Matematický korespondenční seminář

Milý příteli !

Podzimní část semináře se pomalu chýlí ke konci. Zbývá nám už jen cizojazyčná série, která však umí celkovým pořadím ještě řádně zamíchat. Ti nejlepší z vás se poté budou moct těšit na jarní soustředění. Jestliže se vám na podzim nedařilo, nevěšte hlavu, není vše ztraceno! Na podzimní soustředění totiž zveme naopak nejlepší řešitele jarní části. Šance na úspěch je velká, neboť podle pravidel nejsou na podzimní soustředění zváni maturanti. Ani ti ale nepřijdou zkrátka – stále mohou soutěžit o zajímavé ceny.

Za organizátory zdraví

Martina Vaváčková

Co dále najdeš v komentářích?

- Povídání ke druhé jarní sérii
- Vzorové řešení 2. a 3. podzimní série
- Vzorové řešení 1. seriálové série
- Seriál – Teorie čísel II
- Výsledkové listiny

- Příloha: Zadání 1. a 2. jarní série a 2. seriálové série

Podzimní soustředění v Horních Lysečinách

Odměnou za jarní část semináře je každoročně podzimní soustředění. V listopadu se tak nejlepší řešitelé (v domnění, že jedou do Krkonoš) objevili v Matrixu, kde bojovali proti zlým agentům a snažili se zachránit svět. K tomu, aby uspěli, podstoupili systematickou přípravu. na vesmírné lodi prohlubovali své matematické znalosti, mezi přednáškami sportovali, učili se taktizovat v hrách a ve skvělém kolektivu znovu načerpali síly. Veškeré hrozící nebezpečí bylo tedy odvráceno a všichni se v pořádku vrátili domů.

Těšíme se na další soustředění!

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

Co se chystá

Soustředění *i*KS (neděle 9. března – pátek 14. března). Československý seminář pro borce *i*KS má své historicky třetí soustředění, opět pojaté jako příprava na celostátní kolo Matematické olympiády. Bližší informace o *i*KSku naleznete na jeho stránkách *www.iksko.org*.

Jarní výlet (sobota 22. března 2013). Tradiční akce PraSátka – sraz organizátorů, řešitelů a přátel semináře. Pojeď s námi strávit jarní den do přírody, popovídat si, potkat nové i známé řešitele a organizátory a užít si spoustu legrace. Bližší informace se včas se objeví na webu semináře, pozvánku dostaneš s příštími komentáři.

Náboj (pátek 11. dubna 2014). Náboj je týmová matematická soutěž, kterou pro vás pořádáme ve spolupráci s bratislavským Matematickým korešpondenčným seminárom, a to v Praze, Opavě, Bratislavě, Košicích a nově i bavorském Pasově (a možná i jinde). Další informace a přihlášku naleznete na webu soutěže *www.naboj.org*.

Jarní soustředění (neznámé datum). Místo i téma jarního soustředění je tradičně tajné. Prozatím je tajné i datum, ale informace budou včas na webu i v dopisních schránkách.

Povídání ke druhé jarní sérii

Tématem druhé jarní série jsou iracionální čísla. Většina z vás je už určitě zná ze školy, jistě však nebude na škodu si o nich něco připomenout. V běžném životě často pracujeme s čísly přirozenými a celými. K tomu, abychom mohli bez problémů dělit, byla zavedena čísla racionální. To jsou všechna čísla, která se dají napsat ve tvaru $\frac{a}{b}$, kde a je celé a b přirozené. Jsou-li navíc a a b nesoudělná, je tento zápis jednoznačný a říkáme, že zlomek $\frac{a}{b}$ je v základním tvaru.

Všechna racionální čísla se v desítkové soustavě (ale i v jiných soustavách) dají vyjádřit pomocí desetinného zápisu, který je buď ukončený (tj. za desetinnou čárkou je pouze konečně mnoho číslic), nebo periodický (tj. od určitého místa za desetinnou čárkou se opakuje stále stejná konečná posloupnost číslic). Periodu obvykle značíme „nadčarou“. Uvedeme několik příkladů racionálních čísel: $\frac{3}{5} = 0{,}6$, $\frac{41}{80} = 0{,}5125$, $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$ $\frac{116}{495} = 0{,}2\overline{34}$. Není těžké si rozmyslet, že součet, rozdíl, součin i podíl dvou racionálních čísel je opět racionální (u podílu musíme předpokládat, že dělitel není roven nule).

Na kladná racionální čísla můžeme pohlížet jako na délky úseček – udávají vzdálenost dvou bodů. Přirozeně vyvstává otázka, zdali existují i vzdálenosti, které se nedají zapsat jako podíl dvou celých čísel. Odpověď znali už staří Řekové, kteří uměli dokázat, že takové vzdálenosti opravdu existují. Příkladem je délka úhlopříčky ve čtverci o straně 1, jak uvidíme později. Tato čísla – spolu s čísly k nim opačnými – nazýváme iracionální.

Racionální čísla spolu s iracionálními tvoří čísla reálná. Iracionální čísla nelze zapsat ve tvaru podílu dvou celých čísel, což je ekvivalentní tomu, že mají neukončený neperiodický desetinný rozvoj. Řadí se mezi ně slavná čísla jako π, udávající poměr obvodu a průměru kružnice, nebo Eulerovo číslo e. Kromě těchto čísel, o kterých je relativně obtížné dokázat, že opravdu jsou iracionální, existují i taková, o kterých to jde dokázat relativně snadno.

Tvrzení. *Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální. Existují tedy dvě celá čísla p, q taková, že $\sqrt{2} = p/q$. Po umocnění na druhou a následném vynásobení q^2 dostaneme, že musí platit $2q^2 = p^2$. Jelikož p, q jsou celá čísla, musí být v prvočíselných rozkladech p^2, q^2 dvojka v sudé mocnině. To ale znamená, že na levé straně poslední rovnice je dvojka v liché mocnině, zatímco na pravé straně v sudé. Tato rovnost tedy nemůže platit pro žádná celá p, q, a proto je $\sqrt{2}$ iracionální.

Výše uvedený důkaz lze zobecnit. Zjistíme tak, že pokud přirozené číslo není druhou mocninou jiného přirozeného čísla, pak už je jeho odmocnina nutně iracionální. Podobně lze důkaz upravit i pro vyšší odmocniny.

Přestože je obecně velmi těžké dokázat iracionalitu nějakého čísla, ukazuje se, že v jistém smyslu je iracionálních čísel mnohem více než racionálních.[1] Není těžké si rozmyslet a dokázat, že součet či součin nenulového racionálního čísla s iracionálním je vždy iracionální. Tento fakt

[1] Jak porovnat velikosti nekonečných množin? Toto téma je zajímavé, leč velmi rozsáhlé a nesouvisející s touto sérií. Zvídavý čtenář se o něm může dozvědět v knihovně na našich internetových stránkách: *http://mks.mff.cuni.cz/archive/21/10.pdf*

můžete ve svých řešeních bez důkazu používat. O součtu či součinu dvou iracionálních čísel však nelze obecně nic říct (např. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ je iracionální, ale $\sqrt{2}+(10-\sqrt{2})$ je racionální).

Na závěr si ukážeme ještě jeden příklad, jak dokázat, že je nějaké číslo iracionální.

Úloha. Dokažte, že číslo 0,1234567891011 . . . , ve kterém za desetinnou čárku postupně píšeme všechna přirozená čísla, je iracionální.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že toto číslo je racionální. Jeho desetinný rozvoj zjevně není ukončený, proto musí být periodický. Nechť má tedy periodu délky n a předperiodu délky m. Za desetinnou čárkou však umíme najít posloupnost alespoň $m+n$ nul za sebou (například v čísle 10^{m+n}). Z těchto nul je nejvýše m v předperiodě a alespoň n za ní, takže perioda musí být složena ze samých nul. Podobně ale umíme najít i posloupnost $m+n$ jedniček, dvojek, . . . , čímž dostáváme spor. Původní předpoklad tedy neplatí a číslo 0,1234567891011 . . . je skutečně iracionální.

Nyní už víte vše, co potřebujete, tak směle do řešení další série!

Podobnost a shodnost

2. podzimní série Vzorové řešení

Úloha 1. (105; 67; 1,94; 3,0)

Alča jednou ve svém sešitě našla narýsované dva trojúhelníky, které se shodovaly ve velikostech všech vnitřních úhlů a v délkách dvou stran, ale přesto nebyly shodné. Nalezněte dva takové trojúhelníky. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Uvažujme trojúhelníky ABC a DEF a jejich strany a, b, c, d, e, f takové, že čtveřice čísel a, $b = d$, $c = e$, f tvoří geometrickou posloupnost. Platí $a : d = b : e = c : f = k$, trojúhelníky si tedy jsou podobné, a tudíž mají stejné vnitřní úhly.

Požadavkům vyhovují například čísla 8, 12, 18, 27. Musíme ještě ověřit, zda mohou tvořit trojúhelníky, tj. jestli nejdelší strana trojúhelníku je kratší než součet zbylých dvou. Vskutku $8 + 12 > 18$, $12 + 18 > 27$, trojúhelníková nerovnost tedy platí.

Příkladem hledané dvojice trojúhelníků je $\triangle ABC$ s délkami stran 8, 12, 18 a $\triangle DEF$ s délkami stran 12, 18, 27.

Poznámky:

Ačkoliv stačilo v podstatě jen najít dva vhodné trojúhelníky, správných řešení bylo jen lehce přes půlku. Část z nich uvažovala pravoúhlý trojúhelník a díky Pythagorově větě se pak nemusela řešit trojúhelníková nerovnost. Mnoho z ostatních pohořelo na jejím opomenutí (a snažilo se pak vydávat úsečky o délkách 1, 2, 4 za trojúhelník). Další skupinu pak tvořili ti, kteří zaslali trojúhelníky, které si nebyly podobné či neměly dvě strany stejně dlouhé. Někteří se také omezili na pouhé konstatování vlastností takových trojúhelníků nebo jen na narýsování bez jakéhokoli popisu stran.

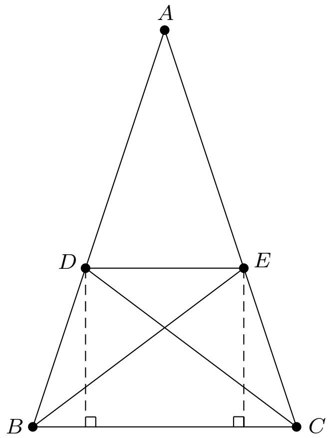
Na závěr bych ráda podotkla, že když máte nalézt dva trojúhelníky daných vlastností a zadání říká, že existují, pak nemá cenu dokazovat jejich existenci ani neexistenci :) (Pokusů o jedno či druhé bylo dvojciferně.) *(Anička Doležalová)*

Úloha 2. (100; 75; 2,28; 3,0)

V trojúhelníku ABC leží body D, E po řadě na stranách AB a AC tak, že trojúhelníky ABC, CBD a BEC jsou podobné. Dokažte, že pokud jsou přímky BC a DE rovnoběžné, pak je trojúhelník ABC rovnoramenný. *(Martin „E.T.“ Sýkora)*

Řešení (podle Kristýny Šmídové):

Protože $DE \parallel BC$, tak výška trojúhelníku CBD na stranu BC je shodná s výškou trojúhelníku BEC na stranu BC. Obsahy těchto trojúhelníků jsou tedy shodné, a protože ze zadání víme, že $\triangle CBD \sim \triangle BEC$, jsou shodné i samotné trojúhelníky. Díky tomu je koeficient podobnosti k mezi trojúhelníky ABC a CBD stejný jako koeficient podobnosti mezi trojúhelníky ABC a BEC.



Z podobnosti $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ plyne $|AB| = k \cdot |BC|$ a z podobnosti $\triangle BEC \sim \triangle ABC$ plyne $k \cdot |BC| = |AC|$, celkem tedy $|AB| = k \cdot |BC| = |AC|$ a trojúhelník ABC je rovnoramenný.

Poznámky:

Většina řešitelů úlohu řešila postupem, na který navádí hinty na chatu našich internetových stránek. Jiní si zapsali podobnost jako shodnost poměrů délek stran podobných trojúhelníků a postupnými úpravami se dostali k rovnosti $|AB| = |AC|$. Oba způsoby vedly k řešení. Za originální myšlenku shodnosti podobných trojúhelníků uvedenou ve vzorovém řešení bych chtěl speciálně pochválit *Kristýnu Šmídovou* a *Eduarda Batmendijna*.

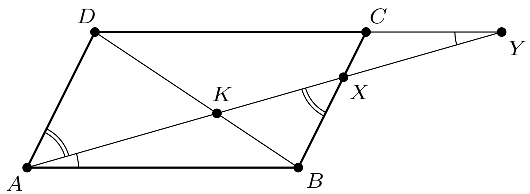
Závěrem bych chtěl upozornit na to, že pokud řekneme, že trojúhelníky ABC a XYZ jsou si podobné, myslíme tím, že jejich vrcholy si odpovídají v tomto pořadí, a tedy, že $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle XYZ|$. I když jsme tuto skutečnost v zadání zmiňovali, mnozí ji nevzali v potaz a úlohu si zbytečně zkomplikovali. *(Martin „E.T.“ Sýkora)*

Úloha 3.

(79; 56; 2,18; 3,0)

Na úhlopříčce BD rovnoběžníku $ABCD$ je dán bod K tak, že přímka AK protne úsečku BC v bodě X a přímku CD v bodě Y. Dokažte, že $|AK|^2 = |KX| \cdot |KY|$. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:



Trojúhelníky BAK a DYK jsou si navzájem podobné podle věty *uu* ($\sphericalangle BAK$ a $\sphericalangle DYK$ jsou střídavé, $\sphericalangle AKB$ a $\sphericalangle YKD$ vrcholové). Odtud plyne vztah

$$\frac{|AK|}{|KY|} = \frac{|BK|}{|DK|}.$$

Obdobně i trojúhelníky BXK a DAK jsou podobné ($\sphericalangle BXK$ a $\sphericalangle DAK$ jsou střídavé, $\sphericalangle XKB$ a $\sphericalangle AKD$ vrcholové), což nám dává

$$\frac{|KX|}{|AK|} = \frac{|BK|}{|DK|}.$$

Porovnáním levých stran obou vztahů dostáváme

$$\frac{|AK|}{|KY|} = \frac{|KX|}{|AK|},$$

a to po úpravě dává dokazovanou rovnost.

