít argumenty, a to zde nemohlo být nic jiného než nerovnosti. Proto tito obchodníci svou úlohu neprodali za více než jeden štědrý bod. *(Lukáš Zavřel)*

Úloha 8.

(12; 7; 2,92; 5,0)

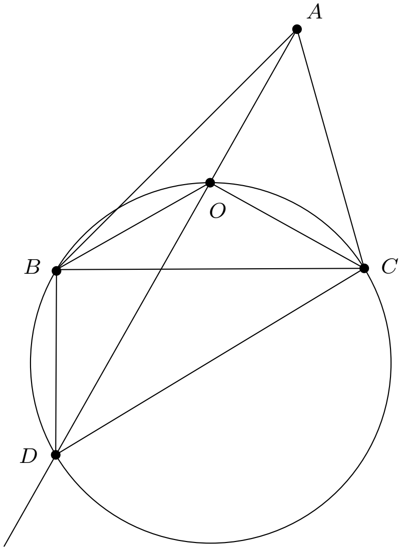
Buď ABC ostroúhlý trojúhelník se středem kružnice opsané O. Přímky AO, BO, CO protnou kružnice opsané trojúhelníkům OBC, OCA, OAB postupně v bodech D, E, F různých od O. Dokažte, že

$$|OD| \cdot |OE| \cdot |OF| \geq d^3,$$

kde d značí průměr kružnice opsané trojúhelníku ABC. *(Filip Hlásek)*

Řešení (podle Anh Dung „Tondy“ Le):

Jelikož je ABC ostroúhlý, leží bod O v něm. Při standardním značení úhlů plyne z věty o obvodovém a středovém úhlu $|\sphericalangle BOC| = 2\alpha$, $|\sphericalangle AOC| = 2\beta$ a $|\sphericalangle AOB| = 2\gamma$. V tětivovém čtyřúhelníku $BOCD$ platí $|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle DOB| = 180^\circ - 2\gamma$. Analogicky $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle COD| = 180^\circ - 2\beta$. Dále z tětivovosti plyne $|\sphericalangle BDC| = 180^\circ - 2\alpha$.



Vyjádřeme nyní délky úseček vystupujících v zadání. Z Ptolemaiovy věty pro tětivový čtyřúhelník $BOCD$ plyne

$$|BC| \cdot |OD| = |BO| \cdot |CD| + |CO| \cdot |BD|, \quad \text{tedy} \quad |OD| = \frac{d(|BD| + |CD|)}{2|BC|}.$$

Použitím sinové věty v trojúhelníku BCD dostáváme

$$\frac{|BD|}{\sin(180^\circ - 2\gamma)} = \frac{|CD|}{\sin(180^\circ - 2\beta)} = \frac{|BC|}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}.$$

Pomocí těchto vztahů a identity $\sin(180^\circ - \varphi) = \sin\varphi$ dostáváme

$$|OD| = \frac{d}{2} \cdot \frac{\sin(2\gamma) + \sin(2\beta)}{\sin(2\alpha)}$$

a analogicky pro zbylé dvě délky platí:

$$|OE| = \frac{d}{2} \cdot \frac{\sin(2\gamma) + \sin(2\alpha)}{\sin(2\beta)}$$

a

$$|OF| = \frac{d}{2} \cdot \frac{\sin(2\beta) + \sin(2\alpha)}{\sin(2\gamma)}.$$

Dosazením odvozených vztahů do zadání dostáváme ekvivalentní nerovnost

$$\big(\sin(2\alpha) + \sin(2\beta)\big)\big(\sin(2\alpha) + \sin(2\gamma)\big)\big(\sin(2\gamma) + \sin(2\beta)\big) \geq 8\sin(2\alpha)\sin(2\beta)\sin(2\gamma).$$

Tato nerovnost je však jen cyklickým součinem tří AG nerovností tvaru

$$\sin(2\alpha) + \sin(2\beta) \geq 2\sqrt{\sin(2\alpha)\sin(2\beta)},$$

přičemž nezápornost členů plyne z ostroúhlosti trojúhelníka.

Poznámky:
Došlá řešení se dala rozdělit na dvě podobně velké skupiny – na zcela správná a zcela špatná. K mojí radosti bylo ale přece jenom těch správných více. Jediným častým nedostatkem těch správných bylo opomenutí zdůraznění toho, že některé použité úvahy fungují jen pro ostroúhlý trojúhelník. Body jsem za to nakonec nestrhával. Téměř všichni úspěšní řešitelé této úlohy použili stejně jako vzorové řešení AG nerovnost, což je nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým *průměrem*, takže úloha byla skutečně zařazena do správné série :-). *(David Hruška)*

Teorie čísel

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(46; 41; 3,89; 4,5)

Najděte všechny dvojice (m, n) přirozených čísel, které splňují rovnosti

$$m^{m+n} = n^{12},$$
$$n^{m+n} = m^3.$$

(Štěpán Šimsa)

ŘEŠENÍ:
První rovnici umocníme na $(m + n)$, druhou na dvanáctou. Dostaneme

$$m^{(m+n)^2} = n^{12(m+n)} = m^{36}.$$

Aby platila tato rovnost, musí nastat jedna ze dvou možností:

(i) Platí $m = 1$, pak z první rovnice ze zadání okamžitě plyne i $n = 1$, což je řešením soustavy.

(ii) Platí $(m + n)^2 = 36$. Tedy

$$|m + n| = m + n = 6. \qquad (\clubsuit)$$

Dosazením do první rovnice ze zadání dostaneme $m^6 = n^{12}$ neboli $m = n^2$. Tento vztah dosadíme do ($\clubsuit$). Kvadratická rovnice $n^2 + n = 6$ má kořeny $n = -3$ a $n = 2$, přitom první nevyhovuje, protože po n požadujeme, aby bylo přirozené. Dopočteme $m = 2^2 = 4$, což je opět řešením soustavy.

Zadání vyhovují dvojice $(1, 1)$ a $(4, 2)$.

POZNÁMKY:
Úloha byla jednoduchá a vzdala se takřka jakémukoli pokusu o vyřešení. Původně byla myšlena jako úloha na p-valuace a z toho, že valná část řešitelů p-valuace skutečně použila, usuzuji alespoň tu pozitivní informaci, že se do seriálu díváte. Po provedení p-valuace se rovnice totiž zjednoduší na

$$(m + n) \cdot v_p(m) = 12 \cdot v_p(n), \quad (m + n) \cdot v_p(n) = 3 \cdot v_p(m).$$

Manipulace s takovými rovnicemi je pak analogická postupu ve vzorovém řešení, ale pro řešitele patrně o něco přehlednější. Jiní řešitelé soustavu zlogaritmovali, čímž dostali stejnou soustavu jako v případě p-valuací, jenom místo symbolu v_p psali log. A jako třetí možnost se taky dalo usoudit, že čísla m, n nejsou příliš velká (případ $m + n \geq 12$ vede ke sporu), čímž zbývá už jen konečné množství možností, které se více či méně inteligentně prozkoušejí. *(Mirek Olšák)*

Úloha 2.

(22; 20; 3,41; 4,0)

Čísla $a, b, c, d \in \{1, 2, \dots, 40\}$ splňují kongruenci

$$41a - 40 \cdot 6^a + 41b - 40 \cdot 6^b \equiv 41c - 40 \cdot 6^c + 41d - 40 \cdot 6^d \pmod{1640}.$$

Dokažte, že čísla a, b se v nějakém pořadí rovnají číslům c, d. *(Štěpán Šimsa)*

Řešení:

Díky tomu, že $1640 = 40 \cdot 41$ a $(40, 41) = 1$, je kongruence ze zadání splněna právě tehdy, je-li splněna tatáž kongruence modulo 40 a 41. Jejich úpravou („vyškrtnutím" členů dělitelných modulem) dostáváme následující dvě kongruence:

$$a + b \equiv c + d \pmod{40}, \tag{$\heartsuit$}$$
$$6^a + 6^b \equiv 6^c + 6^d \pmod{41}. \tag{$\spadesuit$}$$

Všimněme si, že dvě čísla $x, y \in \{1, 2, \dots, 40\}$ se rovnají právě tehdy, když $x \equiv y \pmod{40}$; to je dále ekvivalentní s kongruencí $6^x \equiv 6^y \pmod{41}$, je-li 6 primitivní prvek modulo 41 (je totiž $\varphi(41) = 40$), což budeme dále předpokládat. Chceme-li tedy ukázat, že $a \in \{c, d\}$, stačí nám ukázat, že $(6^a - 6^c)(6^a - 6^d) \equiv 0 \pmod{41}$ – zde využíváme, že 41 je prvočíslo. Upravujme:

$$(6^a - 6^c)(6^a - 6^d) \equiv 6^{2a} - 6^a(6^c + 6^d) + 6^{c+d} \equiv 6^{2a} - 6^a(6^a + 6^b) + 6^{a+b} \equiv 0 \pmod{41},$$

kde jsme v druhém kroku využili ($\heartsuit$) i ($\spadesuit$). Vidíme tedy, že a se rovná jednomu z čísel c, d; dosazením do ($\heartsuit$) pak dostáváme, že b se rovná druhému z těchto dvou čísel.

Zbývá ukázat, že 6 je skutečně primitivní prvek modulo 41, neboli že jeho řád (označme ho r) je roven 40. Určitě platí $r \mid 40$, stačí tedy vyloučit případy $r \mid 20$ a $r \mid 8$ (každý vlastní dělitel 40 je už dělitelem jednoho z těchto dvou čísel). Platí

$$6^4 = 36^2 \equiv (-5)^2 = 25 \pmod{41},$$

odkud dále máme

$$6^8 \equiv 25^2 \equiv (-16)^2 = 256 \equiv 10,$$
$$6^{20} \equiv (-16)^5 \equiv 10^2 \cdot (-16) \equiv -18 \cdot 16 \equiv -1 \pmod{41}.$$

Řád 6 je tedy vskutku 40, což jsme potřebovali.

Poznámky:

Téměř všichni řešitelé odhalili výhodnou úpravu na dvě kongruence, která úlohu značně zpřehlednila. Zhruba polovina se pak pomocí více či méně efektivních úprav dopočetla ke kýženému výsledku. Za nezdůvodnění konstatování, že 6 je primitivní prvek modulo 41, jsem se nakonec rozhodl body nestrhávat, jelikož mi to přišlo jako čistě manuální a nepříliš náročný výpočet (i bez použití výše uvedeného „triku"). Kladný imaginární bod získal *František Couf*, který v úloze vypozoroval Viètovy vztahy a vyhnul se tak jakýmkoliv úpravám.

(Alexander „Olin" Slávik)

Úloha 3.

(24; 22; 4,46; 5,0)

Dá se ukázat, že číslo $p = 2^{127} - 1$ je prvočíslo.[5] *S využitím tohoto faktu dokažte, že 2014 je kvadratický zbytek modulo p.* *(Štěpán Šimsa)*

Řešení:

Využijeme vlastností Legendreových symbolů a kvadratické reciprocity. Naším cílem je dokázat

$$\left(\frac{2014}{2^{127}-1}\right) = 1.$$

Díky multiplikativitě máme

$$\left(\frac{2014}{p}\right) = \left(\frac{2 \cdot 19 \cdot 53}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{19}{p}\right)\left(\frac{53}{p}\right).$$

Platí $\frac{p^2-1}{8} = 2^{251} - 2^{125}$, což je sudé, takže s využitím dodatku ke kvadratické reciprocitě dostáváme

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = 1.$$

Jelikož p je tvaru $4k+3$, 19 je tvaru $4k+3$ a 53 je tvaru $4k+1$, tak podle věty o kvadratické reciprocitě

$$\left(\frac{19}{p}\right) = -\left(\frac{p}{19}\right) \qquad \text{a} \qquad \left(\frac{53}{p}\right) = \left(\frac{p}{53}\right).$$

Podle MFV platí $2^{18} \equiv 1 \pmod{19}$, takže $2^{127} - 1 \equiv (2^{18})^7 \cdot 2 - 1 \equiv 1 \pmod{19}$. Odtud plyne

$$\left(\frac{p}{19}\right) = \left(\frac{1}{19}\right) = 1,$$

protože 1 je vždy kvadratický zbytek (speciálně modulo 19).

Opět podle MFV $2^{52} \equiv 1 \pmod{53}$. Takže $2^{127} - 1 \equiv 2^{23} \cdot (2^{52})^2 - 1 \equiv 2^{23} - 1 \pmod{53}$. Nyní stačí nějak postupně zjistit tuto hodnotu:

$$\begin{aligned} 2^{23} &\equiv \frac{1}{2} \cdot 2^{24} \equiv \frac{1}{2}(2^8)^3 \equiv \frac{1}{2} \cdot 256^3 \equiv \frac{1}{2}(-9)^3 \equiv \frac{1}{2} \cdot 81 \cdot (-9) \equiv \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot (-9) \equiv \\ &\equiv 14 \cdot (-9) \equiv -126 \equiv 33 \pmod{53}. \end{aligned}$$

Proto

$$\left(\frac{p}{53}\right) = \left(\frac{32}{53}\right) = \left(\frac{2}{53}\right)^5 = (-1)^{5 \cdot \frac{52 \cdot 54}{8}} = (-1)^{5 \cdot 13 \cdot 27} = -1.$$

Zbývá již jen dát vše dohromady a dostáváme, co jsme chtěli:

$$\left(\frac{2014}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{19}{p}\right)\left(\frac{53}{p}\right) = 1 \cdot (-1) \cdot \left(\frac{p}{19}\right) \cdot \left(\frac{p}{53}\right) = (-1) \cdot 1 \cdot (-1) = 1.$$

Poznámky:

Nejdůležitějším krokem bylo uvědomit si, že se dá vhodně využít reciprocita. Potom už jen stačilo využívat vlastností, které se objevily v seriálu. Někteří bez zdůvodnění uvedli, že $2^{127} - 1$ dává zbytek 1 modulo 19, resp. 32 modulo 53. To se neobešlo bez ztráty bodu. Jiní sice výraz značně zjednodušili (například pomocí MFV na $2^{23} - 1$), ale stejně se neobešli bez složitých výpočtů. Přitom nějakým částečným modulením se dá práce výrazně ulehčit. (Ne nutně tak, jak je to ve vzoráku – pomohlo by například i $(2^6)^3 \cdot 2^5$ nebo alespoň $(2^{11} \bmod 53) \cdot (2^{12} \bmod 53)$.)

(Štěpán Šimsa)

---

[5] Milou zajímavostí je, že nejen $2^{127} - 1$ je Mersennovo prvočíslo, ale dokonce $127 = 2^7 - 1$ je také Mersennovo prvočíslo.

Seriál – Teorie čísel III

A je tu třetí, závěrečný, opět o něco kratší díl seriálu! K jeho přečtení nebudeš příliš potřebovat látku předchozích dílů, spíš bude nutné nebát se a pořádně se zamýšlet. Odměnou Ti bude kus krásné matematiky, který sice tolik nevyužiješ v olympiádě, ale pro který stojí za to žít.

Na co se tedy můžeš těšit? Nejprve se naučíš zkrotit hrůzostrašně vyhlížející sumy. Poté se seznámíš s všelijakými aritmetickými funkcemi, naučíš se je chytře násobit a vše využiješ k jednoduchým a extrémně elegantním důkazům překvapivých identit.

Práce se sumami

V tomto díle budeme často používat složitější úpravy výrazů se sumami. Jedná se sice o techničtější část matematiky, ale zjistíš, že se v ní ukrývají i pěkné triky. Práci se sumami navíc mnohokrát zúročíš i v dalších oborech. Nejprve si zopakujeme sumární zápis a poté si ukážeme základní úpravy, které nám později ulehčí život.

Symbol $\sum$ značí součet několika členů, a to v různých kontextech, jak se nejlépe ukáže na příkladech. Mějme nějakou funkci f.

(i) Definujeme $\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$. Suma tedy vyjadřuje následující: Nejprve za k dosaďme 1, potom 2, 3, … a nakonec n. Všechny tyto členy sečtěme. Například

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n, \quad \sum_{m=2}^{4} (m^2+1) = 32 = 1 + \sum_{n=0}^{4} 2^n.$$

(ii) Výraz $\sum\limits_{d\mid n} f(d)$ vyjadřuje součet $f(d)$ přes všechny kladné dělitele d čísla n. Tedy

$$\sum_{d\mid 18} d^2 - 1 = (1^2-1) + (2^2-1) + (3^2-1) + (6^2-1) + (9^2-1) + (18^2-1).$$

(iii) Obecně $\sum\limits_{i\in I} f(i)$ znamená součet přes všechny prvky množiny I. Třeba

$$\sum_{i\in\{1,3,-6,8\}} f(i) = f(1) + f(3) + f(-6) + f(8).$$

(iv) Také se nám může stát, že potřebujeme sčítat přes dvě proměnné. Například

$$\sum_{2\le a,b\le 3} f(a)\cdot f(b) = f(2)^2 + f(2)f(3) + f(3)f(2) + f(3)^2,$$

$$\sum_{\substack{2\le i\le 4\\ d\mid i}} \frac{f(i)}{f(d)} = \frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(2)}{f(2)} + \frac{f(3)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(3)} + \frac{f(4)}{f(1)} + \frac{f(4)}{f(2)} + \frac{f(4)}{f(4)}.$$

Proměnnou k (resp. d, m, n, i, a, b), přes kterou jsme v sumě sčítali, nazýváme index a automaticky ji považujeme za celé číslo. Ukažme ještě jeden konkrétní příklad s vnořenými sumami:

$$\sum_{d|4} \sum_{a=1}^{d} 2a = (2) + (2+4) + (2+4+6+8) = 28.$$

Vytknutí čísla před sumu

První často používanou úpravou je vytknutí čísla před sumu. Když máme uvnitř sumy součin a jeden z činitelů je nezávislý na sčítacím indexu, můžeme tento činitel vytknout před sumu. Jedná se o běžné vytknutí, jak ho známe, jen u sum může působit nezvykle. Například

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} n\cdot(n+i-1) &= n\cdot n + n\cdot(n+1) + \cdots + n\cdot(2n-1)\\ &= n\cdot(n + (n+1) + \cdots + (2n-1))\\ &= n\cdot\sum_{i=1}^{n}(n+i-1).\end{aligned}$$

Prohazování sum

Často se nám stane, že máme dvě sumy vedle sebe. Pak je můžeme prohodit. Například

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(i)\cdot g(j) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(i)\cdot g(j).$$

Uvědomme si, že se opravdu nic nezměnilo. Když si totiž představíme čísla $f(i)\cdot g(j)$ v tabulce s m řádky a n sloupci, tak levá strana vyjadřuje, že jsme udělali součty v každém ze sloupců a výsledky jsme pak sečetli. Naproti tomu na pravé straně jsme sečetli součty řádků. Zřejmě jsme tedy dostali v obou případech stejné číslo – součet všech čísel v tabulce. Na ten se taky můžeme dívat jako na sumu

$$\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} f(i)\cdot g(j).$$

Prohazování sum se dá vhodně kombinovat s vytýkáním:

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(f(i)\sum_{j=1}^{m} g(j)\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(i)\cdot g(j) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(i)\cdot g(j) = \sum_{j=1}^{m}\Big(g(j)\sum_{i=1}^{n} f(i)\Big).$$

To se může hodit například, pokud neumíme vyjádřit součet $\sum_{i=1}^{m} g(i)$, ale součet $\sum_{i=1}^{n} f(i)$ ano. První, resp. poslední výraz v předchozí rovnosti se dá taky upravit dalším vytknutím na součin dvou sum, tedy na

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} f(i)\Big)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{m} g(j)\Big).$$

Prohození sum je ještě o trochu komplikovanější, když prvky, přes které sčítáme ve vnitřní sumě, jsou závislé na indexu vnější sumy. Například $\sum_{d|n}\sum_{e|d} f(e)$. Chtěli bychom na první místo dostat sumu přes e. K tomu si stačí uvědomit, že e je dělitel čísla n. Tedy vnější suma bude $\sum_{e|n}$. A jaké nyní klást podmínky na d? Musí platit, že d je násobek e a přitom $d \mid n$. Vnitřní suma proto bude $\sum\limits_{\substack{d=e\cdot x\\ d|n}}$. Výraz tak upravíme do podoby

$$\sum_{d|n}\sum_{e|d} f(e) = \sum_{e|n}\sum_{\substack{d=e\cdot x\\ d|n}} f(e) = \sum_{e|n}\Big(f(e)\sum_{\substack{d=e\cdot x\\ d|n}} 1\Big).$$

Rozmysli si, že jsme opravdu žádný člen nevypustili a žádný nezapočítali vícekrát.

Cvičení. Opravdu si to rozmysli.

Nyní uvidíme, proč se prohození sum vyplatilo. Vnitřní sumu totiž umíme dál pěkně upravit. Sčítáme několikrát jedničku, stačí jen zjistit kolikrát. Jinak řečeno, vnitřní suma se rovná počtu takových čísel d, že $d = ex$ a zároveň $d \mid n$. Tedy $ex \mid n$, a jelikož $e \mid n$, tak $x \mid \frac{n}{e}$. Počet vyhovujících čísel d je proto stejný jako počet x takových, že $x \mid \frac{n}{e}$. Odpovědí je tedy počet dělitelů čísla $\frac{n}{e}$. Pokud označíme $\tau(n)$ počet dělitelů čísla n, tak jsme původní výraz upravili na

$$\sum_{d|n}\sum_{e|d} f(e) = \sum_{e|n} f(e)\cdot\tau\Big(\frac{n}{e}\Big). \qquad (\heartsuit)$$

Aritmetické funkce

V této kapitole se dostáváme k hlavnímu programu našeho seriálu – aritmetickým funkcím. Budeme je zkoumat, sčítat, násobit (a možná jinak, než bys čekal(a)), a díky tomu si odvodíme mnoho zajímavých výsledků teorie čísel. Co to tedy je?

Definice. *Aritmetická funkce* je funkce z přirozených čísel do reálných čísel.[6]

Příkladem aritmetických funkcí jsou funkce $f(n) = n^3$, $f(n) = \log(n)$ nebo Eulerova funkce $\varphi(n)$.

Zajímavé aritmetické funkce dostaneme, když vezmeme všelijaké vlastnosti čísla n týkající se dělitelnosti.

Definice. Aritmetickou funkcí $\tau(n)$ myslíme počet všech kladných dělitelů čísla n.[7] Součet všech kladných dělitelů čísla n označujeme jako $\sigma(n)$.

S těmito aritmetickými funkcemi jsme se vlastně již setkali – zmiňovali jsme totiž dokonalá čísla, což jsou přesně ta čísla n, pro která platí $\sigma(n) = 2n$.

Počet dělitelů $\tau(n)$ můžeme snadno vyjádřit, pokud známe rozklad čísla n na prvočísla.

Tvrzení. *Nechť $n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$ je rozklad čísla n na prvočísla. Pak platí*

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)\cdots(\alpha_r + 1).$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že každý dělitel obsahuje ve svém rozkladu pouze prvočísla $p_1, \ldots, p_r$, přičemž prvočíslo p_i v mocnině 0 až α_i. To je tedy $(\alpha_i + 1)$ možností pro prvočíslo p_i. Jelikož můžeme exponenty u různých prvočísel volit nezávisle na sobě, zjistíme počet všech dělitelů jako součin těchto výrazů.

[6] Nebo dokonce komplexních. Aritmetické funkce jsou vlastně jen jiný pohled na posloupnosti.

[7] Mluvíme o ní krátce jako o *počtu dělitelů*.

Podobný vzorec závislý na rozkladu na prvočísla existuje i pro součet dělitelů. K němu přirozeně dospějeme v kapitole o multiplikativních funkcích, zatím si jen uvědomíme, že platí následující.

Tvrzení. *Pro součet dělitelů mocniny prvočísla platí* $\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}$.

Důkaz. Jedná se pouze o známý[8] vztah pro součet geometrické řady $1+p+\cdots+p^k$. Se znalostí tohoto vzorečku už snadno požadovaný výsledek dokážeš.

Seznámíme se nyní s další aritmetickou funkcí – Möbiovou funkcí μ, která hraje v následující teorii klíčovou roli.