Poznámky:
Řešení byla převážně správná a podobná vzorovému, i když nezřídka zbytečně komplikovaná. Většina nezdařilých pokusů bohužel ztroskotala na nepochopení zadání – jejich autoři měli za to, že přímka AK musí protnout stranu CD, a vyřešili tedy pouze případ, kdy prochází bodem C.

Další řešitelé si všimli, že dokazovaná rovnost připomíná Eukleidovu větu o odvěsně nebo mocnost bodu ke kružnici, a vymysleli si pomocnou konstrukci, na kterou pak to či ono použili. Nikomu z nich se však nepodařilo uspokojivě ukázat, že takovou konstrukci lze opravdu sestrojit.

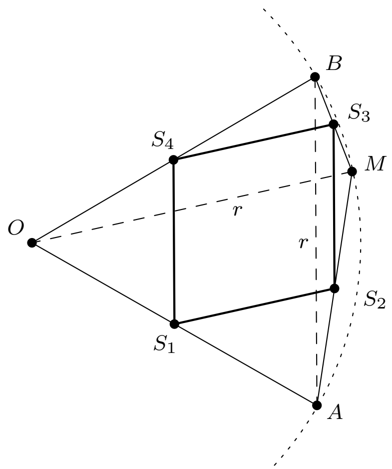
Imaginární bod obdržel *Miroslav Psota* za jediné správné řešení, které se zásadně odlišovalo od vzorového. *(Ondřej Cífka)*

Úloha 4.

(97; 74; 3,66; 5,0)

Na kružnici se středem O zvolme body A, B tak, aby platilo $|\sphericalangle AOB| = 60°$. Na kratším oblouku AB zvolme bod M. Dokažte, že spojnice středů úseček BM a AO je kolmá na spojnici středů úseček AM a BO. *(Martina Vaváčková)*

Řešení:



Označme r polomer kružnice a body S_1, S_2, S_3, S_4 postupne stredy úsečiek OA, AM, MB, BO. Pretože $|\sphericalangle AOB| = 60°$ a $|AO| = |OB| = r$, trojuholník ABO je rovnostranný. Preto aj $|AB| = r$. Uvažujme rovnoľahlosť so stredom v bode O a koeficientom $1/2$, bod A sa zobrazí na S_1, bod B na S_4. A teda $|S_1S_4| = |AB|/2 = r/2$. Analogicky rovnoľahlosť so stredom v bode M a koeficientom $1/2$ nám zobrazí úsečku AB na S_2S_3, rovnoľahlosť so stredom v bode A a koeficientom $1/2$ zobrazí úsečku OM na S_1S_2 a konečne rovnoľahlosť so stredom v bode B a koeficientom $1/2$ zobrazí úsečku OM na S_3S_4. Dostávame

$$|S_1S_4| = |S_2S_3| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}|OM| = |S_1S_2| = |S_3S_4|.$$

Štvoruholník $S_1S_2S_3S_4$ je teda kosoštvorec a v kosoštvorci sú uhlopriečky na seba vždy kolmé.

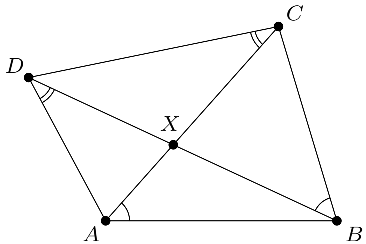
Poznámky:
Na úlohu sa dalo nahliadnuť viacerými spôsobmi, či už pomocou podobných trojuholníkov, alebo stredných priečok, ako to robila väčšina z vás. Našlo sa aj pár riešiteľov, ktorí úlohu (vy)riešili pomocou nejakých iných metód, uhlením, prípadne s využitím zhodných zobrazení. Takéto riešenia boli však väčšinou dvakrát dlhšie. Nakoniec pripomínam, že búšiť analytikou do takéhoto roztomilého príkladíku je priam barbarstvo, a každý, kto tak koná, mal by sa nad sebou zamyslieť ;-) *(Marta Kossaczká)*

Úloha 5.

(69; 49; 3,45; 5,0)

Pepa si nakreslil konvexní čtyřúhelník $ABCD$, v němž současně platilo $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle CAB|$ a $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ADB|$. Dokažte, že z úseček AC, AD a BC se mu podaří sestavit pravoúhlý trojúhelník. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:
Označme X průsečík úhlopříček konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Protože je čtyřúhelník konvexní, leží bod X uvnitř úsečky AC, platí tedy rovnost $|AX| + |CX| = |AC|$.



Trojúhelníky ABC a BXC jsou podobné, protože podle zadání platí $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CBD|$ a vnitřní úhel u vrcholu C mají společný. Z podobnosti plyne:

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|XC|}{|BC|}, \quad \text{neboli} \quad |BC|^2 = |AC| \cdot |XC|.$$

Obdobně i trojúhelníky CDA a DXA jsou podobné, protože podle zadání platí $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ADB|$ a mají společný úhel u vrcholu A. Z podobnosti plyne:

$$\frac{|DA|}{|CA|} = \frac{|XA|}{|DA|}, \quad \text{neboli} \quad |DA|^2 = |CA| \cdot |XA|.$$

Sečtením těchto dvou rovností dostaneme:

$$|AD|^2 + |BC|^2 = |AC| \cdot (|XC| + |XA|) = |AC|^2.$$

Délky úseček AC, AD a BC splňují podmínku obrácené Pythagorovy věty, a proto z nich lze sestrojit pravoúhlý trojúhelník.

Alternativní přístup:
Místo podobnosti trojúhelníků můžeme také využít úsekového úhlu a z $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CBD|$ vyvodit, že CB je tečna ke kružnici opsané trojúhelníku AXB. Mocnost bodu C k této kružnici pak dává kýženou rovnost $|BC|^2 = |AC| \cdot |XC|$. Obdobně samozřejmě i pro druhou dvojici stejně velkých úhlů.

Poznámky:
Většina řešení byla v pořádku, ale občas bych ocenil větší množství slovního popisu. Někteří řešitelé končili tím, že ukázali rovnost $|AD|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$, ale už nezdůvodnili, proč je tím pádem úloha vyřešena. Nejvíce mě zklamalo, že se našlo i několik řešitelů, kteří nepochopili zadání a místo obecného důkazu řešili nějaký jeden konkrétní případ (obvykle pro čtverec).

(Martin Töpfer)

Úloha 6.

(42; 25; 2,57; 4,0)

Je dán lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a ACD označme postupně O_1 a O_2, průsečík přímek AD a BC označme E. Dokažte, že přímky EO_1 a EO_2 jsou osově souměrné podle osy úhlu AEB. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:
BÚNO můžeme předpokládat, že $|AB| > |CD|$; rovnost nastat nemůže, jelikož při ní by neexistoval bod E, a při opačné nerovnosti provedeme přeznačení.

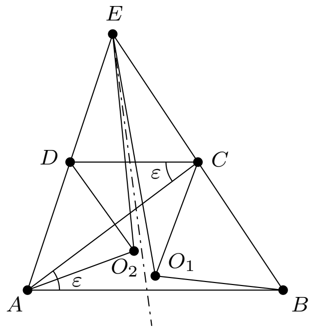
Díky rovnoběžnosti AB a CD platí $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACD|$, označme velikost tohoto úhlu ε. Je-li $\varepsilon = 90°$, pak jsou trojúhelníky ABC, ABD pravoúhlé a $O_1 \in EB$, $O_2 \in EA$, tvrzení ze zadání tedy triviálně platí. Předpokládejme dále, že tomu tak není, tedy $\varepsilon \neq 90°$, $O_1 \notin EB$ a $O_2 \notin EA$.

Úhel BO_1C je (vzhledem ke kružnici opsané trojúhelníku ABC) středovým úhlem s příslušným obvodovým úhlem BAC, v tomtéž vztahu jsou i úhly AO_2D a ACD. Protože zmiňované obvodové úhly mají stejnou velikost ε, mají stejnou velikost i středové úhly, neboli $|\sphericalangle BO_1C| = |\sphericalangle AO_2D|$. Z téhož důvodu také platí, že úhly BO_1E, AO_2E jsou vždy opačně orientované – oba jsou buď vně úhlu AEB (pokud $\varepsilon > 90°$), nebo do něj oba zasahují (pokud $\varepsilon < 90°$). Díky tomu nám pro důkaz osové souměrnosti přímek EO_1, EO_2 podle osy úhlu AEB stačí ukázat $|\sphericalangle BO_1E| = |\sphericalangle AO_2E|$.

Předně si všimněme, že trojúhelníky BO_1C, AO_2D jsou oba rovnoramenné se stejně velkými úhly proti základně, jsou tedy podobné (*sus*) a je $|\sphericalangle EBO_1| = |\sphericalangle CBO_1| = |\sphericalangle DAO_2| = |\sphericalangle EAO_2|$. Dále jsou podobné i trojúhelníky EAB a EDC (díky $AB \parallel CD$), takže $|EA| : |EB| = |ED| : |EC|$; označíme tento poměr k. Ještě si všimneme, že

$$\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|EA| - |ED|}{|EB| - |EC|} = \frac{k \cdot |EB| - k \cdot |EC|}{|EB| - |EC|} = k,$$

ovšem díky podobnosti $\triangle BO_1C$ a $\triangle AO_2D$ máme také $|AO_2| : |BO_1| = |AD| : |BC| = k$. Trojúhelníky EAO_2 a EBO_1 jsou tedy podobné dle věty *sus*, z čehož dostáváme požadovanou rovnost $|\sphericalangle BO_1E| = |\sphericalangle AO_2E|$.



Poznámky:

Úloha nebyla nijak zvlášť obtížná, ale velká většina řešitelů získala pouhé čtyři body kvůli přílišnému upnutí k jedné konfiguraci bodů A, B, C, D, typicky k takové, jako je znázorněna na obrázku výše. Poté se jali víceméně správně dokazovat rovnost $|\sphericalangle BO_1E| = |\sphericalangle AO_2E|$, ovšem již nezdůvodnili, že tyto úhly jsou opačně orientované, bez čehož požadovanou osovou souměrnost ještě dokázanou nemáme. S případem $\varepsilon = 90°$ si taky nikdo příliš hlavu nelámal, ačkoliv v této situaci je velmi ošemetné argumentovat trojúhelníkem EBO_1 a podobnými (pro takovéto „trojúhelníky" např. neplatí věta *uu*). Pouze *František Couf* a *Martin Raszyk* podali dostatečně důkladný rozbor situace, čímž si vysloužili plný počet bodů. Konečně *Antonín Češík* a *Miroslav Stankovič* poslali zajímavé řešení využívající geometrických zobrazení, čímž se výše provedeným diskusím elegantně vyhnuli a vysloužili si $+i$. *(Alexander „Olin" Slávik)*

Úloha 7.

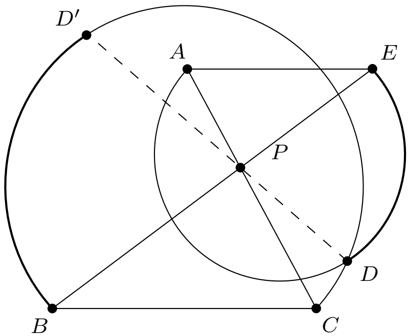
(34; 15; 2,18; 1,0)

Konvexní pětiúhelník $ABCDE$ má strany AE a BC rovnoběžné a pro jeho vnitřní úhly platí $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle BDC|$. Označme P průsečík úhlopříček AC a BE. Dokažte, že $|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle BDP|$ a $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle ADP|$. *(Alča Skálová)*

Řešení:

Stačí ukázat $|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle BDP|$, druhá rovnost se dokáže analogicky prohozením bodů A a B a bodů E a C.

Úsečky AE a CB jsou rovnoběžné a opačně orientované, proto existuje záporná stejnolehlost se středem v P, která zobrazí A na C a E na B. Díky rovnosti $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle BDC|$ a tomu, že bod D leží mezi rovnoběžkami AE, BC, se v této stejnolehlosti zobrazí oblouk EDA na oblouk BDC.



Dále obraz bodu D označme D', pak body D, P, D' leží na jedné přímce a podoblouk ED se ve stejnolehlosti zobrazí na podoblouk BD'. Těmto podobloukům proto odpovídají stejné obvodové úhly, a tak $|\sphericalangle BDD'| = |\sphericalangle AED|$, což jsme chtěli dokázat. Ještě dodejme, že bod D neleží na podoblouku BD', protože leží v opačné polorovině určené přímkou EB.

Poznámky:

Řešení se v zásadě dělila na dva typy – víceméně vzorová (za 5 bodů) a ta, co tvrdila, že takový pětiúhelník nutně musí být osově souměrný (za 0 bodů). Pak ještě dorazilo několik delších řešení pomocí sinových vět. Žádné z nich se ale nedokázalo dobře popasovat se skutečností, že funkce kosinus není prostá, za což jsem strhával jeden bod. *(Mirek Olšák)*

Úloha 8.

(27; 13; 2,30; 1,0)

Osa strany AC trojúhelníku ABC protne stranu BC v bodě M. Dále nechť K je průsečík osy úhlu AMB a kratšího oblouku AB kružnice opsané trojúhelníku ABC. Dokažte, že přímka spojující středy kružnic vepsaných trojúhelníkům AMK a BMK je kolmá na osu úhlu AKB.

(Alča Skálová)

Řešení:

Trojúhelník AMC je rovnoramenný, neboť M leží na ose úsečky AC. Spolu s využitím faktu, že přímka MK je osa úhlu AMB, dostáváme:

$$|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle CMA|) = \frac{1}{2}|\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle AMK| = |\sphericalangle BMK|.$$

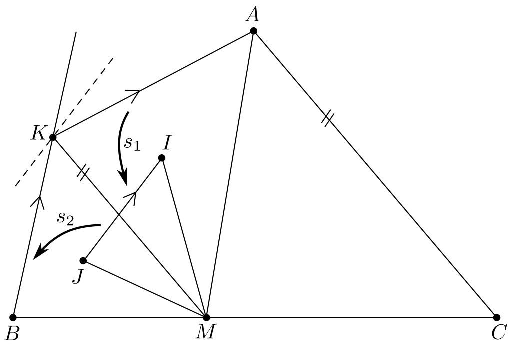
Z rovnosti $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle BMK|$ plyne rovnoběžnost přímek AC a MK.