Definice. *Möbiova*[9] *funkce* μ je

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1, \\ 0, & \text{je-li } n \text{ čtvercové, tedy existuje-li } a > 1 \text{ takové, že } a^2 \mid n, \\ (-1)^r, & \text{je-li } n = p_1 p_2 \cdots p_r, \text{ kde } p_i \text{ jsou navzájem různá prvočísla.} \end{cases}$$

Například $\mu(4) = 0$, $\mu(5) = -1$, $\mu(6) = 1$. Jednu z pěkných vlastností Möbiovy funkce ukazuje následující důležité tvrzení.

Tvrzení. *Platí:*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & \textit{pro } n = 1, \\ 0 & \textit{pro } n > 1. \end{cases} \qquad (\clubsuit)$$

Důkaz. Všimněme si, že pokud jsou a, b nesoudělná, platí $\mu(a)\mu(b) = \mu(ab)$. Pro $n = 1$ je triviálně součet roven jedné. Máme-li $n > 1$, můžeme ho rozložit na prvočísla, $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$. Jediní dělitelé čísla n, kteří do sumy přispějí, jsou ti bezčtvercoví. Proto můžeme psát (vyzkoušej si, že po roznásobení prostředního výrazu opravdu dostaneme každé nenulové číslo ze součtu nalevo právě jednou)

$$\sum_{d|n} \mu(d) = (1 + \mu(p_1))(1 + \mu(p_2)) \ldots (1 + \mu(p_r)) = 0 \cdot 0 \cdots 0 = 0,$$

což jsme chtěli dokázat.

Dirichletova konvoluce

Nyní již umíme sčítat sumy a můžeme se vrhnout na tento příklad (dobře si ho promysli).

Příklad. Ukaž, že pro $n \geq 1$ platí

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d}.$$

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že výraz $\lfloor 1/(a, b) \rfloor$ je roven jedné, právě když jsou čísla a, b nesoudělná, jinak je to nula. Proto se $\varphi(n)$ dá vyjádřit jako tato suma:

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{1}{(n, k)} \right\rfloor.$$

[8] A snadno vygooglitelný.

[9] August Ferdinand Möbius (1790–1868) byl německý matematik a teoretický astronom. Kromě toho, že se věnoval teorii čísel, byl také jedním ze zakladatelů topologie. Pravděpodobně jsi už slyšel(a) o Möbiově pásce.

Následně využijeme vztahu (♣) pro každý ze sčítanců sumy a dostaneme

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{1}{(n,k)} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{n} \sum_{d\mid(n,k)} \mu(d) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{d\mid n\\ d\mid k}} \mu(d).$$

Nyní přichází čas na prohození sum, které je opět poměrně náročné, pročež si jej dobře rozmysli.

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{d\mid n\\ d\mid k}} \mu(d) = \sum_{d\mid n} \sum_{\substack{k=dx\\ k\le n}} \mu(d) = \sum_{d\mid n} \Bigl(\mu(d) \sum_{\substack{k=dx\\ k\le n}} 1\Bigr).$$

Zbývá si uvědomit, že poslední vnitřní suma vyjadřuje jen počet násobků čísla d menších nebo rovných n. A jelikož $d \mid n$, je jich přesně $\frac{n}{d}$. Tím jsme dostali požadovaný vztah, který si připomeneme pro případ, že už jsi zapomněl(a), co vlastně dokazujeme:

$$\varphi(n) = \sum_{d\mid n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d}.$$

Poznámka. Součet v minulém příkladu je speciálním případem výrazu

$$\sum_{d\mid n} f(d) \cdot g\Bigl(\frac{n}{d}\Bigr),$$

kde f a g jsou aritmetické funkce. Takovéto součty se v teorii čísel často objevují a my se nyní budeme zabývat jejich obecnými vlastnostmi.

Předtím si zavedeme ještě dvě jednoduché, ale užitečné aritmetické funkce:

Definice. *Jednotka* je aritmetická funkce u, která všem číslům přiřadí jedničku (tedy $u(n) = 1$ pro každé n.)[10]

Definice. Aritmetická funkce N je definovaná vztahem $N(n) = n$ pro každé n.[11]

Definice. *Dirichletova konvoluce*[12] aritmetických funkcí f a g je aritmetická funkce

$$h(n) = \sum_{d\mid n} f(d) \cdot g\Bigl(\frac{n}{d}\Bigr).$$

Konvoluci funkcí f a g značíme $f * g$.

Konvoluce je tedy operace, která vezme dvě aritmetické funkce a vyrobí z nich třetí. Na příkladu jsme viděli, že když zvolíme za f Möbiovu funkci μ a za g funkci N, dostaneme φ, jinými slovy $\varphi = \mu * N$.

Jiným zajímavým příkladem jsme zakončili první díl seriálu, když jsme si ukázali, že platí

$$n = \sum_{d\mid n} \varphi(d).$$

Tento vztah neříká nic jiného, než že $N = \varphi * u$. V takovémto případě, kdy je jedna z funkcí v konvoluci u, zavádíme nový pojem.

[10] Značení vychází z anglického slova *unit*.

[11] Značení vychází z českého slova *nuda*.

[12] Můžeš se také setkat s pojmem Dirichletův součin. My budeme v seriálu říkat jednoduše konvoluce.

Definice. Nechť f je aritmetická funkce. Pak aritmetickou funkci $g = f * u$, tedy $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$, nazveme *sumární funkcí* funkce f.

Cvičení. Najdi sumární funkci k N.

Tvrzení. (Obecné vlastnosti konvoluce) *Nechť f, g, h jsou libovolné aritmetické funkce. Pak platí:*

(i) $f * g = g * f$, *(komutativita)*
(ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$. *(asociativita)*

Říkáme, že je konvoluce komutativní a asociativní, což jinými slovy znamená, že nezáleží na tom, v jakém pořadí konvoluci provádíme, ani jak uzávorkujeme výrazy typu $f * g * h * i * j * k$.

Důkaz.

(i) K důkazu komutativity je třeba si uvědomit, že

$$\sum_{d|n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{a\cdot b=n} f(a)\, g(b) = \sum_{b\cdot a=n} f(b)\, g(a) = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) g(d),$$

kde prostřední sumy probíhají přes všechny dvojice čísel (a, b), pro které platí $ab = n$.

(ii) Označme $A = g * h$ a upravme $f * A = f * (g * h)$. Máme

$$\begin{aligned}(f * A)(n) &= \sum_{a\cdot d=n} f(a)\, A(d) = \sum_{a\cdot d=n} f(a) \sum_{b\cdot c=d} g(b)\, h(c)\\ &= \sum_{a\cdot b\cdot c=n} f(a)\, g(b)\, h(c).\end{aligned}$$

Je vidět, že pokud analogicky upravujeme výraz $((f*g)*h)(n)$, dospějeme ke stejnému výsledku.

Ještě se seznámíme s funkcí, která „nechává jiné funkce na pokoji“.[13]

Definice. *Identita* je aritmetická funkce I definovaná jako

$$I(n) = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1,\\ 0 & \text{pro } n > 1.\end{cases}$$

Tvrzení. *Nechť f je aritmetická funkce. Pak platí $f * I = I * f = f$.*

Důkaz. Viz cvičení.

Cvičení. Tvrzení si dokaž.

Cvičení. Najdi sumární funkci k I.

Poznámka. V sekci o Möbiově funkci μ jsme si dokázali, že

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor = I.$$

Pokud tento vztah přeložíme do řeči konvoluce, dostaneme, že $I = \mu * u$. Tento vztah částečně vysvětluje, proč je zrovna Möbiova funkce tak zajímavá. Je to totiž přesně ta funkce, jejíž sumární funkcí je I.

[13] Dokonce nechává na pokoji i sama sebe.

Nyní si můžeme ukázat, jaká síla se ukrývá v základních vlastnostech konvoluce.

Příklad. Dokážeme si novým a jednodušším způsobem, že

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d},$$

neboli $\varphi = \mu * N$.

Důkaz. Z prvního dílu víme, že $N = \varphi * u$. To znamená, že také $N * \mu = (\varphi * u) * \mu$. Pravá strana se díky asociativitě(!) rovná $\varphi * (u * \mu)$. Navíc víme, že $u * \mu = I$, takže $N * \mu = \varphi * I = \varphi$. Jak snadné (a bez sum).

Poznámka. Vzpomeňme si nyní, kolik jsme museli udělat úprav, než jsme dostali vztah (♡) v kapitole o sumách:

$$\sum_{d|n} \sum_{e|d} f(e) = \sum_{e|n} f(e)\, \tau\left(\frac{n}{e}\right).$$

Přitom si stačí uvědomit, že výraz na levé straně je sumární funkce ze sumární funkce z f. Tedy $(f * u) * u$. S využitím asociativity víme, že se to rovná $f * (u * u)$, ale $u * u$ není nic jiného než $\sum_{d|n} 1$, tedy počet dělitelů $\tau(n)$ čísla n. Tedy $(f * u) * u = f * \tau$, což je výraz na pravé straně.

Řešení druhé čokoládové úlohy – náročnější pasáž

Jako příklad využití nabytých znalostí si ukážeme, jak se řešila druhá čokoládová úloha k minulé sérii, jejíž řešení nám bohužel nikdo neposlal.

Úloha. V závislosti na prvočísle p urči v $\mathbb{Z}_p$ součet všech primitivních prvků modulo p.

Řešení. Vezměme si nějaký primitivní prvek g modulo p (z minulého dílu víme, že existuje). Hledaný součet pak je

$$\sum_{\substack{1 \le k \le p-1 \\ (k,p-1)=1}} g^k,$$

což vyplývá z tvrzení zmíněného ve druhém díle, že g^k je primitivní prvek, právě když čísla k a $p-1$ jsou nesoudělná. V kapitole o aritmetických funkcích jsme si dokázali tvrzení

$$\sum_{d|n} \mu(d) = I(n).$$

Díky tomu lze naši sumu takto upravit:

$$\sum_{\substack{1 \le k \le p-1 \\ (k,p-1)=1}} g^k = \sum_{k=1}^{p-1} g^k \cdot I((k,p-1)) = \sum_{k=1}^{p-1} g^k \sum_{d|(k,p-1)} \mu(d) = \sum_{k=1}^{p-1} g^k \sum_{\substack{d|k \\ d|p-1}} \mu(d).$$

Podařilo se nám získat vnořené sumy, které můžeme prohodit, tak hurá do toho. Ve vnější sumě budeme tedy sčítat přes $d \mid p-1$ a ve vnitřní přes taková k, která jsou násobkem d a pro která platí $k \le p-1$. Pokud napíšeme $k = dr$, můžeme místo přes k sčítat přes r od 1 do $\frac{p-1}{d}$.

$$\sum_{k=1}^{p-1} g^k \sum_{\substack{d|k \\ d|p-1}} \mu(d) = \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{\substack{d|k \\ d|p-1}} g^k \cdot \mu(d) = \sum_{d|p-1} \sum_{r=1}^{(p-1)/d} g^{rd} \cdot \mu(d) = \sum_{d|p-1} \mu(d) \sum_{r=1}^{(p-1)/d} g^{rd}.$$

Nyní stačí zjistit, čemu se rovná vnitřní suma. Pro $d = p-1$ je kongruentní s 1 modulo p. Pro $d \mid p-1$, $d < p-1$ stačí jen sumu sečíst jako geometrickou řadu, čímž dostaneme

$$\sum_{r=1}^{(p-1)/d} g^{rd} = g^d \frac{(g^d)^{(p-1)/d} - 1}{g^d - 1}.$$

Z Malé Fermatovy věty plyne $p \mid g^{p-1} - 1 = (g^d)^{(p-1)/d} - 1$, ale přitom $p \nmid g^d - 1$ (protože g je primitivní prvek a $d < p-1$). Tyto členy nám tudíž modulo p vypadnou a zůstane jen $\mu(p-1)$, což je řešení úlohy.

Multiplikativita funkcí

Většina aritmetických funkcí, se kterými jsme se dosud v seriálu setkali a se kterými se zde ještě setkáme, má významnou[14] vlastnost, které se říká multiplikativita.

Definice. O aritmetické funkci f řekneme, že je *multiplikativní*, pokud pro každou dvojici a, b přirozených navzájem nesoudělných čísel platí $f(ab) = f(a)f(b)$. Funkce je *úplně multiplikativní*, pokud $f(ab) = f(a)f(b)$ platí pro každou dvojici přirozených čísel.