Nyní ukážeme, že trojúhelníky AMK a KMB jsou podobné pomocí věty *uu*. Jak již víme, platí $|\sphericalangle AMK| = |\sphericalangle BMK|$. Druhou rovnost úhlů dostaneme takto:

$$\begin{aligned}|\sphericalangle KBM| = 180^\circ - |\sphericalangle KAC| = 180^\circ - |\sphericalangle KAM| - |\sphericalangle MAC| = \\ = 180^\circ - |\sphericalangle KAM| - |\sphericalangle AMK| = |\sphericalangle AKM|.\end{aligned}$$

(V první rovnosti jsme využili, že čtyřúhelník $AKBC$ je tětivový.)

Označme I (resp. J) střed kružnice vepsané trojúhelníku AMK (resp. KMB). Protože $\triangle AMK$ a $\triangle KMB$ jsou podobné, jsou také podobné trojúhelníky AMI a KMJ. Z toho plyne $|AM| : |IM| = |KM| : |JM|$. Zároveň platí, že I (resp. J) leží na ose úhlu AMK (resp. KMB), a proto $|\sphericalangle IMJ| = |\sphericalangle IMK| + |\sphericalangle KMJ| = (|\sphericalangle AMK| + |\sphericalangle KMB|)/2 = |\sphericalangle AMK|$, takže spolu s rovností poměrů délek stran dostáváme, že $\triangle IMJ$ je také podobný trojúhelníkům AMK a KMB.



Uvažme spirální podobnost[2] s_1 (resp. s_2) zobrazující trojúhelník AMK (resp. IMJ) na podobný trojúhelník IMJ (resp. KMB) se středem v M a úhlem otočení AMI (resp. KMJ). Protože $|\sphericalangle AMI| = |\sphericalangle KMJ|$, mají úhly otočení s_1 a s_2 stejnou velikost. Pro spirální podobnost platí, že (orientovaný) úhel mezi přímkou a jejím obrazem je roven úhlu příslušného otočení. To v našem případě znamená, že orientované[3] přímky KA a JI svírají stejný orientovaný úhel (AMI dle s_1) jako orientované přímky JI a BK (KMJ dle s_2). Přímka JI je proto rovnoběžná s osou úhlu mezi orientovanými přímkami BK a KA. Konečně tato osa úhlu je kolmá na osu vedlejšího úhlu – tedy úhlu BKA. Přímka IJ je tak kolmá na osu úhlu BKA, což jsme chtěli dokázat.

[2] Spirální podobnost je složení stejnolehlosti a otočení podle stejného středu.

[3] U orientovaných přímek bereme v potaz pořadí vrcholů, které ji udávají. Například orientovaná přímka KA je „jiná“ (opačná) než orientovaná přímka AK.

Poznámky:
Sešlo se 26 řešení, z toho 12 bylo dobře. Správná řešení většinou využívala počítání úhlů a posléze nějakou variantu spirální podobnosti. Elegancí při použití spirální podobnosti vynikla řešení *Eduarda Batmendijna* a *Miroslava Psoty*, za což si jmenovaní vysloužili $+i$. Další $+i$ dostal *Jakub Svoboda* za velmi odlišný přístup využívající „mrkvovo-salámové“ a „Bismarckovo“ lemma, neboli originálně pojmenované úvahy o Švrčkově bodu.[4] *Radovan Švarc* ve svém řešení využíval dokonce kruhovou inverzi. Nesprávná řešení obvykle obsahovala pouze jeden konkrétní příklad v podobě obrázku, byť pečlivě narýsovaného, případně nějaká pozorování, která ale nebyla dostatečně odůvodněná. *(Pepa Svoboda)*

[4] Švrčkův bod příslušející vrcholu A v trojúhelníku ABC je střed oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, neobsahujícího bod A.

Funkce

3. PODZIMNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(91; 89; 2,86; 3,0)

Z jednoho znaku x, tří jedniček, tří minusů a čtyř svislých čar (tj. symbolů použitelných pro zápis absolutní hodnoty) složte výraz, jehož hodnota je nulová pro alespoň čtyři reálná čísla x. *(Anička Doležalová)*

ŘEŠENÍ:
Myšlenka úlohy spočívá v tom, že do sebe vnoříme dvě absolutní hodnoty. Příkladem řešení je funkce $f(x) = ||x| - 1 - 1| - 1$, která je nulová pro $x = \pm 1$ a $x = \pm 3$.

POZNÁMKY:
U této úlohy mě překvapila invence některých řešitelů, kteří se snažili část znaků umístit do exponentu. Bohužel si často neuvědomili, že 0^0 nemá definovanou hodnotu, a tak nalezené funkce neměly za definiční obor všechna reálná čísla. Objevilo se ale i několik řešitelů, kterým se povedlo najít funkci identicky rovnou nule. Příkladem takové funkce je $f(x) = |-1^1| - |-1^x|$.

(Martin Töpfer)

Úloha 2.

(49; 42; 2,49; 3,0)

Nalezněte nekonstantní funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že funkce $f(2x)$ a $(f(x))^2$ jsou periodické a mají stejnou nejkratší periodu. *(Martin Sýkora)*

PRVNÍ ŘEŠENÍ:
Definujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ celá sudá,} \\ -1 & \text{pro } x \text{ celá lichá,} \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Tato f je tedy dobře definována na $\mathbb{R}$. Ukážeme, že $f(2x)$ a $(f(x))^2$ jsou periodické a mají stejnou nejkratší periodu.

$$f(2x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ celá,} \\ -1 & \text{pro } x = \frac{k}{2}, \text{ kde } k \text{ je liché,} \\ 0 & \text{pro ostatní } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Tedy $f(2x)$ je periodická a má nejkratší periodu rovnu jedné.

$$(f(x))^2 = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Tedy $(f(x))^2$ má nejkratší periodu také rovnu jedné.

Funkce $f(2x)$ a $(f(x))^2$ jsou periodické a mají stejnou nejkratší periodu, proto je zvolená f řešením úlohy.

Druhé řešení:

Ukážeme, že pro $f(x) = \sin(x)$ mají funkce $f(2x)$ a $(f(x))^2$ stejnou nejkratší periodu. Protože funkce $\sin(x)$ má nejkratší periodu 2π, pro funkci $\sin(2x)$ je to π. Nyní určíme nejkratší periodu funkce $\sin^2(x)$.

Platí $\sin x = -\sin(x+\pi)$, tedy $\sin^2(x) = \sin^2(x+\pi)$, proto π je perioda funkce $\sin^2 x$. Pro $x \in (0,\pi)$ platí, že $\sin x \neq 0$, tedy také $\sin^2 x \neq 0$, ale $\sin^2(0) = 0$, proto π je nejkratší perioda funkce $\sin^2 x$.

Tedy funkce $\sin(2x)$ a $\sin^2 x$ jsou periodické a mají stejnou nejkratší periodu, proto $f(x) = \sin x$ je řešením úlohy.

Poznámky:

Drtivá většina řešitelů volila $f(x) = \sin x$, ale ne všichni úspěšně ukázali, že skutečně $\sin(2x)$ a $\sin^2 x$ mají stejnou nejkratší periodu. O tom ale přece byla tahle úloha – vybrat si takovou f, u které umím ukázat nejen jaká je perioda $f(2x)$ a $(f(x))^2$, ale dokonce jaká je nejkratší perioda těchto funkcí. Z tohoto hlediska se mi první vzorové řešení zdá mnohem snazší, je to na něm totiž opravdu „vidět“. *(Michaela „Míša“ Hubatová)*

Úloha 3.

(52; 34; 1,96; 2,0)

Jsou dány ryze[5] *monotónní funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že funkce $f(g(x))$ je rostoucí. Dokažte, že funkce $g(f(x))$ je rovněž rostoucí.* (David Hruška)

Řešení:

Funkce f, g jsou podle zadání ryze monotónní, čili každá z nich je buď rostoucí, nebo klesající. Předpokládejme nejprve, že g je klesající. Vezměme si dvě libovolná reálná čísla x_1, x_2 splňující $x_1 < x_2$. Z předpokladu a definice klesající funkce plyne $g(x_1) > g(x_2)$. Ze zadání víme, že $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$. Pokud by f byla rostoucí, platila by poslední nerovnost obráceně, čili f musí být klesající funkcí (víme už, že je rostoucí, nebo klesající). Potom již dvojím použitím definice klesající funkce pro každá dvě reálná $x_1 < x_2$ dostáváme $f(x_1) > f(x_2)$, a následně $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$, což znamená, že složená funkce $g(f(x))$ je opravdu rostoucí, jak jsme měli dokázat.

Pokud je g rostoucí, dostaneme stejným postupem jako v prvním případě pro každá dvě reálná $x_1 < x_2$ nerovnost $g(x_1) < g(x_2)$. To spolu s $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$ znamená, že f nemůže být klesající, proto je rostoucí. Opět tedy dostáváme $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$, čili $g(f(x))$ je rostoucí funkce.

Poznámky:

Úloha byla jednoduchá, přesto byla zhruba polovina řešení zmatených nebo vyloženě scestných. Někteří z vás si správně všimli, že se monotónní funkce při skládání chovají jako násobení kladných/záporných čísel (známá pravidla typu „minus krát minus je plus“), ale místo důkazu tato „odpozorovaná“ pravidla jen používali. Jádrem úlohy byla právě manipulace s definicemi rostoucích a klesajících funkcí, takže za prohlašování těchto pravidel za zřejmá jsem bod(y) strhával. Několik řešitelů se také pokoušelo úlohu derivovat (v PraSeti se důrazně nedoporučuje) a bohužel došlo i na klasický přístup – ověření tvrzení pro jednu konkrétní dvojici funkcí, což přesně v úlohách typu „Dokažte …“ od řešitelů nechceme, ale o tom bylo již řečeno a napsáno dost. Na druhou stranu přišlo i mnoho správných a stručných řešení, nad kterými jsem si spravil náladu. *(David Hruška)*

[5] O funkci řekneme, že je ryze monotónní, pokud je rostoucí nebo klesající.

Úloha 4.

(60; 48; 3,93; 5,0)

Je dána funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující současně následující dvě podmínky:

(i) *Pro každá dvě nesoudělná*[6] *kladná celá čísla a, b platí $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$.*
(ii) *Pro každá dvě (ne nutně různá) prvočísla p, q platí $f(p + q) = f(p) + f(q)$.*

Dokažte, že $f(3) = 3$. *(Filip Hlásek)*

Řešení:

Předpokládejme, že f je funkce vyhovující podmínkám v zadání. Speciálně tedy splňuje podmínku (i) pro nesoudělná $a = 2$, $b = 3$:

$$f(6) = f(3 \cdot 2) = f(3) \cdot f(2).$$

Zároveň pro funkci f platí podmínka (ii) pro prvočísla $p = 3$, $q = 3$:

$$f(6) = f(3 + 3) = f(3) + f(3) = 2f(3).$$

Vydělením předchozích dvou rovností získáváme $f(2) = 2$ (všechny členy jsou přirozená čísla).

Dále využijeme platnosti první podmínky pro nesoudělná $a = 3$, $b = 4$:

$$f(12) = f(3 \cdot 4) = f(3) \cdot f(4).$$

Poté několikrát použijeme druhou podmínku pro prvočísla 2, 3, 5, 7 a dosadíme předem zjištěné hodnoty. Tím získáme

$$\begin{aligned} f(4) &= f(2 + 2) = f(2) + f(2) = 4,\\ f(5) &= f(2 + 3) = f(2) + f(3) = 2 + f(3),\\ f(7) &= f(2 + 5) = f(2) + f(5) = 4 + f(3),\\ f(12) &= f(5 + 7) = f(5) + f(7) = 6 + 2f(3). \end{aligned}$$

Důkaz dokončíme srovnáním hodnoty $f(12)$:

$$\begin{aligned} f(3)f(4) &= 6 + 2f(3),\\ 4f(3) &= 6 + 2f(3),\\ f(3) &= 3. \end{aligned}$$

Poznámky:

Úloha vypadala na první pohled poměrně jednoduše, ale když do ní člověk zkusil něco dosadit, brzy zjistil, že zrovna hodnotu $f(3)$ není snadné vyjádřit. V podstatě všechna správná řešení se k výsledku dopracovala stejně jako v tom autorském za použití hodnoty $f(12)$. Bez chyby bylo také jedno, které mimo jiné používalo $f(11)$, $f(13)$, $f(19)$, $f(20)$ a $f(22)$.

Mnoho řešitelů si také správně povšimlo, že lze snadno ukázat $f(1) = 1$. Tohoto poznatku ale není možné v dalším řešení nijak použít a je potom vcelku zbytečné to do čistopisu vůbec psát.

Řešení, která nedostala plný počet bodů, se dají rozdělit do dvou skupin. První část se mě snažila (ať už úmyslně či neúmyslně) přesvědčit, že číslo 1 je prvočíslo, což bohužel není pravda. V jiné úloze by to nebyl takový problém, ale v této se jednalo o neúměrné zjednodušení, které zadaný problém činilo triviálním.

[6] Dvě celá čísla jsou *nesoudělná*, jestliže je jejich největší společný dělitel roven jedné.

Druhá častá chyba byla, že se někteří zaměřili pouze na jednu podmínku ze zadání (např. (i)) a tvrdili, že jí vyhovuje pouze značně omezená množina funkcí (např. $f(x) = k \cdot x^n$). To lze poté snadno dosadit do druhé z podmínek a ověřit, že jediná vyhovující funkce je $f(x) = x$. Úloha by takto byla jednoduchá a takové tvrzení obecně neplatí (náš příklad vyvrací funkce $f(x) = 2^{\text{počet\_prvočísel\_v\_rozkladu}(x)}$).

Kdo se nad úlohou zamýšlel dále, jistě ho napadlo zjistit, zda existuje i jiná funkce než očividná $f(x) = x$, která by vyhovovala podmínkám v zadání. Pokusme se společně dokázat, že jiná taková funkce neexistuje.

Při důkazu použijeme Goldbachovu hypotézu, která dodnes není dokázána, očekává se ale, že je platná. Pokud však neplatí, tak ani zmíněný důkaz nefunguje. Tvrzení říká, že každé sudé přirozené číslo větší než dva lze zapsat jako součet dvou prvočísel. Díky tomuto snadnému a pochopitelnému znění se hypotéza stala jedním z nejznámějších otevřených problémů, jehož rozřešením se stále můžete proslavit.

Postupujme matematickou indukcí. Použitím autorského řešení úlohy bychom pro všechna přirozená $x \leq 12$ ukázali $f(x) = x$. Dále předpokládejme, že pro přirozené $n \geq 6$ platí, že pro všechna přirozená $x \leq 2n$ je $f(x) = x$. Ukážeme, že $f(2n + 1) = 2n + 1$ a $f(2n + 2) = 2n + 2$ rozborem případů.

(1) $2n + 1$ není žádná přirozená mocnina lichého prvočísla. Potom lze rozložit na součin dvou nesoudělných celých čísel a, b menších než $2n+1$, takže za použití (i) a indukčního předpokladu $f(2n + 1) = f(ab) = f(a)f(b) = ab = 2n + 1$.

(2) $2n + 1$ je prvočíslo. Potom jedno ze sudých čísel $2n + 4$ a $2n + 6$ není mocninou čísla 2 a lze tedy rozložit na součin nesoudělných celých čísel větších než 1 a menších než $2n$. Použitím (i) a indukčního předpokladu dostáváme, že pro toto číslo x platí $f(x) = x$ a důkaz indukčního kroku získáme buď použitím prvočísla 3, nebo 5 společně s $2n + 1$ v podmínce (ii). Všimněte si, že tento postup navíc funguje pro všechna prvočísla p taková, že $\frac{p+5}{2} \leq 2n$, neboli $p \leq 4n - 5$.

(3) $2n + 1$ je přirozená mocnina lichého prvočísla (alespoň druhá). Potom je podle předchozího bodu pro všechna prvočísla $p \leq 4n - 5$ pravda $f(p) = p$. Kdybychom ukázali, že $f(4n + 2) = 4n + 2$, tak máme vyhráno, neboť by stačilo použít (i) pro nesoudělná $2n + 1$ a 2. Podle Goldbachovy hypotézy lze $4n + 2$ zapsat jako součet dvou prvočísel. Pokud jsou obě tato prvočísla menší nebo rovna $4n - 5$, tak stačí využít (ii). Problém ale nastává, když jedno z nich je rovno 3 nebo 5.

Nechť tedy $p = 4n - 3$ je prvočíslo ($p + 5$ je potom $4n + 2$). Aspoň jedno z čísel $p+7 = 4(n+1)$, $p+11 = 4(n+2)$ není mocninou dvojky. Označíme ho x a díky tomu, že ho lze rozložit na součin dvou nesoudělných celých čísel, která nejsou větší než $2n$, tak pomocí (i) dokážeme z indukčního předpokladu, že $f(x) = x$. Z (ii) již poté snadno plyne $f(p) = p$ a dále $f(4n+2) = 4n+2$, což jsme chtěli ukázat. Případ $4n+2 = p+3$ rozebereme analogicky (použijeme $p + 5$ a $p + 13$). Povšimněte si, že jsme vždy volili taková čísla, která byla dělitelná čtyřmi a šla tedy rozložit na součin dostatečně malých činitelů (nejvýše $\frac{4n+12}{3} \leq 2n$, pro $n \geq 6$, což jsme předpokládali).

To, že platí $f(2n + 2) = 2n + 2$, dokážeme opět snadno pomocí Goldbachovy hypotézy. Tím jsme dokázali úvodní výrok také pro $n + 1$, z principu matematické indukce tak plyne platnost tvrzení.

(Filip Hlásek)

Úloha 5.

(61; 47; 2,70; 3,0)

Najděte všechna reálná čísla x, pro která platí[7]

$$x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor = 2001.$$

(Martin Čech)

[7] Symbol $\lfloor x\rfloor$ značí dolní celou část čísla x, tedy největší celé číslo nepřevyšující x.

Riešení:

Jediným riešením je $x = 2001/286$. Aby sme toto mohli tvrdiť, rozoberme si priebeh funkcie $f(x) = x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor$. Ukážeme, že f je na intervale $(-1,1)$ nulová, na $\langle 1,\infty)$ rastie a na $(-\infty,-1\rangle$ klesá.

Interval $(-1,1)$ si ešte rozdelíme na dva intervaly: $(-1,0)$ a $\langle 0,1)$. Pre každý z intervalov $(-1,0)$, $\langle 0,1)$, $\langle 1,\infty)$ a $(-\infty,-1\rangle$ dokážeme jeho uvedenú vlastnosť zvlášť.

$$\begin{aligned} x &\in (-1,0), \\ -x &\in (0,1), \\ \lfloor x\rfloor &= -1, \\ x\lfloor x\rfloor &= -x, \\ \lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor &= 0, \\ x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor &= 0 = f(x), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &\in \langle 0,1), \\ \lfloor x\rfloor &= 0, \\ x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor &= 0 = f(x). \end{aligned}$$

Takže sme ukázali, že na $(-1,1)$ je $f(x) = 0$, na tomto intervale teda $f(x) = 2001$ riešenie určite nemá.

Ďalej ukážeme, že f je na $\langle 1,\infty)$ rastúca a na $(-\infty,-1\rangle$ klesajúca. Majme teda $x > y$ z intervalu $\langle 1,\infty)$, resp. $(-\infty,-1\rangle$, potom platí:

$$\begin{aligned} x > y &\geq 1, \\ \lfloor x\rfloor \geq \lfloor y\rfloor &\geq 1, \\ x\lfloor x\rfloor > y\lfloor y\rfloor &\geq 1, \\ \lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor \geq \lfloor y\lfloor y\rfloor\rfloor &\geq 1, \\ x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor > y\lfloor y\lfloor y\rfloor\rfloor &\geq 1, \\ \lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor \geq \lfloor y\lfloor y\lfloor y\rfloor\rfloor\rfloor &\geq 1, \\ x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor > y\lfloor y\lfloor y\lfloor y\rfloor\rfloor\rfloor &\geq 1, \\ f(x) &> f(y), \end{aligned} \quad \text{resp.} \quad \begin{aligned} y < x &\leq -1, \\ \lfloor y\rfloor \leq \lfloor x\rfloor &\leq -1, \\ y\lfloor y\rfloor > x\lfloor x\rfloor &\geq 1, \\ \lfloor y\lfloor y\rfloor\rfloor \geq \lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor &\geq 1, \\ y\lfloor y\lfloor y\rfloor\rfloor < x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor &\leq -1, \\ \lfloor y\lfloor y\lfloor y\rfloor\rfloor\rfloor \leq \lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor &\leq -1, \\ y\lfloor y\lfloor y\lfloor y\rfloor\rfloor\rfloor > x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor &\geq 1, \\ f(y) &> f(x). \end{aligned}$$

Teda f je skutočne na intervale $(-\infty,-1\rangle$ klesajúca a na $\langle 1,\infty)$ rastúca, a preto na každom z týchto intervalov môže mať rovnica $f(x) = 2001$ maximálne jedno riešenie. Na $\langle 1,\infty)$ ho skutočne má: $x = 2001/286$.

Ukážeme ďalej, že na intervale $(-\infty,-1\rangle$ rovnica $f(x) = 2001$ riešenie nemôže mať. Pre spor predpokladajme, že existuje $x \in (-\infty,-1\rangle$ také, že $f(x) = 2001$. Číslo $z = \lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor$ je záporné a celé. Podelením rovnice $f(x) = 2001$ týmto číslom dostaneme, že x môžeme zapísať v tvare $x = 2001/z$.

Platí ale $f(-2001/303) \doteq 2007{,}6 > 2007$ a $f(-2001/304) \doteq 1994{,}4 < 1995$. Teda keby $z \geq -303$, máme $x = 2001/z \leq -2001/303$, a teda z klesania f vieme, že $f(x) > 2007 > 2001$, čo je spor s $f(x) = 2001$. Keby naopak $z \leq -304$, platilo by $x \geq -2001/304$, a teda $f(x) < 1995 < 2001$, čo je opäť spor. Rovnici $f(x) = 2001$ preto nevyhovuje žiadne záporné x a riešením je naozaj jedine $x = 2001/286$.

Poznámky:

Vo väčšine správnych riešení ste postupovali ako my. Medzi častými chybami bolo, že ste nedokázali, že riešení nemôže byť viac, síce ste túto skutočnosť ticho prepokladali a nejaké riešenie medzi 6 a 7 ste našli. V lepšom prípade ste aspoň ukázali, že na tomto intervale žiadne ďalšie riešenie byť nemôže, ale väčšinou ste sa moc nepokúšali dokázať, prečo by inde (na kladných číslach) nemohlo byť ďalšie riešenie (a podobne na záporných). Zopár riešiteľov dokonca „našlo“ aj záporné riešnie. *(Marta Kossaczká)*

Úloha 6.

(36; 31; 3,58; 4,0)

Pro daná dvě celá čísla p, q uvažme kvadratickou funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ určenou předpisem

$$f(x) = x^2 + px + q.$$

Řekneme, že celé číslo t je dobré, jestliže čísla $f(t)$ a $f(t+1)$ jsou různá a jedno je násobkem druhého. Dokažte, že je-li počet dobrých čísel konečný, pak je sudý. *(Martin „E.T.“ Sýkora)*

Řešení:

Nejprve si uvědomme, že graf funkce f je parabola s vrcholem v bodě $-p/2$, která je osově souměrná podle osy $x = -p/2$. Proto můžeme nabýt podezření, že pokud bude nějaké dobré číslo na jednom rameni paraboly, bude nějaké jiné i na tom druhém, a tedy že je počet dobrých čísel sudý. V následujících řádcích tuto ideu formálně dokážeme.

Povšimněme si, že pro všechna reálná čísla x platí $f(x) = f(-x-p)$. Dosazením $x+1$ a $(-p-1)/2$ za x dostáváme rovnosti $f(x+1) = f(-x-p-1)$ a $f((-p-1)/2) = f((-p-1)/2+1)$. Z druhé z nich vyplývá, že číslo $(-p-1)/2$ není dobré (je-li vůbec celé).

Ostatní celá čísla (bez $(-p-1)/2$, pokud by bylo celé) pak popárujeme takovým způsobem, že v každé dvojici jsou čísla a a b právě tehdy, je-li jejich součet $-p-1$. Protože je $-p-1$ celé číslo, je toto párování korektní, neboť každému celému číslu a do dvojice skutečně přiřadí celé číslo b různé od a. Z již dříve objevených rovností $f(x) = f(-x-p)$ a $f(x+1) = f(-x-p-1)$ dosazením a za x pak vyplývá, že číslo a je dobré právě tehdy, když $b = a-p-1$ je dobré.

V každém páru tak buď obě čísla jsou, nebo obě čísla nejsou dobrá. Jiná čísla být dobrými nemohou, a tak je počet všech dobrých čísel – za předpokladu, že je konečný – sudý.

Poznámky:

Většina došlých řešení více či méně kopírovala vzorové řešení. Řešitelé se snažili najít párování dobrých čísel a většinou volili správný postup. Bohužel ale velice často chyběla diskuse kolem čísla $(-p-1)/2$. Mnoho řešitelů opomnělo zdůvodnit, že nalezená „dobrá čísla“ jsou celá, což byla jedna z podmínek v zadání. Za tyto a podobné nešvary jsem strhával podle závažnosti jeden až dva body.

Několik řešitelů také argumentovalo tím, že na množině dobrých čísel (označme si ji χ) nalezli bijekci. To je sice jedna ze správných cest ke správnému řešení, ale ještě je třeba dodat, že daná bijekce je symetrická (tedy se rovná svému inverzu) a že každému prvku přiřadí nějaký jiný prvek. Pokud toto nezmíníte, může být bijekcí například cyklická záměna nebo dokonce identita, které počet prvků množiny χ nijak neomezují.

Vzhledem k tomu, že chybovali i zdatní řešitelé, dovolím si k bijekci přidat ještě pár slov. Pokud naleznete bijekci mezi dvěma množinami Ω a Ψ, znamená to, že obě množiny mají stejný počet prvků. Nalezením bijekce na jedné množině (tedy z Ω na Ω) jen ukážete, že $|\Omega| = |\Omega|$, což je ale triviálně zřejmé, takže nic takového ukazovat nemusíte. Ve skutečnosti bijekce existuje na každé množině – například výše zmíněná identita – takže objevením nějaké bijekce nezískáte informaci žádnou. *(Martin „E.T.“ Sýkora)*

Úloha 7.

(38; 29; 3,11; 3,0)

Rozhodněte, zda lze funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ určenou předpisem $f(x) = x^2$ zapsat jako součet dvou periodických funkcí. *(Alexander „Olin“ Slávik)*

Řešení:

Dokážeme sporem, že tvrzení ze zadání neplatí. Předpokládejme, že existují periodické funkce $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $g(x) + h(x) = x^2$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, přičemž h má periodu $p \neq 0$.

Předpokládanou identitu přepíšeme na $h(x) = x^2 - g(x)$. Z periodičnosti h dostáváme pro všechna $x \in \mathbb{R}$ rovnost

$$\begin{aligned} h(x) &= h(x+p), \\ x^2 - g(x) &= (x+p)^2 - g(x+p), \\ g(x+p) - g(x) &= 2xp + p^2. \end{aligned}$$

Jelikož je g periodická funkce, je periodická i funkce daná předpisem $g(x+p) - g(x)$. To je však spor, protože $2xp + p^2$ není pro $p \neq 0$ periodickou funkcí.

Poznámky:

Přibližně polovina došlých řešení byla správně, přičemž většina z nich postupovala dosazováním hodnot 0, p, q, $p+q$ do identity $g(x) + h(x) = x^2$, kde p, resp. q je periodou g, resp. h. Výše uvedený postup je jen stručnější variací na tuto metodu. Autoři chybných řešení se zpravidla odvolávali na neplatná tvrzení o periodických funkcích – např. že musí být omezené či že jejich sčítáním dostaneme opět periodickou funkci.[8]

Ve skutečnosti jakékoliv řešení, které dostatečně nevyužívalo vlastností funkce x^2, bylo předem odsouzeno k nízkému bodovému zisku, neboť identickou funkci $i(x) = x$ jako součet dvou periodických překvapivě napsat lze. Pro zajímavost si nastíníme konstrukci oněch funkcí.

Zvolme libovolné iracionální číslo α. Naším cílem bude zkonstruovat 1-periodickou funkci g takovou, že $g(x) - x$ bude α-periodická. Pro $z \in \mathbb{R}$ definujme pomocnou funkci $p_z\colon \mathbb{Z} \to \langle 0, 1)$ předpisem $p_z(n) = \{n\alpha + z\}$, kde závorkami $\{\}$ značíme zlomkovou část čísla (jako v prvním dílu seriálu). Díky iracionalitě α je p_z prostá. Ještě definujeme množinu $M_z = \{p_z(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Není těžké si rozmyslet, že pokud mají dvě takovéto množiny M_w, M_z neprázdný průnik, pak již nutně $M_w = M_z$, můžeme tedy zkonstruovat množinu reálných čísel Z takovou, že pro každé $x \in \langle 0, 1)$ bude existovat právě jedno $z_x \in Z$ takové, že $x \in M_{z_x}$. Díky této jednoznačnosti můžeme definovat naši funkci g na $\langle 0, 1)$ jako $g(x) = \alpha \cdot p_{z_x}^{-1}(x)$ a na zbytku $\mathbb{R}$ ji dodefinovat periodicky.