Proč je multiplikativita aritmetických funkcí z několika důvodů velmi příjemná? Z několika důvodů. Jedním z nich je to, že je funkce jednoznačně určená svými hodnotami v mocninách prvočísel. Pomocí matematické indukce totiž snadno dostaneme intuitivní vzoreček

$$f(p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}) = f(p_1^{\alpha_1}) \cdots f(p_r^{\alpha_r}).$$

Když tedy potřebujeme spočítat hodnotu v čísle n, stačí jej rozložit na prvočísla, zjistit hodnoty v mocninách prvočísel a využít tohoto vzorečku. Obdobně, když chceme ukázat rovnost dvou multiplikativních funkcí, stačí dokázat, že se rovnají ve všech mocninách prvočísel.

Pro úplně multiplikativní funkce je situace podobná. Pro výpočet hodnoty n stačí znát hodnoty v jednotlivých prvočíslech z rozkladu (úplně multiplikativní funkce je totiž multiplikativní a navíc platí $f(p^k) = f(p)^k$). Aby se dvě úplně multiplikativní funkce rovnaly, stačí, aby měly stejné hodnoty v prvočíslech.

Cvičení. Uvědom si, že funkce I, u, N a μ jsou multiplikativní. Které z nich jsou multiplikativní úplně?

U dvou důležitých funkcí už jsme si multiplikativitu nenápadně dokázali – u Eulerovy funkce φ (již v prvním díle) a Legendreova symbolu L_p (ve druhém díle).

Cvičení. Dokaž, že pokud je f multiplikativní funkce, tak $f(1) = 1$.

Asi nikoho nepřekvapí, že jsou-li f a g multiplikativní funkce a h je definovaná jako $h(n) = f(n) \cdot g(n)$, tak je i h multiplikativní. Ale opravdové kouzlo a sílu multiplikativity poodkrývá následující tvrzení.

Tvrzení. (Konvoluce zachovává multiplikativitu) *Pokud jsou f a g multiplikativní, pak je multiplikativní i $f * g$.*

Důkaz. Nechť $h = f * g$ a m, n jsou dvě nesoudělná čísla. Pak

$$h(mn) = \sum_{d \mid mn} f(d)\, g\Big(\frac{mn}{d}\Big).$$

[14] Extrémně významnou.

Každý dělitel d čísla mn se dá napsat ve tvaru $d = ab$, kde $a \mid m$, $b \mid n$. Navíc platí $(a, b) = 1$, $(\frac{m}{a}, \frac{n}{b}) = 1$. Naopak každá taková dvojice a, b odpovídá právě jednomu děliteli d. Proto se rovnají sumy

$$\sum_{d \mid mn} f(d)\, g\Big(\frac{mn}{d}\Big) = \sum_{\substack{a \mid m \\ b \mid n}} f(ab)\, g\Big(\frac{mn}{ab}\Big).$$

Na pravé straně jsme získali dvojitou sumu, ze které vyrobíme součin sum, podobně jako jsme si to ukazovali v úvodní kapitole.

$$\begin{aligned} h(mn) &= \sum_{\substack{a \mid m \\ b \mid n}} f(ab)\, g\Big(\frac{mn}{ab}\Big) \\ &= \sum_{b \mid n} \sum_{a \mid m} \Big(f(a)\, f(b)\, g\Big(\frac{m}{a}\Big)\, g\Big(\frac{n}{b}\Big)\Big) \\ &= \sum_{b \mid n} \Big(f(b)\, g\Big(\frac{n}{b}\Big) \cdot \Big(\sum_{a \mid m} f(a)\, g\Big(\frac{m}{a}\Big)\Big)\Big) \\ &= \Big(\sum_{a \mid m} f(a)\, g\Big(\frac{m}{a}\Big)\Big)\Big(\sum_{b \mid n} f(b)\, g\Big(\frac{n}{b}\Big)\Big) \\ &= h(m)\, h(n). \end{aligned}$$

Získali jsme novou zbraň, jak o funkcích ukazovat, že jsou multiplikativní.

Tvrzení. *Funkce τ (počet dělitelů) a σ (součet dělitelů) jsou multiplikativní.*[15]

Důkaz. Tvrzení se samozřejmě dá dokázat z definice multiplikativity, ale vyžaduje to netriviální množství počítání a úprav. S tím, co jsme si dokázali o konvoluci, se tvrzení vzdá.

Stačí si uvědomit, že $\tau(n) = \sum_{d \mid n} 1$ je sumární funkce jednotky u, tedy $\tau = u * u$. Podobně $\sigma(n) = \sum_{d \mid n} d$ je sumární funkce „nudy“ N, tedy $\sigma = N * u$. Funkce u a N jsou multiplikativní a díky tomu, že konvoluce zachovává multiplikativitu, jsou i funkce τ a σ multiplikativní.

Poznámka. Nyní již snadno dokážeme, že pro $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ platí

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_r^{\alpha_r+1}}{p_r - 1}.$$

Cvičení. Dokaž si, že součet dělitelů závisí na počtu dělitelů takto:

$$\sigma(n) = \sum_{d \mid n} \tau(d)\, \varphi\Big(\frac{n}{d}\Big).$$

Cvičení. Uvědom si, že konvoluce nezachovává úplnou multiplikativitu.

Návod. $\tau = u * u$.

Z toho důvodu je multiplikativita důležitější a zajímavější než úplná multiplikativita.[16] To, že je funkce multiplikativní úplně, už je jen taková třešnička na dortu.[17] Na druhou stranu se tato vlastnost občas chová nadstandardně pěkně. Tak je tomu například u Dirichletových inverzí.

[15] Platí dokonce zobecněná věta: součet k-tých mocnin dělitelů čísla n, neboli $\sigma_k(n) = \sum_{d \mid n} d^k$, je multiplikativní.

[16] Přestože definice úplné multiplikativity se zdá být přirozenější.

[17] Nebo hřebíček do rakve.

Definice. Nechť f je aritmetická funkce taková, že $f(1) \neq 0$. Potom funkci g nazveme *Dirichletovou inverzí* k f, pokud $f * g = g * f = I$. Obvykle ji značíme f^{-1}.

Dá se ukázat, že pro každou funkci existuje právě jedna Dirichletova inverze, my to ale dělat nebudeme. Také se dá odvodit ne úplně pěkný rekurentní vztah pro hodnoty funkce f^{-1} v závislosti na funkci f. My díky Dirichletovým inverzím dostaneme zajímavou charakterizaci úplně multiplikativních funkcí. Drž si klobouk!

Tvrzení. *Nechť f je multiplikativní. Pak f je úplně multiplikativní, právě když*

$$f^{-1}(n) = \mu(n)f(n) \quad \textit{pro každé přirozené } n.$$

Cvičení. (těžké) Zkus si tvrzení dokázat.

Návod. Pro jednu implikaci využij tvrzení $\sum_{d|n} \mu(d) = I(d)$. V druhé implikaci si uvědom, jak vypadá $\mu(p^k)$, a dokaž $f(p^\alpha) = f(p)^\alpha$.

Bonusy na závěr

Jednoduchou aplikací Dirichletovy konvoluce je následující překvapivé tvrzení, které říká, jak obrátit vztah „f je sumární funkce g“.

Tvrzení. (Möbiova inverzní formule) *Rovnosti*

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

a

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)\, \mu\Big(\frac{n}{d}\Big)$$

jsou ekvivalentní.

Důkaz. Víme, že první rovnost znamená $f = g * u$. Vynásobením funkcí μ dostáváme $f * \mu = (g * u) * \mu = g * (u * \mu) = g * I = g$, což je druhá rovnost. Když naopak tuto rovnost vynásobíme funkcí u, dostaneme opět první rovnost.

Vše, čím jsme se dosud v seriálu zabývali, bylo konečné (a tedy do jisté míry omezené). Pojďme se tedy na chvilku odpoutat od nudné reality a vrhněme se do nekonečného vesmíru plného nekonečných řad.

S nějakou nekonečnou řadou ses již pravděpodobně setkal(a). Například s krotkou řadou

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k},$$

která má konečný součet 2. Naproti tomu řada

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

má součet nekonečno.[18]

[18] Vyšetřování, zda má nekonečná řada konečný součet, není snadné a my se jím nebudeme zabývat.

Obrovské využití v teorii čísel ale mají poněkud divočejší řady, kupříkladu řady tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{pro pevné } s > 1.$$

Dá se ukázat, že pro $s > 1$ má tato řada konečný součet, který označujeme $\zeta(s)$.[19] Platí například známý vztah

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pořád je Ti to málo? Nám také. Pojďme si tyto řady ještě zobecnit.

Definice. Nechť a je aritmetická funkce. Pak

$$D(a, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s},$$

nazveme *Dirichletovou řadou* funkce a.

Příkladem jsou tyto řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \zeta(s)^2,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s) \cdot \zeta(s-1).$$

Tvrzení. *Platí*

$$D(a * b, s) = D(a, s) \cdot D(b, s).$$

Náznak důkazu. Představ si, jak se postupně roznásobuje pravá strana. Pokud dáš k sobě členy, které mají ve jmenovateli n^s pro nějaké n, tak zjistíš, že v čitateli bude přesně

$$\sum_{d|n} a(d) \cdot b\left(\frac{n}{d}\right).$$

Tato úvaha opravdu funguje i pro nekonečné řady, jen je potřeba ještě trocha teorie a formalit, což překračuje rámec seriálu.

Cvičení. S pomocí tvrzení si dokaž tři předchozí identity.

Cvičení. (těžké) Nahlédni, že asi platí

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

kde v součinu násobíme přes všechna prvočísla.

Návod. Rozepiš si $\frac{1}{1-1/p^s}$ jako geometrickou řadu

$$1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots .$$

[19] Jedná se o známou Riemannovu zeta funkci, o které hovoří nejslavnější nevyřešený matematický problém – Riemannova hypotéza.

Jak dostaneš na pravé straně $1/n^s$? Zkus si n rozložit na prvočísla.

Cvičení. (těžké) Dokaž, že

$$\frac{6}{\pi^2} < \frac{\varphi(n) \cdot \sigma(n)}{n^2} < 1.$$

Návod. Napiš si vzorečky pro $\varphi(n)$ a $\sigma(n)$, z obou vytkni n a využij předchozí cvičení.

Závěr

Pokud ses dočetl(a) až sem, chtěli bychom Ti pogratulovat a poděkovat za to, že jsi našemu seriálu udržel(a) přízeň. Pokud Tě téma zaujalo, v příštích komentářích najdeš seznam další literatury, mimo jiné zdroje, ze kterých jsme při psaní seriálu čerpali.

Dále bychom rádi poděkovali našemu jazykovému korektorovi Kubovi a TEXaři Olinovi za to, že po nás celý text důkladně pročítali, a za trpělivost, kterou s námi měli. Rovněž děkujeme i ostatním organizátorům, kteří pomohli výsledný text doladit.