Z definice je g 1-periodická a pro každé $x \in \mathbb{R}$ patří čísla $\{x\}$, $\{x + \alpha\}$ do téže množiny M_z pro právě jedno $z \in Z$, je tedy

$$g(x+\alpha) = \alpha \cdot p_z^{-1}(x+\alpha) = \alpha(p_z^{-1}(x) + 1) = g(x) + \alpha,$$

neboli $g(x+\alpha) - (x+\alpha) = g(x) - x$, což jsme chtěli. *(Alexander „Olin“ Slávik)*

Úloha 8.

(19; 8; 2,42; 1,0)

Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechny čtveřice reálných čísel x, y, u, v splňujících $x + y = u + v$ platí

$$\big(f(x) - f(y)\big) \cdot (u - v) = \big(f(u) - f(v)\big) \cdot (x - y).$$

(Pepa Tkadlec)

[8] To máme zaručeno jen tehdy, je-li podíl period sčítaných funkcí racionální číslo.

Klasické řešení:
Předpokládejme, že f splňuje zadanou rovnici pro všechna x, y, u, v, pro něž platí $x+y=u+v$. Pak f tutéž rovnici splňuje pro konkrétní dosazení x, $-x$, y, $-y$, neboť to rovněž splňuje $x-x=y-y$. Pro nenulová x a y můžeme rovnici přepsat do tvaru

$$\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\frac{f(y)-f(-y)}{y},$$

odkud vidíme, že podíl $\big(f(x)-f(-x)\big)/x$ je pro nenulová x konstantní. Označme si tuto konstantu jako $2b$. Pak můžeme psát $f(x)=2bx+f(-x)$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$, neboť pro $x=0$ platí rovnost triviálně. Označme ještě $f(0)=c$ a $f(-1)=d$.

Buď nyní t libovolné reálné číslo. Proveďme dvě dosazení do původní rovnice.[9] Jest

$$\left[\tfrac{t-1}{2},\tfrac{t+1}{2},t,0\right]: \qquad \left(f\left(\frac{t-1}{2}\right)-f\left(\frac{t+1}{2}\right)\right)t=\big(f(t)-c\big)(-1),$$

$$\left[\tfrac{t-1}{2},-\tfrac{t+1}{2},-1,0\right]: \qquad -\left(f\left(\frac{t-1}{2}\right)-f\left(-\frac{t+1}{2}\right)\right)=t(d-c).$$

V druhé rovnici použijeme $f\big(-\frac{t+1}{2}\big)=-2b\frac{t+1}{2}+f\big(\frac{t+1}{2}\big)$ a pak sečteme první rovnici s t-násobkem druhé. Dostaneme

$$f(t)=(d-c+b)t^2+bt+c.$$

Protože t bylo libovolné, musí být $f(t)=at^2+bt+c$ pro každé $t\in\mathbb{R}$, kde a, b, c jsou nějaká reálná čísla nezávislá na t. Zkouškou se přesvědčíme, že všechny takové funkce zadání skutečně splňují.

Lišácké řešení:
Předpokládejme, že f je řešením zadané úlohy. Ukážeme, že f je polynom nejvýše druhého stupně, tj. že existují reálné konstanty a, b, c takové, že $f(x)=ax^2+bx+c$ pro každé reálné x.

Buď P polynom nejvýše druhého stupně splňující $P(t)=f(t)$ pro $t=0,1,2$. Ukážeme, že pak již $P(x)=f(x)$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$. Označme si $P(x)=ax^2+bx+c$. Dokažme nejprve, že pokud platí $P(t)=f(t)$ pro nějaká různá $t=x,y,u$, pak tato rovnost platí i pro $t=x+y-u$.

Volbou $t=x+y-u$ splníme rovnost $t+u=x+y$, takže tyto hodnoty lze dosadit do rovnice. Jest

$$\big(f(x)-f(y)\big)(u-t)=\big(f(u)-f(t)\big)(x-y).$$

V dalším kroku využijme předpoklad, že $f(x)=P(x)$, $f(y)=P(y)$ a $f(u)=P(u)$. Dostaneme po úpravě

$$\big(P(x)-P(y)\big)(u-t)=\big(P(u)-f(t)\big)(x-y),$$
$$\big(a(x^2-y^2)+b(x-y)\big)(u-t)=\big(au^2+bu+c-f(t)\big)(x-y).$$

Dělením (nenulovým) výrazem $x-y$ a nahrazením $x+y=u+t$ dostaneme

$$\begin{aligned}\big(a(u+t)+b\big)(u-t)&=au^2+bu+c-f(t),\\ f(t)&=a(t^2-u^2)+b(t-u)+au^2+bu+c,\\ f(t)&=at^2+bt+c=P(t),\end{aligned}$$

což jsme chtěli ukázat.

Buď nyní x libovolné reálné číslo různé od 0, 1 a dále buď Q polynom nejvýše druhého stupně splňující $f(t)=Q(t)$ pro $t=0,1,x$. Potom podle předchozího pozorování je i $f(x+1)=Q(x+1)$, neboť $x+1=1+x-0$. Stejně tak $f(2)=Q(2)$, jelikož $2=1+(x+1)-x$. Celkem $P(t)=f(t)=Q(t)$ pro $t=0,1,2$. Protože P a Q jsou polynomy stupně nejvýše dva a shodují se ve třech různých bodech, nutně $P=Q$, a proto $f(x)=Q(x)=P(x)$, což jsme chtěli ukázat.

[9] Hranatými závorkami $[a,b,c,d]$ značíme dosazení a za x, b za y, c za u a d za v.

Moderní řešení:

Označme písmenem M množinu všech řešení zadané úlohy. Snadno se ověří, že funkce $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ patří do M. Dále si všimneme, že pokud $f, g \in M$, pak $f + g \in M$ a též $af \in M$ pro každou reálnou konstantu a. Množina M tedy obsahuje všechny polynomy stupně nejvýše dva. Buď nyní $h \in M$ libovolná. Nechť $P(x) = ax^2 + bx + c \in M$ je polynom takový, že $P(t) = h(t)$ pro $t = -1, 0, 1$. Funkce $f(x) = h(x) - P(x)$ je pak nulová v bodech -1, 0 a 1. Ukážeme, že f je již nulová na celém $\mathbb{R}$.

Buď x libovolné reálné číslo. Dosaďme postupně tři čtveřice

$$\begin{aligned}
&[x+1, x-1, 2x, 0]: &\quad \big(f(x+1) - f(x-1)\big)2x &= 2f(2x),\\
&[x-1, -x, -1, 0]: &\quad -f(x-1) + f(-x) &= 0,\\
&[-x, x+1, 1, 0]: &\quad f(-x) - f(x+1) &= 0.
\end{aligned}$$

Přičtením $(-x)$-násobku druhé a x-násobku třetí rovnice k první získáme $f(2x) = 0$. Protože x bylo libovolné, $h = P$, čili každé řešení je polynomem nejvýše druhého stupně.

Poznámky:

Jak už to tak u osmiček bývá, řešení se dělí na ta správná a na pokusná. Hranice tentokrát byla velmi ostrá. Kdo úlohu měl a dokázal ji rozumně napsat, dostal pět bodů. Kdo střílel a trefil řešení, dostal bod.

Rozdána byla i tři *i*-čka. Dostali je *Ondřej Darmovzal* za rychlé a přehledné řešení pomocí soustavy, *František Couf* za řešení moderní a *Eduard Batmendijn*, který postupoval lišácky.

(Vít „Vejtek“ Musil)

Teorie čísel

1. seriálová série — Vzorové řešení

Úloha 1. (49; 28; 2,86; 3,0)

Nechť n, k jsou přirozená čísla a k je bezčtvercové.[10] *Předpokládejme, že*

$$\frac{n^3+2n^2+k}{n^2+k}$$

je celé číslo. Dokažte, že pak už platí $n=k$. *(Štěpán Šimsa)*

Standardní řešení:
Aby byl zlomek $\frac{n^3+2n^2+k}{n^2+k}$ celé číslo, musí platit

$$n^2+k \mid n^3+2n^2+k,$$

tedy $n^2+k \mid n^3+2n^2+k-(n+2)\cdot(n^2+k) = -nk-k$, neboli $n^2+k \mid nk+k$. Označme si[11] $d=(n,k)$ a vezměme si taková čísla N, K, že $n=Nd$ a $k=Kd$. Z vlastností největšího společného dělitele víme $(N,K)=1$. Navíc pokud $(K,d)=a$, tak $a \mid d$, $a \mid K$, takže $a^2 \mid k$, z čehož plyne $a=1$ (k je bezčtvercové). Odtud máme, že i čísla K a d jsou nesoudělná. Rozepišme si nyní $n^2+k \mid nk+k$ do N, K a d a upravme:

$$\begin{aligned} N^2d^2+Kd &\mid NdKd+Kd,\\ N^2d+K &\mid NKd+K = K(Nd+1), \end{aligned}$$

ale protože je $(N,K)=1$ a $(d,K)=1$, tak $(N^2d+K,K)=(N^2d,K)=1$, a proto platí i $N^2d+K \mid Nd+1$. Čísla N^2d+K i $Nd+1$ jsou obě přirozená, platí tedy $N^2d+K \le Nd+1$, což spolu s tím, že $N^2d \ge Nd$ a $K \ge 1$, znamená, že musí nastat rovnosti, a tedy $K=1$, $N=1$. Proto $n=d=k$, což jsme chtěli dokázat.

Rychlé řešení (podle Miroslava Stankoviče):
Jako minule $n^2+k \mid nk+k$, takže pro nějaké přirozené číslo a platí $a(n^2+k)=nk+k$, neboli $an^2=k(n+1-a)$. Proto $k \mid an^2$, ale jelikož je k bezčtvercové, tak i $k \mid an$, tedy $k \le an$. Proto $n+1-a = an^2/k \ge n$, z čehož plyne $a \le 1$. Je tedy $a=1$ a $n^2=kn$, a tak skutečně platí $n=k$.

[10] Tedy neexistuje přirozené číslo $a>1$ takové, že $a^2 \mid k$.

[11] Připomeňme si, že (a,b) značí největšího společného dělitele čísel a, b.

Trikové řešení (podle Markéty Calábkové):
Opět $a(n^2+k) = nk + k$ pro nějaké přirozené číslo a. Tuto rovnost upravíme na tvar

$$an^2 - kn + k(a-1) = 0, \qquad (\clubsuit)$$

což je kvadratická rovnice v n, jejíž jeden kořen musí být přirozené číslo. Proto její diskriminant $k^2 - 4ka(a-1) = k(k - 4a(a-1))$ musí být druhá mocnina celého čísla. Proto musí k dělit celou druhou závorku (díky bezčtvercovosti), tedy $k \mid k - 4a(a-1)$, a tedy i $k \mid 4a(a-1)$. Aby však měla rovnice ($\clubsuit$) vůbec řešení, musí být $k \geq 4a(a-1)$, takže je $4a(a-1)$ buď rovno k, nebo je to 0, nebo záporné číslo. Poslední možnost nemůže nastat, protože a je přirozené číslo. Dále $k \neq 4a(a-1)$, protože jinak by k bylo dělitelné čtyřmi, tedy by nebylo bezčtvercové. Proto $4a(a-1) = 0$, z čehož plyne $a = 1$. Rovnice ($\clubsuit$) tedy přejde na tvar $n^2 - kn = 0$, což má jediné kladné řešení $n = k$.

Poznámky:
Ti, co se vydali standardní cestou, obvykle úlohu úspěšně dokončili a získali tak plný počet bodů. Poté se objevilo poměrně hodně rychlejších a trikovějších řešení, podobných jako ta citovaná, která byla ohodnocena imaginárním bodem. Bohužel se ale objevilo i hodně řešení se závažnou chybou, kterou bylo například tvrzení, že pokud $n^2 + k \mid n^2(n+1)$, tak $n^2 + k \mid n^2$ nebo $n^2 + k \mid n+1$ (které neplatí, jak si můžete rozmyslet). Konečně někteří bohužel dokazovali jinou úlohu, když dosadili $n = k$ a zjistili, že se jedná o celé číslo. Bylo třeba dokázat přesně opačnou implikaci. *(Štěpán Šimsa)*

Úloha 2.

(29; 26; 3,52; 4,0)

Mějme přirozené číslo $n \geq 2$. Dokažte, že každé z čísel $n!+2, n!+3, \ldots, n!+n$ má takového prvočíselného dělitele, který není dělitelem žádného z $n-2$ zbylých čísel. *(Josef Svoboda)*

Řešení:
Uvažujme pevné n a číslo $n! + k$. Rozebereme dva případy.

Pokud všechna prvočísla v prvočíselném rozkladu čísla k dělí i některé (ne nutně stále stejné) z ostatních čísel $2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$, rozložíme zkoumané číslo do tvaru $k(n!/k + 1)$. Číslo $(n!/k+1)$ je větší než jedna, uvažujme některého jeho prvočíselného dělitele p. Platí $n!/k \equiv -1 \pmod{p}$. Prvočíslo p tak nedělí žádné z čísel $2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$, nedělí tedy ani k, a je proto větší než n. Máme tak p, které dělí $n! + k$, ale žádné ze zbylých $n-2$ čísel ze zadání, protože nejbližší další čísla dělitelná p jsou $n+k-p$ a $n+k+p$. Je tedy hledaným prvočíslem.

Nyní naopak předpokládejme, že existuje prvočíslo v rozkladu čísla k (označme jej p), které žádné z čísel $2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$ nedělí. To ale znamená, že musí být $p = k$, protože jinak by p bylo v tomto seznamu. Navíc musí platit $2p > n$, protože jinak by v seznamu bylo číslo $2p$. Takže p dělí $(n!+k) = p(n!/p+1)$, ale nedělí žádné ze zbývajících $n-2$ čísel ze zadání, protože nejbližší další dělitelé čísla p jsou $n!$ a $n! + 2p$. Je tedy opět hledaným prvočíslem.