4. podzimní série – Minima a maxima

Výsledková listina

1.	*František*	*Couf*	1	GZborovPH	3 3 – 5 5 5 5 –	23	**23,94**
2.–3.	*Václav*	*Rozhoň*	3	GJirsíkaČB	– – 3 5 5 5 5 –	23	**23,63**
2.–3.	*Mikuláš*	*Zindulka*	3	GMikul23PL	3 – 2 5 5 5 5 –	23	**23,63**
4.	*Martin*	*Surma*	3	GJWolkraPV	3 3 3 5 5 5 5 –	23	**23,41**
5.	*Filip*	*Bialas*	1	GOpatovPH	3 3 3 5 – 5 5 –	$21 - i$	**23,30**
6.	*Pavel*	*Turek*	1	GTomkovaOL	3 3 3 5 5 5 2 –	$21 + i$	**23,18**
7.	*Eduard*	*Batmendijn*	3	CGStĽubovňa	– 3 3 5 – 5 5 –	$21 + i$	**22,29**
8.	*Miroslav*	*Psota*	4	GHlinŽilina	3 – – 5 5 5 – 5	23	**22,23**
9.	*Jakub*	*Löwit*	2	GČeskoliPH	3 3 3 5 4 4 5 –	21	**22,20**
10.	*Jan*	*Jurka*	3	GMLerchaBO	3 3 3 5 5 – 5 –	21	**22,11**
11.	*Vojtěch*	*Suchánek*	3	GJarošeBO	3 3 3 5 5 0 5 –	$21 - i$	**21,97**
12.	*Jakub*	*Dargaj*	4	GPošKošice	3 3 2 5 5 5 5 –	23	**21,58**
13.	*Markéta*	*Horová*	2	GMikul23PL	3 – 2 5 4 5 – –	19	**21,52**
14.	*Marko*	*Puza*	4	GPošKošice	– – 3 5 5 5 5 –	23	**21,48**
15.	*Václav*	*Steinhauser*	0	ZŠVranéNVl	3 3 3 3 1 4 4 –	17	**21,40**
16.	*Katarína*	*Krajčiová*	3	GAlejKošic	3 3 – 4 5 5 5 –	22	**21,35**
17.	*Martin*	*Hora*	4	GMikul23PL	3 – 3 5 5 5 5 –	$23 + i$	**21,31**
18.	*Karolína*	*Kuchyňová*	3	GMLerchaBO	3 3 3 5 – 5 5 –	21	**21,21**
19.	*Jakub*	*Svoboda*	4	G KomHavíř	3 3 3 4 5 5 5 –	$22 + i$	**21,18**
20.	*Matěj*	*Konečný*	3	G Jírov ČB	3 3 3 5 – 5 5 –	21	**21,14**
21.	*Martin*	*Raszyk*	4	G Karviná	3 3 3 5 5 5 5 –	$23 + i$	**21,03**
22.	*Jan*	*Soukup*	3	G Klatovy	3 3 – 4 5 5 5 –	$22 + i$	**20,87**
23.	*Minh Tri*	*Pham*	2	NPorg	3 3 3 5 4 – – 0	18	**20,53**
24.	*Dominik*	*Krasula*	1	G Krnov	3 2 2 5 – 3 4 –	17	**20,30**
25.	*Martin*	*Kopřiva*	2	GMikul23PL	3 3 3 3 – 5 3 –	17	**20,03**
26.	*Antonín*	*Češík*	4	SPŠElek PA	3 3 – 5 – 5 5 –	21	**20,01**
27.	*Jan*	*Krejčí*	4	G Bílovec	3 – 3 5 5 4 4 –	21	**19,96**
28.	*Radovan*	*Švarc*	3	G ČTřebová	0 0 3 5 4 5 5 2	$22 - i$	**19,17**
29.	*Daniel*	*Pišťák*	2	GZborovPH	3 3 3 5 – 4 – –	18	**19,12**
30.	*Petr*	*Jakubčík*	0	PORG PH	3 – 3 4 1 – – –	11	**18,23**
31.	*Marian*	*Poljak*	2	GJŠkodyPŘ	3 – 3 2 – 3 3 –	14	**17,77**
32.	*Jan*	*Šorm*	2	GJarošeBO	3 3 3 – 1 – 5 –	15	**17,47**
33.	*Miroslav*	*Krabec*	4	G KomHavíř	3 – 3 – 3 5 5 –	19	**17,26**
34.	*Jaromír*	*Mielec*	1	GVolgogrOS	3 3 3 – – 3 1 –	13	**16,56**
35.	*Vojtěch*	*Lanz*	0	GZborovPH	3 2 1 2 1 – – –	9	**16,42**
36.	*Vojtěch*	*Lukeš*	2	G LPika PL	3 3 – 2 – 4 – –	12	**16,00**
37.	*Markéta*	*Calábková*	3	GJŠkodyPŘ	3 – – 4 – 4 4 –	15	**15,73**
38.–39.	*Lukáš*	*Sadlek*	3	G Čadca	3 1 0 5 1 3 1 1	13	**15,43**
38.–39.	*Jakub*	*Sláma*	3	GOpatovPH	3 3 2 3 – 2 1 –	13	**15,43**

40.	*Kateřina*	*Nová*	1	G Vimperk	3 3 0 – – 2 1 –	9	**14,89**
41.	*Miroslav*	*Stankovič*	4	GPošKošice	3 – – 5 5 0 5 –	$18 + i$	**14,60**
42.	*Martin*	*Špilar*	3	G Vyškov	3 2 2 2 – 3 1 –	12	**14,47**
43.–44.	*Vít*	*Kalisz*	2	FSG Pirna	3 3 – 1 – 2 1 0	10	**14,05**
43.–44.	*Tomáš*	*Kuzma*	2	GAB Senec	3 3 – – 2 1 1 –	10	**14,05**
45.	*Jan*	*Kadlec*	3	G Klatovy	3 – 3 – 1 4 4 –	15	**13,47**
46.–47.	*Daniel*	*Backov*	2	G Ružomb	3 1 – 2 1 2 1 0	9	**13,00**
46.–47.	*Minh Thao*	*Nguyen*	2	GEBenešeKL	3 – – – 2 4 0 –	9	**13,00**
48.	*Anna*	*Steinhauserová*	4	G Dačice	3 3 2 3 3 4 3 –	16	**11,70**
49.	*Marián*	*Poppr*	3	GJNerudyPH	3 – 0 4 2 2 2 –	13	**11,66**
50.–52.	*Michaela*	*Brabcová*	2	G Jírov ČB	3 3 – – 1 0 0 –	7	**10,72**
50.–52.	*Jakub*	*Marták*	2	G GolNitra	3 1 0 0 1 2 0 0	7	**10,72**
50.–52.	*Lucie*	*Roškotová*	2	G Turnov	3 1 1 1 – 1 1 –	7	**10,72**
53.	*Jakub*	*Hledík*	3	GSŘMRSkuteč	3 3 – – – 3 – –	9	**10,50**
54.	*Přemysl*	*Šťastný*	0	G Žamberk	3 0 1 – – – – –	4	**10,11**
55.	*Zuzana*	*Svobodová*	2	G FrýdlNOs	3 1 2 1 0 – – –	7	**9,51**
56.–57.	*Kryštof*	*Kolář*	2	GJarošeBO	3 – 3 – – – – –	6	**9,48**
56.–57.	*Daniela*	*Šindelářová*	2	GaSOŠ Telč	3 1 – – 2 – – –	6	**9,48**
58.	*Marie*	*Vonzino*	1	GTomkovaOL	3 – – – – – 1 –	4	**8,48**
59.	*Anh Dung*	*Le*	4	G Tachov	– 3 – 0 1 5 5 –	14	**8,17**
60.	*Tomáš*	*Fiala*	3	GLedečNSáz	3 3 – – – – – –	6	**7,43**
61.	*Adam*	*Gálik*	4	GOlivuPopr	2 1 1 3 0 0 0 0	7	**7,00**
62.	*Veronika*	*Holubová*	3	PORG PH	3 0 2 – – 0 – –	5	**6,79**
63.	*Jiřina*	*Duspivová*	2	G Kralupy	3 1 – – – – – –	4	**6,76**
64.–65.	*Anežka*	*Michálková*	2	GaSOŠ Telč	3 – – – – 0 0 –	3	**5,27**
64.–65.	*Štefan*	*Račák*	2	GTajBanBys	1 0 0 0 0 2 0 0	3	**5,27**
66.	*Jiří*	*Zeman*	4	GLesníZlín	3 – 3 – – – – –	6	**4,96**
67.	*Kristýna*	*Šudomová*	2	GValašKlob	3 0 0 – – – – –	3	**4,80**
68.	*Zuzana*	*Vlasáková*	4	G Rumburk	3 – 3 – – – – –	6	**4,79**
69.	*Michael*	*Bucha*	3	G Zábřeh	– – – – 1 2 0 0	3	**4,23**
70.	*Tomáš*	*Velich*	2	GJHroncaBA	1 1 – – 0 0 – 0	2	**3,65**
71.	*Kristýna*	*Ilievová*	3	G Milevsko	3 – – – – – – –	3	**2,87**
72.	*Markéta*	*Ospálková*	1	G Uničov	– 1 0 – – 0 0 0	1	**2,67**
73.	*Katarína*	*Behinská*	2	G GolNitra	1 – – – – – – –	1	**1,91**
74.	*Cedrik*	*Horčička*	3	G ČesLípa	– – – – – – 1 –	1	**1,47**
75.–77.	*Tereza*	*Kislingerová*	1	G Klatovy	0 – – – – 0 – –	0	**0,00**
75.–77.	*Lukáš*	*Kubacki*	1	GNadKavaPH	0 – – – – 0 – –	0	**0,00**
75.–77.	*Peter Kulcsár*	*Szabó*	2	GHSelyhoKM	0 – – – – 0 – –	0	**0,00**

1. jarní série – Průměry

Výsledková listina

1.–6.	*Martin*	*Hora*	4	GMikul23PL	– – – 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–6.	*Anh Dung*	*Le*	4	G Tachov	– – – 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–6.	*Martin*	*Raszyk*	4	G Karviná	3 3 3 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–6.	*Václav*	*Rozhoň*	3	GJirsíkaČB	3 – – 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–6.	*Jakub*	*Svoboda*	4	G KomHavíř	3 3 3 5 5 5 5 5	$25 + i$	**25,00**
1.–6.	*Radovan*	*Švarc*	3	G ČTřebová	0 0 3 5 5 5 5 5	$25 + i$	**25,00**
7.	*Filip*	*Bialas*	1	GOpatovPH	3 3 – 5 5 5 5 –	23	**24,27**
8.	*Pavel*	*Turek*	1	GTomkovaOL	3 3 3 5 5 5 5 –	$23 + i$	**24,21**
9.	*František*	*Couf*	1	GZborovPH	3 3 0 5 5 5 5 –	23	**23,94**
10.	*Jakub*	*Löwit*	2	GČeskoliPH	3 – 3 5 5 5 5 –	23	**23,64**
11.	*Zuzana*	*Tréglová*	1	G Žatec	3 3 2 5 5 5 – –	21	**23,42**
12.	*Jan*	*Jurka*	3	GMLerchaBO	3 3 3 5 5 4 – 5	$22 + i$	**23,06**
13.	*Hedvika*	*Ranošová*	0	GBudějovPH	3 3 3 4 5 – – –	$18 + i$	**22,79**
14.	*Jan*	*Šorm*	2	GJarošeBO	3 3 3 5 5 – 5 –	$21 + i$	**22,46**
15.	*Mikuláš*	*Zindulka*	3	GMikul23PL	3 – 3 5 5 – 5 –	$21 + i$	**22,37**
16.	*Václav*	*Steinhauser*	0	ZŠVranéNVl	3 3 3 5 4 – – –	$18 + i$	**22,12**
17.	*Martin*	*Surma*	3	GJWolkraPV	3 3 3 5 5 5 – –	$21 + i$	**21,98**
18.	*Martin*	*Kopřiva*	2	GMikul23PL	3 3 3 5 5 – – –	19	**21,45**
19.	*Katarína*	*Krajčiová*	3	GAlejKošic	3 3 3 5 5 5 – –	$21 + i$	**20,49**
20.	*Antonín*	*Češík*	4	SPŠElek PA	3 3 3 5 5 5 – –	21	**20,01**
21.	*Jaromír*	*Mielec*	1	GVolgogrOS	3 3 3 3 5 – – –	17	**19,86**
22.	*Eduard*	*Batmendijn*	3	CGStĽubovňa	3 – – 5 5 – 5 –	18	**19,69**
23.	*Dominik*	*Krasula*	1	G Krnov	3 3 – 5 3 2 1 –	16	**19,57**
24.	*Karolína*	*Kuchyňová*	3	GMLerchaBO	3 3 3 5 5 – – –	$19 + i$	**19,54**
25.	*Marian*	*Poljak*	2	GJŠkodyPŘ	3 3 3 5 2 – – –	16	**19,37**
26.	*Jan*	*Soukup*	3	G Klatovy	3 3 2 5 5 5 – –	$21 - i$	**18,79**
27.	*Martin*	*Špilar*	3	G Vyškov	3 3 3 3 – – 4 –	$16 + i$	**18,38**
28.–29.	*Andrea*	*Kučerová*	2	G ČKrumlov	3 3 3 5 – – 0 –	$14 + i$	**17,99**
28.–29.	*Vojtěch*	*Lukeš*	2	G LPika PL	3 3 3 5 – – – –	$14 + i$	**17,99**
30.	*Jakub*	*Sláma*	3	GOpatovPH	3 3 3 5 1 – – –	$15 + i$	**17,51**
31.	*Daniel*	*Pišťák*	2	GZborovPH	3 3 3 2 5 – – –	16	**17,30**
32.	*Zuzana*	*Svobodová*	2	G FrýdlNOs	3 3 3 5 – – – –	$14 + i$	**16,93**
33.	*Ondřej*	*Zeman*	3	G Lovosice	3 3 3 5 – – – –	$14 + i$	**16,61**
34.	*Matěj*	*Konečný*	3	G Jírov ČB	3 – 3 5 5 – – –	$16 + i$	**16,51**
35.	*Jan*	*Krejčí*	4	G Bílovec	3 3 3 5 4 – – –	$18 - i$	**16,20**
36.	*Tomáš*	*Kuzma*	2	GAB Senec	3 1 2 3 – – 3 –	12	**16,00**
37.	*Minh Tri*	*Pham*	2	NPorg	3 3 1 5 – – 0 –	12	**15,52**
38.	*Vojtěch*	*Lanz*	0	GZborovPH	3 3 2 – – – – –	8	**15,39**
39.	*Patricie*	*Klosse*	2	G ČKrumlov	3 1 3 3 – – 1 –	$11 + i$	**15,31**

40.–42.	*Tereza*	*Kislingerová*	1	G Klatovy	3 3 3 – – – – –	$9 + i$	**15,17**
40.–42.	*Lukáš*	*Kubacki*	1	GNadKavaPH	3 3 3 – – – – –	$9 + i$	**15,17**
40.–42.	*Jáchym*	*Solecký*	1	PORG PH	3 3 3 – – – – –	$9 + i$	**15,17**
43.	*Jan*	*Václavek*	2	G Ústí n O	3 1 1 5 1 – – –	11	**15,05**
44.	*Markéta*	*Calábková*	3	GJŠkodyPŘ	3 3 3 5 – – – –	14	**14,75**
45.	*Ivona*	*Hrivová*	4	GOkrŽilina	3 3 3 5 2 – – –	$16 + i$	**14,53**
46.	*Jan*	*Erhart*	3	GFXŠaldyLI	3 3 – 4 3 – 1 –	14	**14,47**
47.	*Zuzana*	*Šimečková*	3	GCON ČesBuď	3 3 2 4 1 – – –	13	**14,33**
48.	*Jakub*	*Marták*	2	G GolNitra	3 1 3 2 1 1 1 0	$10 + i$	**14,32**
49.	*Anh*	*Le Hoang*	2	GJarošeBO	3 3 3 0 – – 1 –	10	**14,05**
50.	*Matěj*	*Coufal*	1	G HavlBrod	3 2 1 1 1 1 0 0	8	**13,81**
51.	*Jakub*	*Hledík*	3	GSŘMRSkuteč	3 3 1 5 – – – –	12	**13,58**
52.–53.	*Lukáš*	*Honsa*	2	G Jírov ČB	3 3 3 – – – – –	$9 + i$	**13,29**
52.–53.	*Adam*	*Říha*	2	G ČesLípa	3 3 3 – – – – –	$9 + i$	**13,29**
54.	*Jan*	*Alfery*	2	GNPražačPH	3 3 3 – – – – –	$9 + i$	**13,04**
55.	*Petr*	*Jakubčík*	0	PORG PH	3 2 – – 1 – – –	6	**13,03**
56.–59.	*Michaela*	*Brabcová*	2	G Jírov ČB	3 3 3 – 0 – – 0	9	**13,00**
56.–59.	*Michaela*	*Brezinová*	2	GKomTrebiš	3 3 3 – – – – –	9	**13,00**
56.–59.	*Lukáš*	*Černý*	2	NPorg	3 1 1 3 1 1 – –	9	**13,00**
56.–59.	*Markéta*	*Horová*	2	GMikul23PL	3 3 – 3 – – – –	9	**13,00**
60.–61.	*Kateřina*	*Nová*	1	G Vimperk	3 3 – – 1 – 0 –	7	**12,64**
60.–61.	*Marie*	*Vonzino*	1	GTomkovaOL	3 0 1 3 – – – –	7	**12,64**
62.	*Zuzana*	*Drázdová*	3	GCON ČesBuď	3 3 2 2 – – 1 –	11	**12,52**
63.	*Šimon*	*Tabačko*	2	EvG Košice	3 1 3 – 0 – 1 –	$8 + i$	**12,19**
64.–66.	*Daniel*	*Backov*	2	G Ružomb	– 3 – 5 – – – –	8	**11,89**
64.–66.	*Matěj*	*Seidl*	2	PORG PH	3 1 0 3 1 – – –	8	**11,89**
64.–66.	*Jaroslav*	*Stránský*	2	G Tišnov	3 2 2 – 1 – – –	8	**11,89**
67.	*Marek*	*Vícha*	3	MendelG OP	3 3 3 – – – – –	$9 + i$	**11,68**
68.	*Jan*	*Kadlec*	3	G Klatovy	3 2 3 1 4 0 – –	13	**11,44**
69.	*Vojtěch*	*Suchánek*	3	GJarošeBO	3 3 3 – – – – –	9	**11,39**
70.	*Markéta*	*Ospálková*	1	G Uničov	3 3 – – – – – –	6	**11,38**
71.	*Tomáš*	*Fiala*	3	GLedečNSáz	3 3 3 – – – – –	$9 + i$	**11,02**
72.	*Lukáš*	*Sadlek*	3	G Čadca	3 2 3 – – – 0 –	$8 + i$	**10,60**
73.	*Tomáš*	*Flaschka*	2	G Hlučín	3 3 – – – – – –	6	**9,48**
74.	*Adam*	*Gálik*	4	GOlivuPopr	3 0 2 4 0 0 0 0	9	**9,00**
75.	*Přemysl*	*Šťastný*	0	G Žamberk	– 3 0 – – – – –	3	**8,34**
76.	*Peter*	*Vook*	3	GPošKošice	3 3 – – – – – –	6	**8,00**
77.	*Kristýna*	*Šudomová*	2	GValašKlob	3 – 0 2 – – – –	5	**7,56**
78.–80.	*Kryštof*	*Kolář*	2	GJarošeBO	3 – – – – – – –	3	**5,27**
78.–80.	*Martin*	*Konečný*	2	GStrážnice	– 3 – – – – – –	3	**5,27**
78.–80.	*Peter Kulcsár*	*Szabó*	2	GHSelyhoKM	3 – 0 – – – – 0	3	**5,27**
81.	*Vojtěch*	*Juříček*	2	G Kralupy	3 – – – – – – –	3	**5,13**
82.	*Václav*	*Krchňák*	2	GJarošeBO	3 – – – – – – –	3	**4,96**
83.	*Michael*	*Bucha*	3	G Zábřeh	3 – – – – – – –	3	**4,23**
84.	*Jiří*	*Zeman*	4	GLesníZlín	3 1 – – – – – –	4	**3,25**
85.	*Kristýna*	*Ilievová*	3	G Milevsko	3 – – – – – – –	3	**2,87**
86.–87.	*Dušan*	*Klíma*	2	GRychnovKn	1 – – – – – – –	1	**1,91**
86.–87.	*Tomáš*	*Velich*	2	GJHroncaBA	1 0 – – – – – –	1	**1,91**
88.	*Tomáš*	*Valovič*	4	GAHŠ VKrtíš	– 1 – – – – – –	1	**1,00**

2. seriálová série – Teorie čísel

Výsledková listina

1.–8.	*František*	*Couf*	1	GZborovPH	5	5	5	$15+i$	**15,00**
1.–8.	*Jan*	*Jurka*	3	GMLerchaBO	5	5	5	15	**15,00**
1.–8.	*Anh Dung*	*Le*	4	G Tachov	5	5	5	15	**15,00**
1.–8.	*Martin*	*Raszyk*	4	G Karviná	5	5	5	15	**15,00**
1.–8.	*Václav*	*Rozhoň*	3	GJirsíkaČB	5	5	5	15	**15,00**
1.–8.	*Jan*	*Soukup*	3	G Klatovy	5	5	5	$15+i$	**15,00**
1.–8.	*Jakub*	*Svoboda*	4	G KomHavíř	5	5	5	15	**15,00**
1.–8.	*Radovan*	*Švarc*	3	G ČTřebová	5	5	5	15	**15,00**
9.	*Filip*	*Bialas*	1	GOpatovPH	4	5	5	14	**14,64**
10.	*Pavel*	*Turek*	1	GTomkovaOL	5	4	5	14	**14,54**
11.	*Vojtěch*	*Suchánek*	3	GJarošeBO	5	4	5	14	**14,32**
12.	*Anh*	*Le Hoang*	2	GJarošeBO	5	2	4	11	**12,64**
13.	*Markéta*	*Horová*	2	GMikul23PL	5	–	5	10	**11,93**
14.	*Jan*	*Krejčí*	4	G Bílovec	4	5	3	12	**11,27**
15.	*Jakub*	*Löwit*	2	GČeskoliPH	4	2	4	10	**11,26**
16.	*Matěj*	*Konečný*	3	G Jírov ČB	4	2	5	11	**11,13**
17.	*Martin*	*Surma*	3	GJWolkraPV	5	–	5	10	**10,78**
18.	*Zuzana*	*Šimečková*	3	GCON ČesBuď	5	–	5	10	**10,69**
19.	*Dominik*	*Krasula*	1	G Krnov	2	1	5	$8-i$	**10,23**
20.	*Antonín*	*Češík*	4	SPŠElek PA	5	–	5	10	**9,07**
21.	*Martin*	*Kopřiva*	2	GMikul23PL	3	2	1	6	**8,35**
22.	*Daniel*	*Pišťák*	2	GZborovPH	5	2	–	7	**7,87**
23.	*Václav*	*Steinhauser*	0	ZŠVranéNVl	4	–	–	4	**7,45**
24.	*Vojtěch*	*Lukeš*	2	G LPika PL	5	–	–	5	**7,36**
25.	*Jaromír*	*Mielec*	1	GVolgogrOS	5	–	–	5	**7,13**
26.	*Martin*	*Hora*	4	GMikul23PL	5	–	5	10	**7,09**
27.	*Jan*	*Kadlec*	3	G Klatovy	4	–	4	$8-i$	**6,80**
28.	*Mikuláš*	*Zindulka*	3	GMikul23PL	5	–	–	5	**6,40**
29.–31.	*Michaela*	*Brabcová*	2	G Jírov ČB	2	2	–	4	**6,19**
29.–31.	*Tomáš*	*Kuzma*	2	GAB Senec	2	2	–	4	**6,19**
29.–31.	*Jakub*	*Marták*	2	G GolNitra	4	–	–	4	**6,19**
32.	*Jakub*	*Hledík*	3	GSŘMRSkuteč	5	–	–	5	**5,88**
33.	*Jakub*	*Sláma*	3	GOpatovPH	4	–	–	4	**5,27**
34.	*Adam*	*Gálik*	4	GOlivuPopr	4	0	1	5	**5,00**
35.	*Jan*	*Václavek*	2	G Ústí n O	3	–	–	3	**4,90**
36.	*Zuzana*	*Drázdová*	3	GCON ČesBuď	4	–	–	4	**4,76**
37.	*Katarína*	*Krajčiová*	3	GAlejKošic	5	–	–	5	**4,28**
38.	*Jan*	*Erhart*	3	GFXŠaldyLI	4	–	–	4	**4,23**
39.	*Karolína*	*Kuchyňová*	3	GMLerchaBO	4	–	–	4	**4,19**

40.	*Ivona*	*Hrivová*	4	GOkrŽilina	5	–	–	5	**4,07**
41.	*Jan*	*Šorm*	2	GJarošeBO	2	–	–	2	**2,89**
42.	*Lukáš*	*Sadlek*	3	G Čadca	0	2	–	2	**2,80**
43.	*Matěj*	*Seidl*	2	PORG PH	1	–	–	1	**1,85**
44.	*Kristýna*	*Šudomová*	2	GValašKlob	1	–	–	1	**1,67**
45.–46.	*Matěj*	*Coufal*	1	G HavlBrod	0	–	–	0	**0,00**
45.–46.	*Přemysl*	*Šťastný*	0	G Žamberk	0	–	–	0	**0,00**