Poznámky:
Nejčastější chybou bylo opomenutí druhého případu, opravdu není pravda, že se vždy dá najít prvočíslo větší než n, které dělí $n! + k$ – stačí se podívat například na výrazy

$$2!+2, \quad 3!+2, \quad 3!+3, \quad 4!+3, \quad 5!+5.$$

Jeden řešitel ale vznesl hypotézu, že se vždy dá najít prvočíslo větší než $n-2$, to pro účely úlohy stačí. Pokud se vám povede rozhodnout platnost této hypotézy, nebojte se podělit na matematickém chatu na našich stránkách ;-) *(Mirek Olšák)*

Úloha 3.

(24; 21; 3,96; 5,0)

Mějme celé číslo n a prvočíslo p. Víme, že platí

$$2^{4n} + 9^{2n} \equiv 36^n \pmod{p}.$$

Dokažte, že p je tvaru $4k + 1$ pro nějaké celé číslo k. *(Josef Svoboda)*

Řešení:

Nejprve snadno vyloučíme možnost, že $p = 2$ nebo $p = 3$. Pro $p = 2$ bychom dostali

$$1 \equiv 2^{4n} + 9^{2n} \equiv 36^n \equiv 0 \pmod{2},$$

což neplatí, obdobně pro $p = 3$ bychom dostali, že 3 dělí 2^{4n}, což také neplatí.

Pro přehlednost si zavedeme substituci $a = 2^n$, $b = 3^n$, zadání nyní vypadá takto:

$$a^4 + b^4 \equiv (ab)^2 \pmod{p},$$

což můžeme ekvivalentné upravit na

$$(a^2 - b^2)^2 \equiv -(ab)^2 \pmod{p}.$$

Protože jsme vyloučili možnosti $p = 2$ a $p = 3$, číslo $(ab)^2 = 2^{2n} \cdot 3^{2n}$ je nesoudělné s p a můžeme jím tedy kongruenci ekvivalentně vydělit. Dostáváme tedy kongruenci

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^2 \equiv -1 \pmod{p},$$

ze které plyne, že -1 je kvadratický zbytek modulo p. Jak jsme si v seriálu ukázali (pomocí Eulerova kritéria), z toho už plyne, že p je tvaru $4k + 1$, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:

Velká část řešení postupovala stejně jako vzorové, případně s pěknou obměnou při získávání dvou čtverců – výraz $a^4 - (ab)^2 + b^4$ můžeme vynásobit číslem $a^2 + b^2$ a dostaneme $(a^3)^2 + (b^3)^2$. Nejčastější chybou bylo svévolné přecházení od kongruence modulo p ke kongruenci modulo 4. Bohužel však $a \equiv 0 \pmod{p}$ neimplikuje $a \equiv p \pmod{4}$, jak si snadno ověříte třeba na případu $a = 21$, $p = 3$. *(Pepa Svoboda)*

Seriál – Teorie čísel II

Po krátké přestávce se k Tobě dostává další díl seriálu! Jak sis možná všiml, první část seriálu byla poměrně hutná. Proto jsme se rozhodli udělat tento díl kratší, aby sis mohl dočíst z prvního dílu kapitoly, které jsi třeba předtím nestihl. Tak se do toho opři, bude to stát za to! Navíc jsme v textu odlišili náročnější pasáže, které nejsou potřeba k vyřešení seriálových úloh a k pochopení ostatní látky.

Tentokrát v seriálu najdeš návod, jak nakládat s umocňováním čísel. Nejdříve si zavedeme p-valuace, které jsou praktickým nástrojem při práci s dělitelností. Poté se seznámíme s primitivním prvkem, ukážeme si zajímavé vlastnosti kvadratických zbytků a probranou teorii využijeme v rozmanitých úlohách z olympiád.

Rozklady a p-valuace

Když pracujeme s dělitelností, vyplatí se rozkládat čísla na prvočísla. Pokud chceme například dokázat $60^{30} \mid 30^{60}$, tak stačí najít prvočíselný rozklad obou čísel. Vidíme $60^{30} = 2^{60} \cdot 3^{30} \cdot 5^{30}$ a $30^{60} = 2^{60} \cdot 3^{60} \cdot 5^{60}$. Jelikož exponenty u každého prvočísla jsou v prvním čísle menší než v tom druhém, tak dokazovaná dělitelnost skutečně platí. Když nepracujeme s konkrétními čísly, často se vyplatí podívat se pouze na nějaké obecné prvočíslo a na mocniny, v jakých dělí zadaná čísla. A k tomu si zavedeme pojem *p-valuace*.

Definice. Nechť n je přirozené číslo a p prvočíslo. Poté *p-valuací* čísla n myslíme největší číslo k takové, že $p^k \mid n$.[12] Značíme ji $v_p(n)$.

Jinými slovy, p-valuace jsou vlastně exponenty v prvočíselném rozkladu čísla n. Například pro $24 = 2^3 \cdot 3$ máme $v_2(24) = 3$, $v_3(24) = 1$ a $v_7(24) = 0$.

Cvičení. Uvědom si následující jednoduché vlastnosti p-valuací.

(i) $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$,
(ii) $v_p(m + n) \geq \min(v_p(m), v_p(n))$,
(iii) Pokud $v_p(m) \neq v_p(n)$, pak dokonce $v_p(m + n) = \min(v_p(m), v_p(n))$.

Tyto vlastnosti vyplývají z toho, že se jedná jen o exponenty jednotlivých prvočísel v rozkladu. A exponenty se při násobení přece sčítají. Povšimni si, že jako důsledek prvního cvičení platí například i $v_p(a^n) = n \cdot v_p(a)$.

Na následujících cvičeních si p-valuace trochu zažijeme.

Cvičení. Urči tyto hodnoty:

(i) $v_2(2^n + 4)$ (v závislosti na n).
(ii) $v_3(v_3(18^{18}))$.
(iii) $v_p((3p^3 + p^2)(p^3 + 2p^2 + 5p))$ (v závislosti na prvočíslu p).

[12] Tento fakt občas zapisujeme jako $p^k \parallel n$.

Cvičení. Máme tři čísla, z nichž žádné není dělitelné 8 ani 125. Kolika nejvíce nulami může končit jejich součin?

Základní použití p-valuací spočívá v této snadné úvaze. Představme si, že chceme dokázat $a \mid b$. Místo toho nám stačí ukázat, že když si vezmeme libovolné prvočíslo p, tak $v_p(a) \leq v_p(b)$. Ukažme si to na příkladu.

Příklad. Mějme čísla a, b, c, pro která platí $a \mid b^3$, $b \mid c^3$, $c \mid a^3$. Dokaž, že $abc \mid (a+b+c)^{13}$.

Řešení. Vezměme si libovolné prvočíslo p. Z toho, že platí $a \mid b^3$, můžeme odvodit $v_p(a) \leq v_p(b^3)$, takže $v_p(a) \leq 3v_p(b)$. Podobně víme $v_p(b) \leq 3v_p(c)$ a $v_p(c) \leq 3v_p(a)$. Nyní chceme dokazované tvrzení přeložit do řeči p-valuací. K tomu stačí využít výsledky (i) a (ii) z úvodního cvičení. BÚNO předpokládejme, že $v_p(a)$ je nejmenší z čísel $v_p(a)$, $v_p(b)$, $v_p(c)$. Pak

$$v_p\big((a+b+c)^{13}\big) \geq 13 \cdot \min(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) = 13v_p(a),$$

ale

$$v_p(abc) = v_p(a) + v_p(b) + v_p(c) \leq v_p(a) + 4v_p(c) \leq 13v_p(a) \leq v_p\big((a+b+c)^{13}\big).$$

Jelikož tato nerovnost platí pro každé prvočíslo p, tak platí i pro všechna prvočísla v rozkladu abc, a tedy opravdu $abc \mid (a+b+c)^{13}$.

Podobné metody můžeme využít, když chceme dokázat, že se dvě čísla a, b rovnají (až na znaménko). Dokážeme jednoduše, že $v_p(a) = v_p(b)$ pro každé prvočíslo p. Než si tuto metodu předvedeme na příkladu, rozmyslíme si ještě, jaká je p-valuace NSD a nsn.[13]

Cvičení. Dokaž:

(i) $v_p((m,n)) = \min(v_p(m), v_p(n))$.
(ii) $v_p([m,n]) = \max(v_p(m), v_p(n))$.

Návod. Ukaž, že $p^{\min(v_p(m), v_p(n))}$ dělí m i n, zatímco větší mocnina p už jedno z nich nedělí.

Příklad. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $b_1, b_2, \ldots, b_k$ jsou přirozená čísla, která splňují $(a_i, b_i) = 1$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Dále buď $m = [b_1, b_2, \ldots, b_k]$. Ukaž, že platí

$$\left(\frac{a_1 m}{b_1}, \frac{a_2 m}{b_2}, \ldots, \frac{a_k m}{b_k}\right) = (a_1, a_2, \ldots, a_k).$$

(IMO shortlist 1974)

Řešení. Vezměme si libovolné prvočíslo p. Stačí nám dokázat, že p-valuace levé (L) a pravé (P) strany je stejná. A to podle předchozího cvičení znamená, že

$$\begin{aligned} v_p(L) &= \min\left(v_p\left(\frac{a_1 m}{b_1}\right), v_p\left(\frac{a_2 m}{b_2}\right), \ldots, v_p\left(\frac{a_k m}{b_k}\right)\right), \\ v_p(P) &= \min(v_p(a_1), v_p(a_2), \ldots, v_p(a_k)). \end{aligned}$$

Ale zároveň platí $v_p(a_i m/b_i) = v_p(a_i) + v_p(m) - v_p(b_i)$ a $v_p(m) = \max(v_p(b_1), \ldots, v_p(b_k))$. Nyní rozebereme dvě možnosti.

Pokud $v_p(b_i) = 0$ pro všechna i, tak i $v_p(m) = 0$. Poté zřejmě $v_p(a_i) + v_p(m) - v_p(b_i) = v_p(a_i)$ pro každé i. Pak je ale $v_p(a_i m/b_i) = v_p(a_i)$, a to znamená, že také $v_p(L) = v_p(P)$.

Nechť pro nějaké b_i platí $v_p(b_i) \neq 0$. Vezměme i takové, že $v_p(b_i)$ je největší, takže $v_p(m) = v_p(b_i)$. Pak $v_p(a_i) + v_p(m) - v_p(b_i) = v_p(a_i)$. Jelikož ale $p \mid b_i$ a protože $(a_i, b_i) = 1$, tak $p \nmid a_i$.

---

[13] Připomeneme, že NSD čísel a, b značíme (a,b), zatímco nsn značíme $[a,b]$. Totéž značení používáme i pro více jak dvě čísla.

To znamená, že $v_p(a_i) = 0$. Proto $v_p(a_i m/b_i) = 0$ a levá strana není dělitelná prvočíslem p, stejně jako pravá (protože $p \nmid a_i$).

Úloha. Přirozená čísla a, b, c, d splňují $ab = cd$. Ukaž, že platí

$$(a,c) \cdot (a,d) = a \cdot (a,b,c,d).$$

(Polská MO, Mecz 2009)

Návod. Označ si p-valuace čísel a, b, c, d, rozepiš obě rovnosti do řeči p-valuací a rozeber několik případů.

Úloha. Víme, že pro přirozená čísla m, n platí $m \mid n^2$, $n^3 \mid m^4$, $m^5 \mid n^6$, … Dokaž $m = n$.

Návod. Kdyby pro nějaké prvočíslo neplatilo $v_p(m) = v_p(n)$, tak si zvol dostatečně velké k a dojdi ke sporu s tím, že $m^{4k+1} \mid n^{4k+2}$, nebo s tím, že $n^{4k+3} \mid m^{4k+4}$.

Díky p-valuacím získáváme ještě nový pohled[14] na to, co je to největší společný dělitel, případně nejmenší společný násobek. Napišme si prvočíselný rozklad čísel m, n.

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$
$$n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k},$$

kde $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ jsou prvočísla a α_i, β_i pro $i \in \{1, \dots, k\}$ jsou nezáporná čísla (do obvyklého prvočíselného rozkladu můžeme přidat jakékoli prvočíslo umocněné na nultou, což je jedna, a zajistit si tak v obou rozkladech stejná prvočísla). Už víme, že $v_{p_i}((m,n)) = \min(v_{p_i}(m), v_{p_i}(n))$ a $v_{p_i}([m,n]) = \max(v_{p_i}(m), v_{p_i}(n))$. Z toho pak můžeme vyvodit

$$(m,n) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)},$$
$$[m,n] = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}.$$

S p-valuacemi je nyní snadné dokázat rovnosti, jako je tato:

Příklad. Dokaž, že

$$\frac{[a,b,c]^2}{[a,b] \cdot [b,c] \cdot [c,a]} = \frac{(a,b,c)^2}{(a,b) \cdot (b,c) \cdot (c,a)}.$$

(USAMO 1972)

Řešení. Abychom měli jistotu, že pracujeme s celými čísly, tak si nejdříve rovnost upravíme do tvaru

$$[a,b,c]^2 \cdot (a,b) \cdot (b,c) \cdot (c,a) = (a,b,c)^2 \cdot [a,b] \cdot [b,c] \cdot [c,a].$$

Vezměme si libovolné prvočíslo p a označme $x = v_p(a)$, $y = v_p(b)$, $z = v_p(c)$. Můžeme BÚNO předpokládat $x \geq y \geq z$. Označme L a P levou a pravou stranu rovnosti. Spočítáme jejich p-valuace

$$v_p(L) = 2 \cdot \max(x,y,z) + \min(x,y) + \min(y,z) + \min(z,x) = 2x + y + 2z,$$
$$v_p(P) = 2 \cdot \min(x,y,z) + \max(x,y) + \max(y,z) + \max(z,x) = 2x + y + 2z.$$

[14] Jde vlastně o obvyklý pohled, který se učí ve škole. Většinou je ale naprosto nevhodný pro výpočet NSD (zkus se například zeptat své učitelky, jak by počítala NSD čísel $2^{42} + 3^{42}$ a 2^{42}), na rozdíl od Euklidova algoritmu, který je rychlý i pro velká čísla. Velká čísla totiž neumíme rychle rozkládat na prvočísla.

Vidíme, že každým prvočíslem je levá i pravá strana dělitelná ve stejné mocnině, takže se obě strany rovnají.

Další využití p-valuací najdeme, pokud se v úloze na dělitelnost setkáme s faktoriály.[15] Uvedeme si základní tvrzení, které se v takových úlohách používá.