Pořadí po 1. jarní sérii

1.	*František*	*Couf*	1	GZborovPH	25	25	25	24	24	15	15	**152,50**	388
2.	*Filip*	*Bialas*	1	GOpatovPH	25	24	23	23	24	15	15	**149,01**	149
3.	*Pavel*	*Turek*	1	GTomkovaOL	24	22	25	23	24	15	15	**147,42**	277
4.	*Radovan*	*Švarc*	3	G ČTřebová	25	23	25	19	25	15	15	**147,19**	851
5.	*Jakub*	*Svoboda*	4	G KomHavíř	22	24	21	21	25	14	15	**141,69**	354
6.	*Martin*	*Hora*	4	GMikul23PL	25	23	25	21	25	15	7	**141,17**	712
7.	*Martin*	*Raszyk*	4	G Karviná	16	25	23	21	25	15	15	**139,14**	762
8.	*Václav*	*Rozhoň*	3	GJirsíkaČB	25	21	21	24	25	7	15	**137,36**	137
9.	*Jakub*	*Löwit*	2	GČeskoliPH	23	21	20	22	24	14	11	**135,67**	353
10.	*Jan*	*Soukup*	3	G Klatovy	22	19	21	21	19	15	15	**131,22**	641
11.	*Martin*	*Surma*	3	GJWolkraPV	23	22	23	23	22	–	11	**124,54**	232
12.	*Václav*	*Steinhauser*	0	ZŠVranéNVl	23	23	19	21	22	9	7	**124,22**	221
13.	*Anh Dung*	*Le*	4	G Tachov	22	22	14	8	25	15	15	**121,45**	1064
14.	*Jan*	*Jurka*	3	GMLerchaBO	13	15	21	22	23	11	15	**121,27**	139
15.	*Eduard*	*Batmendijn*	3	CGStĽubovňa	25	18	21	22	20	15	–	**121,16**	146
16.	*Mikuláš*	*Zindulka*	3	GMikul23PL	21	21	17	24	22	7	6	**118,98**	119
17.	*Martin*	*Kopřiva*	2	GMikul23PL	21	19	17	20	21	10	8	**117,60**	137
18.	*Katarína*	*Krajčiová*	3	GAlejKošic	25	21	20	21	20	4	4	**116,93**	448
19.	*Matěj*	*Konečný*	3	G Jírov ČB	14	16	20	21	17	15	11	**114,47**	322
20.	*Markéta*	*Horová*	2	GMikul23PL	22	22	14	22	13	10	12	**113,20**	113
21.	*Antonín*	*Češík*	4	SPŠElek PA	20	20	19	20	20	4	9	**112,66**	245
22.	*Vojtěch*	*Suchánek*	3	GJarošeBO	20	24	21	22	11	–	14	**111,77**	112
23.	*Karolína*	*Kuchyňová*	3	GMLerchaBO	23	18	19	21	20	5	4	**111,39**	311
24.	*Jan*	*Šorm*	2	GJarošeBO	17	21	19	17	22	10	3	**108,91**	304
25.	*Jan*	*Krejčí*	4	G Bílovec	21	10	17	20	16	7	11	**102,32**	243
26.	*Lukáš*	*Sadlek*	3	G Čadca	18	20	21	15	11	10	3	**98,58**	99
27.	*Dominik*	*Krasula*	1	G Krnov	15	14	13	20	20	4	10	**96,63**	283
28.	*Marian*	*Poljak*	2	GJŠkodyPŘ	17	22	18	18	19	–	–	**93,33**	93
29.	*Daniel*	*Pišťák*	2	GZborovPH	8	17	19	19	17	4	8	**92,54**	432
30.	*Marko*	*Puza*	4	GPošKošice	23	20	17	21	–	7	–	**87,94**	502
31.	*Miroslav*	*Stankovič*	4	GPošKošice	22	25	18	15	–	8	–	**87,58**	538
32.	*Vojtěch*	*Lukeš*	2	G LPika PL	13	14	19	16	18	–	7	**86,99**	87
33.	*Martin*	*Špilar*	3	G Vyškov	22	17	14	14	18	–	–	**86,76**	87
34.	*Miroslav*	*Psota*	4	GHlinŽilina	21	20	20	22	–	3	–	**86,50**	280
35.	*Jaromír*	*Mielec*	1	GVolgogrOS	6	17	16	17	20	2	7	**83,94**	365
36.	*Minh Tri*	*Pham*	2	NPorg	17	16	15	21	16	–	–	**83,73**	157
37.	*Vojtěch*	*Lanz*	0	GZborovPH	19	17	15	16	15	–	–	**83,58**	84
38.	*Zuzana*	*Svobodová*	2	G FrýdlNOs	18	18	17	10	17	2	–	**81,52**	260
39.	*Jakub*	*Sláma*	3	GOpatovPH	12	14	14	15	18	1	5	**81,05**	81
40.	*Anh*	*Le Hoang*	2	GJarošeBO	11	20	13	–	14	8	13	**78,96**	79

41.	*Jan*	*Kadlec*	3	G Klatovy	18	9	15	13	11	4	7	**77,71**	424
42.	*Petr*	*Jakubčík*	0	PORG PH	18	16	12	18	13	0	–	**77,57**	78
43.	*Tereza*	*Kislingerová*	1	G Klatovy	18	22	19	0	15	–	–	**73,82**	74
44.	*Tomáš*	*Kuzma*	2	GAB Senec	13	18	7	14	16	–	6	**73,77**	74
45.	*Minh Thao*	*Nguyen*	2	GEBenešeKL	17	22	19	13	–	3	–	**73,48**	73
46.	*Kateřina*	*Nová*	1	G Vimperk	19	14	10	15	13	3	–	**73,13**	73
47.	*Jakub*	*Dargaj*	4	GPošKošice	19	17	12	22	–	3	–	**73,12**	459
48.	*Michaela*	*Brabcová*	2	G Jírov ČB	16	14	12	11	13	–	6	**71,85**	72
49.	*Markéta*	*Calábková*	3	GJŠkodyPŘ	12	7	16	16	15	6	–	**70,25**	243
50.	*Marián*	*Poppr*	3	GJNerudyPH	14	23	16	12	–	5	–	**68,96**	394
51.	*Miroslav*	*Krabec*	4	G KomHavíř	16	17	17	17	–	–	–	**67,58**	256
52.	*Ondřej*	*Darmovzal*	3	GJarošeBO	23	21	23	–	–	–	–	**67,42**	67
53.	*Jan*	*Václavek*	2	G Ústí n O	13	17	11	–	15	3	5	**64,04**	64
54.	*Tomáš*	*Fiala*	3	GLedečNSáz	19	13	12	7	11	1	–	**63,51**	141
55.	*Anna*	*Steinhauserová*	4	G Dačice	21	17	10	12	–	3	–	**62,05**	554
56.	*Jakub*	*Hledík*	3	GSŘMRSkuteč	17	4	9	11	14	1	6	**61,80**	164
57.	*Andrea*	*Kučerová*	2	G ČKrumlov	19	17	5	–	18	–	–	**59,53**	60
58.	*Vít*	*Kalisz*	2	FSG Pirna	12	17	13	14	–	–	–	**56,13**	56
59.	*Patricie*	*Klosse*	2	G ČKrumlov	16	17	5	–	15	–	–	**53,48**	53
60.	*Jakub*	*Marták*	2	G GolNitra	12	4	5	11	14	0	6	**52,04**	52
61.	*Daniela*	*Šindelářová*	2	GaSOŠ Telč	21	13	8	9	–	–	–	**51,49**	51
62.	*Michael*	*Bucha*	3	G Zábřeh	10	11	16	4	4	–	–	**46,51**	47
63.	*Marie*	*Vonzino*	1	GTomkovaOL	16	3	7	8	13	–	–	**46,47**	46
64.	*Daniel*	*Backov*	2	G Ružomb	16	0	5	13	12	–	–	**46,16**	46
65.	*Petr*	*Lukeš*	4	GNeumannŽR	10	17	12	–	–	5	–	**44,45**	208
66.	*Lukáš*	*Kubacki*	1	GNadKavaPH	11	7	8	0	15	3	–	**44,33**	44
67.	*Kristýna*	*Šmídová*	4	GMensaPH	18	19	4	–	–	–	–	**41,68**	136
68.	*Lukáš*	*Honsa*	2	G Jírov ČB	9	8	11	–	13	–	–	**41,66**	42
69.	*Michaela*	*Brezinová*	2	GKomTrebiš	12	16	–	–	13	–	–	**40,89**	41
70.	*Jan*	*Alfery*	2	GNPražačPH	9	–	18	–	13	–	–	**40,67**	77
71.	*Jiřina*	*Duspivová*	2	G Kralupy	11	17	5	7	–	–	–	**39,65**	40
72.	*Přemysl*	*Šťastný*	0	G Žamberk	14	6	–	10	8	–	0	**38,97**	39
73.	*Jakub*	*Šebek*	4	GKepleraPH	21	18	–	–	–	–	–	**38,87**	98
74.–75.	*Markéta*	*Ospálková*	1	G Uničov	15	3	7	3	11	0	–	**38,40**	38
74.–75.	*Marek*	*Vícha*	3	MendelG OP	11	12	3	–	12	–	–	**38,40**	38
76.	*Jiří*	*Zeman*	4	GLesníZlín	–	18	12	5	3	–	–	**38,22**	155
77.	*Adam*	*Říha*	2	G ČesLípa	12	7	5	–	13	–	–	**37,21**	37
78.	*Jaroslav*	*Stránský*	2	G Tišnov	11	5	8	–	12	–	–	**36,05**	36
79.	*Jiří*	*Češka*	1	CMGProstěj	19	17	–	–	–	–	–	**35,35**	35
80.	*Kristýna*	*Šudomová*	2	GValašKlob	14	3	3	5	8	0	2	**35,01**	134
81.	*Adam*	*Gálik*	4	GOlivuPopr	7	1	6	7	9	0	5	**35,00**	35
82.	*Zuzana*	*Tréglová*	1	G Žatec	11	–	–	–	23	–	–	**34,80**	35
83.	*Štefan*	*Račák*	2	GTajBanBys	18	4	7	5	–	–	–	**33,45**	33
84.	*Anežka*	*Michálková*	2	GaSOŠ Telč	19	–	7	5	–	2	–	**32,47**	32
85.	*Mihály*	*Kotiers*	2	GHSelyhoKM	13	19	–	–	–	–	–	**32,37**	32
86.	*Tomáš*	*Flaschka*	2	G Hlučín	12	5	4	–	9	–	–	**30,29**	30
87.	*Zuzana*	*Vlasáková*	4	G Rumburk	4	12	9	5	–	–	–	**30,24**	174
88.	*Lenka*	*Kopfová*	0	CZŠSL HnM	16	13	–	–	–	–	–	**29,10**	29
89.	*Peter Kulcsár*	*Szabó*	2	GHSelyhoKM	9	14	–	0	5	–	–	**28,80**	29
90.	*Jan*	*Erhart*	3	GFXŠaldyLI	9	–	–	–	14	–	4	**28,15**	222
91.	*Viktor*	*Němeček*	3	GJMasar JI	19	9	–	–	–	–	–	**28,11**	338