Tvrzení. (Legendreova formule)

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots .$$

Důkaz. Nejprve si uvědomme, že součet je vlastně jen konečný, protože od jistého členu bude $n < p^k$, a tak budou všechny následující členy už jen nulové. A proč vzoreček funguje? Vezmeme všechna čísla menší nebo rovná n. Nejprve započítáme jedničku za všechna čísla dělitelná p, kterých je $\lfloor n/p \rfloor$. Ale některá čísla jsou dělitelná dokonce p^2, za každé z nich tedy připočítáme další jedničku v dalším členu $\lfloor n/p^2 \rfloor$. Poté připočítáme další jedničku za čísla dělitelná p^3, atd.

Cvičení.

(i) Rozlož 15! na prvočísla.
(ii) Urči, kolika nulami končí 100!.
(iii) Dokaž, že číslo $N = 46! \cdot 47! \cdot 48! \cdot 49!$ není druhou mocninou celého čísla, a najdi jeho největší dělitel, který druhou mocninou celého čísla je.

Návod.

(i) Stačí spočítat p-valuace pro prvočísla menší než 15.
(ii) Stačí spočítat $v_5(100!)$.
(iii) Zde je výhodnější nepočítat p-valuace všech prvočísel v součinu, ale jen se zamyslet, jestli je p-valuace sudá.

Úloha. (těžká) Dokaž, že číslo $M_n = (2n)!/(n!)^2$ je celé a že pro každé prvočíslo p platí $p^{v_p(M_n)} \leq 2n$.

Návod. Spočti si p-valuaci čitatele a jmenovatele, odečti je od sebe a dokaž, že

$$0 \leq \left\lfloor \frac{2n}{x} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor \leq 1.$$

Uvědom si, že $v_p(M_n)$ je maximálně takové k, že $p^k \leq 2n < p^{k+1}$.

Náročnější pasáž

Díky tomuto zdánlivě samoúčelnému cvičení dostaneme velmi dobrý odhad počtu prvočísel. Zatím víme jen to, že jich je nekonečně mnoho, ale nemáme žádnou představu o tom, jak „hustě“ se mezi přirozenými čísly vyskytují. Označme tedy $\pi(x)$ počet prvočísel menších než x a zkusme tuto funkci nějak odhadnout.

Dá se poměrně snadno indukcí dokázat, že pro M_n z předchozí úlohy platí $M_n \geq 2^n$. Spolu s tím, že každé prvočíslo splňuje $p^{v_p(M_n)} \leq 2n$, dostaneme, že pro počet prvočísel $\pi(2n)$, která jsou menší než $2n$ (žádné větší prvočíslo nedělí M_n), platí $(2n)^{\pi(2n)} \geq M_n \geq 2^n$. Pokud označíme $x = 2n$, můžeme předchozí vztah upravit do tvaru

$$\pi(x) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\log_2 x}.$$

[15] Připomeňme si, že číslo $n!$ je rovno $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ a čte se [n faktoriál].

To jsme tedy dokázali pro sudá x. Pro x lichá máme

$$\pi(x) \geq \pi(x-1) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{\log_2(x-1)}.$$

Návrat do reality

Pokud nevíš, co je funkce $\log_2 x$ nebo jak přesně jsme k výše uvedenému výsledku dospěli, nezoufej. Nebudeš to dále v seriálu potřebovat a jen věz, že jsme si ukázali, že je prvočísel opravdu hodně.

Eulerova věta

Nejprve si zavedeme dva užitečné pojmy.

Definice. *Úplnou sadou zbytků* myslíme množinu $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ zbytků modulo n. Značíme ji $\mathbb{Z}_n$. Když v ní sčítáme nebo násobíme, tak myslíme automaticky sčítání a násobení modulo n. *Redukovaná sada zbytků* je podmnožina $\mathbb{Z}_n$ obsahující všechna čísla nesoudělná s n. Značíme ji $\mathbb{Z}_n^*$.

Například pro $n = 10$ je redukovaná sada zbytků $\mathbb{Z}_{10}^* = \{1, 3, 7, 9\}$. Pro prvočíslo p je $\mathbb{Z}_p^*$ množina $\{1, 2, \ldots, p-1\}$, tedy $\mathbb{Z}_p$ bez nuly.

Cvičení. Rozmysli si, že součin dvou prvků ze $\mathbb{Z}_n^*$ je opět v $\mathbb{Z}_n^*$. Jak je to s jejich součtem?

Cvičení. Uvědom si, jak se pojmy, které známe, dají převést do řeči sad zbytků. Například, že $a \equiv b \pmod{n}$ říká totéž, co $a = b$ v $\mathbb{Z}_n$, nebo že Eulerova funkce[16] není nic jiného než počet prvků $\mathbb{Z}_n^*$. Tvrzení z minulého dílu, že „zbytky lze dělit" zase říká, že každý prvek ze $\mathbb{Z}_n^*$ má v $\mathbb{Z}_n^*$ inverzi.[17]

S těmito pojmy jsme již vlastně pracovali, jejich pořádné zavedení nám ale usnadní mnoho úvah.

V minulém díle jsme se seznámili s Malou Fermatovou větou. Nyní si ukážeme její zobecnění pro libovolné přirozené modulo m, které se připisuje Eulerovi.

Věta. (Eulerova) *Nechť $(a, m) = 1$. Pak $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.*

Důkaz se dá provést stejně jako důkaz MFV v prvním díle, uvedeme si však ještě jiný (a překvapivě kratší) důkaz.

Důkaz. Vezměme redukovanou sadu zbytků $\mathbb{Z}_m^*$. Nechť a je pevně dané číslo nesoudělné s m. Pokud jím každý prvek ze $\mathbb{Z}_m^*$ vynásobíme, dostaneme opět celou $\mathbb{Z}_m^*$, jen v jiném pořadí. Kdyby se totiž nějaké dva prvky ak a al rovnaly $(k \neq l)$, tedy

$$ak \equiv al \pmod{m},$$

tak díky tomu, že $(a, m) = 1$, to znamená i $k \equiv l \pmod{m}$, což je požadovaný spor.

Například pro $m = 10$ a $a = 3$ (víme, že 3 je v $\mathbb{Z}_{10}^*$) máme

$$\{3 \cdot 1, 3 \cdot 3, 3 \cdot 7, 3 \cdot 9\} = \{3, 9, 1, 7\} = \{1, 3, 7, 9\}.$$

[16] Připomeneme, že Eulerova funkce $\varphi(n)$ přiřazuje číslu n počet přirozených čísel menších nebo rovných n a nesoudělných s n.

[17] Inverzí čísla a ze $\mathbb{Z}_n^*$ myslíme takové číslo a^{-1}, že $a \cdot a^{-1} \equiv 1 \pmod{n}$.

Nyní udělejme součin všech prvků ze $\mathbb{Z}_m^*$, čímž dostaneme nějaké číslo K nesoudělné s m. To je však stejné číslo, jako když vynásobíme všechny zbytky v jiném pořadí, takže platí

$$a^{\varphi(m)} \cdot K \equiv K \pmod{m}.$$

Protože číslo K je nesoudělné s m, můžeme jím obě strany vydělit a dostáváme požadovanou kongruenci. Pro náš případ $n = 10$, $a = 3$ to znamená

$$3^4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 = (3 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 9) \equiv 3 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 7 = 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \pmod{10},$$

takže $3^{\varphi(10)} = 3^4 \equiv 1 \pmod{10}$.

Příklad. Nechť p je prvočíslo a b je celé číslo. Dokaž, že $b^{p^2-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$, právě když $b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$. (MKS 28–9–4)

Řešení. Jak jsme si ukázali v minulém díle,[18] $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$, tedy speciálně $\varphi(p^2) = p^2 - p$. Z Eulerovy věty tedy víme $b^{p^2-p} \equiv 1 \pmod{p^2}$. Proto

$$b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}, \quad \text{právě když} \quad b^{p^2-p} \cdot b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2},$$

což je ale po úpravě přesně $b^{p^2-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$.

Primitivní prvek

Připomeňme si, že řád $\mathrm{ord}_m(a)$ čísla a modulo m je nejmenší přirozené číslo r takové, že $a^r \equiv 1 \pmod{m}$. Budeme se nyní zabývat otázkou, pro která m existuje a, jehož řád je maximální možný, tj. $\mathrm{ord}_m(a) = \varphi(m)$. Z Eulerovy věty totiž víme, že řád libovolného prvku je maximálně $\varphi(m)$, neboť $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Definice. Pokud $\mathrm{ord}_m(a) = \varphi(m)$, nazveme a *primitivním prvkem* modulo m.

Cvičení. Primitivní prvek je tedy číslo, které „generuje" celou $\mathbb{Z}_m^*$, neboli každé číslo ze $\mathbb{Z}_m^*$ se dá zapsat jako jeho mocnina.

Návod. Co by se stalo, kdyby se dvě mocniny primitivního prvku rovnaly? Kolik je tedy různých mocnin primitivního prvku?

Příklad. Najdi primitivní prvek modulo 5 a dokaž, že neexistuje primitivní prvek modulo 8.

Řešení. Modulo 5 je primitivní prvek například číslo 2, protože čísla 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 dávají zbytky po dělení pěti postupně 2, 4, 3, 1, takže opravdu $\mathrm{ord}_5(2) = 4$ (resp. číslo 2 skutečně generuje celou $\mathbb{Z}_5^*$).

Primitivní prvek modulo 8 nemůže být sudý, protože pak bychom nemohli dostat jako jeho mocninu žádné liché číslo. Na druhou stranu $1^1 \equiv 1$, $3^2 \equiv 1$, $5^2 \equiv 1$, $7^2 \equiv 1 \pmod{8}$, takže řád žádného lichého čísla není roven $\varphi(8) = 4$.

Cvičení. Najdi primitivní prvek modulo 13.

Náročnější pasáž

K důkazu existence primitivního prvku modulo každé prvočíslo se ještě potřebujeme lehce seznámit s chováním polynomů[19] modulo p. Jak jsi asi slyšel, polynom stupně n s reálnými koeficienty

[18] Nebo jak si snadno rozmyslíš.

[19] Polynom s koeficienty ze $\mathbb{Z}_p$ je funkce $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ taková, že $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kde $a_i \in \mathbb{Z}_p$ a $n \in \mathbb{N}$. Je-li $a_n \neq 0$, pak říkáme, že polynom má stupeň n. Polynom nazýváme nulový, pokud jsou všechny jeho koeficienty nulové.

má maximálně n kořenů v reálných číslech, a dokonce přesně n kořenů v oboru komplexních čísel. Pro sady zbytků máme tuto analogii:

Věta. (Lagrangeova[20]) *Nechť P je nenulový polynom stupně n s koeficienty ze $\mathbb{Z}_p$. Pak má rovnice $P(x) \equiv 0 \pmod p$ maximálně n kořenů modulo p.*

Důkaz. Postupujme indukcí podle n. Pro $n = 0$ to platí triviálně. Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké n, a dokažme, že platí i pro $n+1$. Nechť je $P(x) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i$ polynom stupně $n+1$. Pokud má 0 kořenů, jsme hotovi, protože 0 je menší než $n+1$. Jinak má nějaký kořen r, a protože pro každé i platí $x - r \mid x^i - r^i$, tak můžeme upravit $P(x) = P(x) - P(r) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i(x^i - r^i) = (x-r)Q(x)$, kde Q je nějaký polynom stupně n a má tedy z indukčního předpokladu maximálně n kořenů.

Dosud jsme nijak nevyužili, že pracujeme modulo prvočíslo. Víme, že když p je prvočíslo, pak z $ab \equiv 0 \pmod p$ plyne $a \equiv 0 \pmod p$ nebo $b \equiv 0 \pmod p$. To znamená, že pokud x je kořen polynomu $F(x)G(x)$ modulo p, pak musí být také kořenem jednoho z polynomů F nebo G. V našem případě víme, že $F(x) = x - r$ má jeden kořen a $G(x) = Q(x)$ má maximálně n kořenů, takže $P(x) = F(x)G(x)$ má maximálně $n+1$ kořenů. Tím je indukční krok hotov.

Uvědom si, že věta neplatí pro složená modula! Například polynom $x^2 - 1$ má 4 kořeny modulo 8, přestože je jeho stupeň jen 2.

Nyní jsme dostatečně vyzbrojeni pro důkaz existence primitivního prvku.

Věta. *Pro každé prvočíslo p existuje primitivní prvek modulo p.*

Důkaz. Využijeme Lagrangeovu větu a především poslední tvrzení z předchozího dílu, které říká, že

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Označme $\psi(d)$ počet zbytků ze $\mathbb{Z}_p^*$, které mají řád d. Již víme, že pokud existuje prvek řádu d, tak $d \mid p-1$. Protože každý prvek má nějaký řád a žádný prvek nemá dva různé řády, dostáváme, že[21]

$$\sum_{d|p-1} \psi(d) = |\mathbb{Z}_p^*| = p - 1,$$

takže také

$$\sum_{d|p-1} \psi(d) = p - 1 = \sum_{d|p-1} \varphi(d). \qquad (\heartsuit)$$

Mějme nějaké $d \mid p-1$. Ukážeme, že $\psi(d) \le \varphi(d)$. Pokud neexistuje žádné a, které má řád d, tak je zřejmě $0 = \psi(d) \le \varphi(d)$. V opačném případě si takové a vezměme. Pak jsou všechna čísla $a^0, a^1, \ldots, a^{d-1}$ různá (rozmysli si). Ale přitom pro $i \in \{0, \ldots, d-1\}$ platí $(a^i)^d - 1 \equiv 0 \pmod p$. Navíc podle Lagrangeovy věty má polynom $x^d - 1$ maximálně d kořenů, takže už jsme našli všechny. Vezměme si $i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, které je soudělné s d. Nechť $(i, d) = k$ a $i = mk$, $d = nk$. Potom

$$(a^i)^n \equiv (a^m)^d \equiv 1 \pmod p,$$

takže a^i nemá řád d, nýbrž n. To znamená, že čísla, která mají řád d, jsou ta čísla a^i, která mají i nesoudělné s d, a je jich tedy maximálně $\varphi(d)$. Tudíž $\psi(d) \le \varphi(d)$.

Kdyby nyní pro nějaké $d \mid p-1$ platilo $\psi(d) < \varphi(d)$, tak by neplatila rovnost ($\heartsuit$), protože levá strana by byla menší než pravá. Takže speciálně $\psi(p-1) = \varphi(p-1) > 0$. Mimo jiné jsme tedy zjistili, kolik má prvočíslo primitivních prvků.

---

[20] Joseph-Louis Lagrange byl významný italsko-francouzský matematik a astronom (1736–1813).

[21] Symbol $|\mathbb{Z}_p^*|$ značí počet prvků množiny $\mathbb{Z}_p^*$.