92.	*Jáchym*	*Solecký*	1	PORG PH	13	0	–	–	15	–	–	**27,81**	28
93.	*Barbora*	*Hudcová*	4	PORG PH	10	17	–	–	–	–	–	**27,31**	92
94.	*Kristýna*	*Ilievová*	3	G Milevsko	6	13	3	3	3	–	–	**27,09**	271
95.	*Lucie*	*Roškotová*	2	G Turnov	9	7	–	11	–	–	–	**26,96**	27
96.	*Ivona*	*Hrivová*	4	GOkrŽilina	7	–	–	–	15	–	4	**25,98**	176
97.	*Kryštof*	*Kolář*	2	GJarošeBO	5	–	5	9	5	–	–	**25,29**	25
98.	*Zuzana*	*Šimečková*	3	GCON ČesBuď	–	–	–	–	14	–	11	**25,02**	150
99.	*David*	*Ucháč*	1	VOŠDoprPH	14	3	7	–	–	–	–	**23,27**	23
100.	*Henrieta*	*Micheľová*	2	GAlejKošic	11	12	–	–	–	–	–	**22,94**	163
101.	*Hedvika*	*Ranošová*	0	GBudějovPH	–	–	–	–	23	–	–	**22,79**	23
102.	*Tereza*	*Koberová*	3	G Chrudim	9	8	6	–	–	–	–	**22,70**	23
103.	*Emese*	*Szabó*	3	GZKMJ Gal	13	4	4	–	–	–	–	**21,93**	22
104.	*Martin*	*Konečný*	2	GStrážnice	13	4	–	–	5	–	–	**21,92**	22
105.	*Michaela*	*Bieliková*	4	G Sereď	11	9	–	–	–	–	–	**20,58**	161
106.	*David*	*Peňáz*	2	GNeumannŽR	12	8	–	–	–	–	–	**20,06**	20
107.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	0	GZborovPH	20	–	–	–	–	–	–	**19,76**	20
108.	*Tomáš*	*Velich*	2	GJHroncaBA	12	2	0	4	2	–	–	**19,36**	19
109.	*Šimon*	*Tabačko*	2	EvG Košice	–	7	–	–	12	–	–	**18,95**	19
110.	*Vojtěch*	*Linhart*	3	SlovanG OL	18	–	–	–	–	–	–	**18,15**	18
111.	*Martin*	*Minasjan*	4	GKepleraPH	18	–	–	–	–	–	–	**17,82**	135
112.	*Jana*	*Vráblíková*	2	GLesníZlín	14	4	–	–	–	–	–	**17,70**	18
113.	*Veronika*	*Holubová*	3	PORG PH	8	3	–	7	–	–	–	**17,67**	18
114.	*Zuzana*	*Drázdová*	3	GCON ČesBuď	–	–	–	–	13	–	5	**17,28**	124
115.	*Peter*	*Vook*	3	GPošKošice	9	–	–	–	8	–	–	**17,17**	17
116.	*Jiří*	*Štrincl*	3	GSRandyJN	11	0	6	–	–	–	–	**16,92**	17
117.	*Vojtěch*	*Juříček*	2	G Kralupy	12	–	–	–	5	–	–	**16,83**	44
118.	*Ondřej*	*Zeman*	3	G Lovosice	–	–	–	–	17	–	–	**16,61**	17
119.	*Ľudmila*	*Šimková*	4	GPároNitra	5	10	–	–	–	–	–	**15,47**	78
120.	*Tereza*	*Rašková*	3	GTomkovaOL	15	0	–	–	–	–	–	**15,43**	15
121.	*Otto*	*Hollmann*	4	GUBalvanJN	7	6	2	–	–	–	–	**15,00**	15
122.	*Pavel*	*Souček*	2	G Nymburk	–	9	5	–	–	–	–	**14,75**	15
123.–124.	*Radim*	*Bárta*	3	GJarošeBO	14	–	–	–	–	–	–	**14,47**	14
123.–124.	*Jan*	*Knížek*	3	G Strakon	14	–	–	–	–	–	–	**14,47**	14
125.	*Tran Vi Thanh*	*Pham*	4	GNeumannŽR	7	7	–	–	–	–	–	**14,08**	150
126.–129.	*Petr*	*Červenka*	2	GNadKavaPH	14	–	–	–	–	–	–	**14,05**	14
126.–129.	*Jozef*	*Mišt*	2	GAHŠ VKrtíš	14	0	–	–	–	0	–	**14,05**	14
126.–129.	*Jakub*	*Starý*	2	VOŠKutHora	14	–	–	–	–	–	–	**14,05**	14
126.–129.	*Jakub*	*Ševčík*	2	GKukučPopr	14	–	–	–	–	–	–	**14,05**	14
130.	*Matěj*	*Coufal*	1	G HavlBrod	–	–	–	–	14	–	0	**13,81**	14
131.	*Nicholas*	*Čapek*	4	GBNěmcovHK	11	3	–	–	–	–	–	**13,78**	129
132.	*Matěj*	*Seidl*	2	PORG PH	–	–	–	–	12	–	2	**13,74**	14
133.	*Barbora*	*Pešlová*	3	G Vimperk	13	–	–	–	–	–	–	**13,41**	131
134.–137.	*Lukáš*	*Černý*	2	NPorg	–	–	–	–	13	–	–	**13,00**	13
134.–137.	*Matyáš*	*Medek*	4	GMozartovaPA	13	–	–	–	–	–	–	**13,00**	13
134.–137.	*Jakub*	*Schinko*	2	GNadKavaPH	13	–	–	–	–	–	–	**13,00**	13
134.–137.	*Lukáš*	*Zíb*	2	GPísnickPH	13	–	–	–	–	–	–	**13,00**	13
138.	*Jakub Josef*	*Slavík*	1	BiskG Brno	13	–	–	–	–	–	–	**12,64**	13
139.	*Martin*	*Šourek*	3	GCoubTábor	12	–	–	–	–	–	–	**12,45**	12
140.–141.	*Jakub*	*Hrubý*	2	G Chrudim	12	0	–	–	–	–	–	**11,89**	12
140.–141.	*Martin*	*Kutiš*	2	G Humpolec	12	–	–	–	–	–	–	**11,89**	12
142.	*Adéla*	*Šedová*	2	GJungmanLT	8	4	–	–	–	–	–	**11,82**	12

143.	*Pavlína*	*Hartmanová*	2	G Broumov	12	–	–	–	–	–	–	**11,76**	30
144.	*Borek*	*Požár*	0	G Rakovník	12	–	–	–	–	–	–	**11,66**	12
145.	*Ondrej*	*Bínovský*	3	GAnMeTr	–	–	–	–	–	11	–	**11,46**	11
146.–147.	*Tomáš*	*Beneš*	2	GVráLevice	9	2	–	–	–	–	–	**11,39**	11
146.–147.	*Martin*	*Chabada*	2	G Bardejov	9	2	–	–	–	–	–	**11,39**	11
148.	*Michaela*	*Biová*	3	MendelG OP	7	–	4	–	–	–	–	**11,02**	11
149.	*Tomáš*	*Valovič*	4	GAHŠ VKrtíš	8	2	–	–	1	–	–	**11,00**	11
150.–151.	*Petra*	*Kratochvílová*	2	GHustopeče	11	–	–	–	–	–	–	**10,72**	11
150.–151.	*Daniel*	*Krejbych*	2	G Litomyšl	11	–	–	–	–	–	–	**10,72**	11
152.	*Cedrik*	*Horčička*	3	G ČesLípa	9	–	–	1	–	–	–	**10,64**	11
153.–155.	*Jiří*	*Čech*	3	G Strakon	–	–	10	–	–	–	–	**10,30**	10
153.–155.	*Vít*	*Fojtík*	3	GÚstavníPH	–	–	10	–	–	–	–	**10,30**	10
153.–155.	*Marek*	*Štěpán*	3	SPŠE Fren	10	–	–	–	–	–	–	**10,30**	10
156.	*Katarína*	*Behinská*	2	G GolNitra	8	0	–	2	–	–	–	**10,08**	10
157.–160.	*Dominik*	*Hodan*	1	GNadAlejPH	10	–	–	–	–	–	–	**10,00**	10
157.–160.	*Věra*	*Tesařová*	1	MasG Plzeň	10	0	–	–	–	–	–	**10,00**	10
157.–160.	*The Minh*	*Tran*	1	PČGKarVary	10	–	–	–	–	–	–	**10,00**	10
157.–160.	*Kateřina*	*Volková*	1	MG Vsetín	10	–	–	–	–	–	–	**10,00**	10
161.–163.	*Denisa*	*Kolenčíková*	3	GNámestovo	9	–	–	–	–	–	–	**9,17**	9
161.–163.	*Jan*	*Krůza*	3	GVPavlovic	9	–	–	–	–	–	–	**9,17**	9
161.–163.	*Tomáš*	*Vaníček*	3	G Jírov ČB	9	–	–	–	–	–	–	**9,17**	9
164.	*Daniel*	*Kočik*	4	GŠroKošice	9	–	–	–	–	–	–	**9,00**	9
165.	*Hana*	*Daňková*	1	G Vimperk	–	8	–	–	–	–	–	**8,48**	8
166.	*Jan*	*Lukáč*	3	G ČKrumlov	4	4	–	–	–	–	–	**8,46**	8
167.	*Lenka*	*Vincenová*	0	GTomkovaOL	8	–	–	–	–	–	–	**8,34**	8
168.–169.	*Matěj*	*Kosma*	2	SOŠDoprOS	8	0	–	–	–	–	–	**8,17**	8
168.–169.	*Dennis*	*Ryšánek*	2	SPŠÚžlabPH	8	–	–	–	–	–	–	**8,17**	8
170.–172.	*Antonie*	*Brožová*	4		8	–	–	–	–	–	–	**8,00**	8
170.–172.	*Jakub*	*Kříž*	4	SPŠ PB	8	–	–	–	–	–	–	**8,00**	8
170.–172.	*Matěj*	*Sháněl*	4	G VysMýto	8	–	–	–	–	–	–	**8,00**	8
173.	*Vendula*	*Kotyzová*	4	WichtG OS	8	–	–	–	–	–	–	**7,76**	113
174.	*Marie*	*Koutná*	4	GTNovákBO	7	–	–	–	–	–	–	**7,00**	7
175.–178.	*Levente*	*Berky*	3	GZKMJ Gal	7	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
175.–178.	*Kristýna*	*Davídková*	1	OA Liberec	7	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
175.–178.	*Anna*	*Filipová*	3	G Kolín	7	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
175.–178.	*Jana*	*Menšíková*	1	G Frýdlant	7	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
179.–180.	*Alena*	*Košáková*	2	G Strakon	7	0	–	–	–	–	–	**6,76**	7
179.–180.	*Ronald*	*Luc*	2	GJarošeBO	7	–	–	–	–	–	–	**6,76**	7
181.	*Tomáš*	*Konečný*	1	GJirsíkaČB	6	–	–	–	–	–	–	**5,75**	143
182.–184.	*Stanislav*	*Kruml*	3	G Chotěboř	6	0	–	–	–	–	–	**5,53**	6
182.–184.	*Barbora*	*Kubicová*	3	PORG PH	6	–	–	–	–	–	–	**5,53**	6
182.–184.	*Vít*	*Maroščík*	3	G Bohumín	6	–	–	–	–	–	–	**5,53**	6
185.	*Valentína*	*Straková*	4	G Sereď	5	–	–	–	–	–	–	**5,36**	68
186.–188.	*Matej*	*Kašťák*	2	G Hlohovec	5	–	–	–	–	–	–	**5,27**	5
186.–188.	*Marina*	*Pogarčenko*	2	GJungmanLT	5	0	–	–	–	–	–	**5,27**	5
186.–188.	*Tomáš*	*Šácha*	2	SPŠEB Břeclav	–	5	–	–	–	–	–	**5,27**	5
189.–190.	*Irena*	*Bačinská*	4	ŠpMNDaG BA	0	5	–	–	–	–	–	**5,00**	5
189.–190.	*Jaromír*	*Kuchyňka*	4	GStrážnice	5	–	–	–	–	–	–	**5,00**	5
191.	*Václav*	*Krchňák*	2	GJarošeBO	0	–	–	–	5	–	–	**4,96**	69
192.	*Karel*	*Vlachovský*	2	MasG Plzeň	5	–	–	–	–	–	–	**4,90**	82
193.–194.	*Petr*	*Gintar*	3	MendelG OP	4	0	0	–	–	0	–	**4,23**	4

193.–194.	*Silvia*	*Nepšinská*	3	GJChalBR	4	–	–	–	–	–	–	–	**4,23**	4
195.	*Ondřej*	*Broža*	4		4	–	–	–	–	–	–	–	**4,00**	4
196.	*Jaroslav*	*Cerman*	2	GJilemnice	4	0	–	–	–	–	–	–	**3,65**	4
197.–198.	*Ondřej*	*Havlík*	3	MSOŠ Klob	3	–	–	–	–	–	–	–	**2,88**	3
197.–198.	*Rostislav*	*Lukosz*	3	G Bohumín	3	–	–	–	–	–	–	–	**2,88**	3
199.	*Jana*	*Lepšová*	4	G Dobruška	–	3	–	–	–	–	–	–	**2,58**	79
200.	*Marcela*	*Fialová*	4	SOŠ Kolín	2	–	–	–	–	–	–	–	**2,00**	2
201.	*Dušan*	*Klíma*	2	GRychnovKn	–	–	–	–	2	–	–		**1,91**	2
202.	*Kateřina*	*Fuková*	1	GOhradníPH	0	–	–	–	–	–	–	–	**0,00**	0

adresa: *Korespondenční seminář*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
web: *http://mks.mff.cuni.cz/*
e-mail: *mks@mff.cuni.cz*