Návrat do reality

V předchozí části jsme si dokázali existenci primitivního prvku modulo každé prvočíslo. Přestože je důkaz poměrně náročný, k samotnému řešení úloh ho znát nepotřebuješ. Existenci primitivního prvku můžeš využívat bez důkazu.[22] Tento fakt nyní zkusíme zužitkovat v úlohách:

Příklad. Nechť p je liché prvočíslo. Najdi všechna taková k, že $1^k + 2^k + \cdots + (p-1)^k$ je dělitelné p. (Hungary-Israel Math Competition 2009)

Řešení. Každé číslo a z množiny $\mathbb{Z}_p^*$ se dá zapsat jako q^{i_a}, kde q je primitivní prvek. Čísla i_a jsou navzájem různá. Proto

$$\begin{aligned} 1^k + 2^k + \cdots + (p-1)^k &\equiv (q^{i_1})^k + (q^{i_2})^k + \cdots + (q^{i_{p-1}})^k \\ &\equiv (q^k)^{i_1} + (q^k)^{i_2} + \cdots + (q^k)^{i_{p-1}} \\ &= (q^k)^1 + (q^k)^2 + \cdots + (q^k)^{p-1} \pmod p, \end{aligned}$$

neboť čísla $i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}$ jsou čísla $1, 2, \ldots, p-1$, jen v jiném pořadí.

Tímto jsme se zbavili nepříjemného součtu a nahradili ho známou geometrickou posloupností, kterou už není problém sečíst. Musíme ale ještě rozebrat dva případy.

(i) $q^k \equiv 1 \pmod p$, což je ekvivalentní s $(p-1) = \operatorname{ord}_p(q) \mid k$, protože q je primitivní prvek. Potom $(q^k)^1 + (q^k)^2 + \cdots + (q^k)^{p-1} \equiv 1 + 1 + \cdots + 1 = p - 1 \pmod p$, takže tato k nevyhovují.

(ii) $q^k \not\equiv 1 \pmod p$. Poté můžeme sečíst geometrickou posloupnost pomocí známého vzorečku[23] a dostaneme[24]

$$q^k \cdot \frac{(q^k)^{p-1} - 1}{q^k - 1} \equiv q^k \cdot \frac{1-1}{q^k - 1} = 0 \pmod p.$$

Vyhovují tedy všechna k, která nejsou dělitelná $p-1$.

Cvičení. (těžké) Ukaž, že 2 je primitivní prvek mod 3^n.

Návod. Indukcí podle n. Musí platit $\varphi(3^n) = \operatorname{ord}_{3^n}(2) \mid \operatorname{ord}_{3^{n+1}}(2) \mid \varphi(3^{n+1})$. Další indukcí vyluč případ $\operatorname{ord}_{3^{n+1}}(2) = 2 \cdot 3^{n-1}$.

Primitivní prvek neexistuje jen pro prvočíselné moduly. Známý výsledek shrnuje následující věta, která popisuje všechna modula, pro která primitivní prvek existuje. Důkaz už není tak těžký jako pro případ, kdy n je prvočíslo, ale ani tolik zajímavý, takže ho zde neuvádíme.

Věta. *Primitivní prvek modulo n existuje právě tehdy, když $n = 1$, 2, 4, p^k nebo $2p^k$, kde p je liché prvočíslo a k je přirozené číslo.*

Zmíníme ještě slavnou Dirichletovu[25] větu. Důkaz této věty je bohužel nad rámec našeho seriálu. Někdy se však hodí i v olympiádě (typicky ji vzorové řešení nevyužívá, ale Dirichletova věta je opravdu „silná“).

---

[22] Jak v PraSeti, tak v olympiádě.

[23] Pokud ses s geometrickou posloupností ještě nesetkal, tak věz, že to je posloupnost tvaru $a_n = k \cdot q^{n-1}$, kde $k \neq 0$ a $q \neq 1$ jsou kladná reálná čísla. Dá se snadno odvodit, že součet prvních n členů je $k \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$.

[24] To, že máme zlomek v kongruenci, je v pořádku. Zlomek $\frac{a}{b}$ se totiž v kongruenci dá chápat jako $a \cdot b^{-1}$, tedy a vynásobeno inverzním prvkem k b.

[25] (Johann Peter Gustav) Lejeune Dirichlet (1805–1859) byl německý matematik. Proslavil se hlavně výsledky v teorii čísel, matematické analýze a statistice. Vzal si nejmladší sestru slavného hudebního skladatele Mendelssohna-Bartholdyho, Rebeccu.

Věta. (Dirichletova) *Pro každá dvě nesoudělná přirozená čísla a, b existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $ak+b$.*

V následující úloze ukážeme, jak se dá vhodně zkombinovat s úvahami o primitivním prvku.

Příklad. Ukaž, že existuje nekonečně mnoho přirozených n takových, že číslo n^4+1 má prvočíselného dělitele většího než $2n$. (MKS 30–2–8)

Řešení. Nechť p je prvočíslo tvaru $8k+1$ a q primitivní prvek modulo p. Potom z MFV víme, že

$$1 \equiv q^{p-1} \equiv q^{8k} \equiv (q^{4k})^2 \pmod{p},$$

což se dá přepsat do tvaru

$$(q^{4k}+1)(q^{4k}-1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Protože p je prvočíslo, dělí alespoň jednu ze závorek. Ale q je primitivní prvek, takže $p \nmid q^{4k}-1$. Proto kongruence $n^4+1 \equiv 0 \pmod{p}$ má vždy řešení pro prvočíslo tvaru $8k+1$ (a to $n=q^k$). Můžeme si vzít takové n, že $1 \le n \le p-1$ (protože $p \nmid n$ a $(n+kp)^4+1 \equiv n^4+1 \pmod{p}$). Ale zřejmě platí $n^4+1 \equiv (p-n)^4+1$, takže si můžeme vzít to z čísel n, $p-n$ které je menší. Tím dostaneme nové n, pro které platí $n < p/2$.

Zbývá dokázat, že takovýchto n existuje nekonečno. Budeme postupovat sporem. Nechť je takových n jen konečně a n_1 je největší z nich. Podle Dirichletovy věty existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $8k+1$, takže najdeme i takové, že $p > n_1^4+1$. Z předchozího odstavce plyne, že existuje n_2 takové, že $p \mid n_2^4+1$ a $p > 2n_2$. Navíc $n_2^4+1 \ge p > n_1^4+1$. Takže jsme našli vyhovující n větší než n_1, což je požadovaný spor.

Úloha. Urči počet všech posloupností reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takových, že pro všechna přirozená čísla m, n platí $a_m \cdot a_n = a_{m\cdot n}$ a zároveň $a_n = a_{n+2011}$. (MKS 30–6–8)

Řády

V této kapitole si důkladně procvičíme práci s řády. Opravdu se totiž hodí mít je v malíčku.

Příklad. Najdi všechna kladná celá čísla nesoudělná se všemi členy nekonečné posloupnosti

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1.$$

(IMO 2005)

Řešení. Číslo 1 to triviálně splňuje. Všechna další čísla tvaru $2^k \cdot 3^l$ pro $k, l \ge 0$ nevyhovují, protože jsou soudělná s $a_2 = 48 = 2\cdot 3\cdot 8$. Dokážeme, že ani žádné jiné přirozené číslo s výjimkou jedničky zadání nesplní. Vezmeme si prvočíslo $p > 3$ a najdeme v posloupnosti člen, který je tímto prvočíslem dělitelný. Vzpomeneme si na malou Fermatovu větu, která nám pomáhá zbavovat se mocnin v kongruencích. Po chvilce zkoušení zjistíme, že viník je člen a_{p-2}.

$$\begin{aligned} 6 \cdot a_{p-2} &= 6 \cdot (2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1) \equiv 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \\ &\equiv 3 + 2 + 1 - 6 = 0 \pmod{p}, \end{aligned}$$

a jelikož $p > 3$, tak nutně $p \mid a_{p-2}$.

Podívejme se, co nám řeknou řády o dělitelích Mersennových[26] čísel. Připomeňme, že Mersennovo číslo je číslo ve tvaru $2^n - 1$.

[26] Marin Mersenne (1588–1648) byl francouzský matematik, filozof, teolog a hudební teoretik.

Cvičení. Nechť p je prvočíslo a q je prvočíslo, které dělí $2^p - 1$. Dokaž, že pak $p \mid q - 1$.

Návod. Řád prvku 2 modulo q dělí všechna čísla k, pro která platí $2^k \equiv 1 \pmod q$. Díky MFV je mezi nimi i $q - 1$.

Cvičení. Pokud prvočíslo p dělí n-té Fermatovo číslo $2^{2^n} + 1$, pak $2^{n+1} \mid p - 1$.

Návod. Úlohu zabijeme podobnou myšlenkou jako minule. Zde je však třeba ještě použít trik „umocnění kongruence na druhou“, abychom si vyrobili z -1 jedničku.

Příklad. Dokaž, že pro $n > 1$ nemůže nastat $n \mid 2^{n-1} + 1$.

Řešení. Řešení je velmi trikové, ale pěkné. Budeme postupovat sporem, tedy předpokládejme, že takové n existuje. Zřejmě n nemůže být sudé. Rozložme si n na prvočísla:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Vezměme si takové i, že $v_2(p_i - 1)$ je nejmenší. Napišme $p_i = 1 + m \cdot 2^r$, kde m je nějaké liché číslo. Z výběru i víme, že pro každé prvočíslo p_j z rozkladu čísla n platí $p_j^{\alpha_j} \equiv 1 \pmod{2^r}$. Když tyto kongruence vynásobíme pro $i = 1, \ldots, k$, tak dostaneme $n \equiv 1 \pmod{2^r}$, takže $n - 1 = t \cdot 2^r$. Z podmínky ze zadání víme $2^{t \cdot 2^r} \equiv -1 \pmod{p_i}$, takže po umocnění na liché číslo m dostáváme, že

$$-1 = (-1)^m \equiv \left(2^{t \cdot 2^r}\right)^m \equiv 2^{t \cdot m \cdot 2^r} \equiv 2^{(p_i - 1) \cdot t} \equiv 1^t = 1 \pmod{p_i}.$$

Přitom poslední kongruence plyne z MFV. Ale potom $p_i \mid 2$, což je spor.

Kvadratické zbytky a reciprocita

V minulém díle jsme se seznámili s kvadratickými zbytky. To jsou ta čísla k ze $\mathbb{Z}_p^*$, pro která existuje x takové, že platí $x^2 \equiv k \pmod p$. Ukážeme si další užitečná tvrzení o zbytcích. Představíme si také standardní metody, jak kvadratické zbytky využívat v úlohách. Připomeneme ještě, že Legendreovým symbolem $\left(\frac{a}{p}\right)$ myslíme

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } p \mid a, \\ 1, & \text{pokud } a \text{ je kvadratický zbytek modulo } p, \\ -1, & \text{pokud } a \text{ je kvadratický nezbytek modulo } p. \end{cases}$$

Zabývejme se tedy vlastnostmi Legendreova symbolu. Je dobré si uvědomit, že Legendreův symbol není jen hezké značení vlastnosti „být kvadratickým zbytkem“. Je to chytře zvolená funkce z množiny zbytků do množiny $\{-1, 0, 1\}$, která má mnoho pěkných vlastností. Díky nim se nám například značně zjednoduší rozhodování, zda je daný zbytek kvadratický.

Tvrzení. (Základní vlastnosti Legendreova symbolu) *Nechť p je liché prvočíslo, a, b, k jsou celá čísla, pak platí:*

(i) *Pokud* $a \equiv b \pmod p$, *pak* $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$, *neboli* $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a+kp}{p}\right)$,

(ii) (Eulerovo kritérium) $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$

(iii) $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$.

Návod.

(i) Pokud existuje číslo x takové, že $x^2 \equiv a \pmod{p}$, pak také platí $x^2 \equiv b \pmod{p}$. Pokud takové číslo neexistuje, nemůže existovat ani pro b.
(ii) Viz minulý díl.
(iii) Aplikuj Eulerovo kritérium.

Už pomocí těchto jednoduchých vlastností můžeme odvodit zajímavé výsledky. V následujícím tvrzení ještě o kvadratické zbytky nejde.

Tvrzení. *Mersennovo číslo $2^n - 1$ je složené, pokud je n složené.*

Důkaz. Pokud $n = ab$, můžeme $2^n - 1$ upravit pomocí známého vzorce[27]

$$2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1^b = (2^a - 1)\big((2^a)^{b-1} + (2^a)^{b-2} + \cdots + (2^a)^1 + (2^a)^0\big),$$

přičemž oba členy v součinu napravo jsou větší než jedna. Číslo $2^{ab} - 1$ má tedy dva netriviální dělitele, takže je složené.

S pomocí kvadratických zbytků se dá sestrojit případ, kdy podmínka prvočíselnosti n nestačí k prvočíselnosti čísla $2^n - 1$.[28]

Úloha. Nechť čísla $4n + 3$ a $8n + 7$ jsou prvočísla. Pak číslo $M_{4n+3} = 2^{4n+3} - 1$ je složené.

Návod. Například $23 \mid M_{11}$, $47 \mid M_{23}$ nebo $503 \mid M_{251}$.

Dostáváme se k hlavnímu výsledku teorie kvadratických zbytků – kvadratické reciprocitě. Ta nám říká, že pokud víme, zda je prvočíslo p kvadratický zbytek modulo jiné prvočíslo q, můžeme kongruenci „obrátit“ a dozvíme se, zda je q kvadratický zbytek modulo p. Všechno, co jsme dosud dělali, se (s trochou nadsázky) dá považovat za intuitivní. To však není případ kvadratické reciprocity – důvody, proč tato věta platí, rozhodně elementární nejsou.

Věta. (Kvadratická reciprocita) *Nechť p, q jsou lichá prvočísla. Pak platí*

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)\cdot(q-1)}{4}}.$$

Bohužel si neuvedeme důkaz této věty, protože je obtížný a v seriálu nám na něj nezbývá místo. Pokud Tě to zajímá, jistě najdeš rozmanité důkazy v pokročilejších učebnicích teorie čísel nebo na internetu (sám Gauss[29] byl prý kvadratickou reciprocitou natolik nadšen, že ji nazýval „zlatou větou“ a objevil několik různých důkazů).

Ještě si všimni, že kvadratická reciprocita nám říká, že existuje nějaké řešení x kongruencí typu $x^2 \equiv p \pmod{q}$, ale nedává nám žádný nástroj, jak toto řešení najít. Ještě než si ukážeme příklad na využití reciprocity, přidáme dodatek, kterým počítáme kvadratické zbytky v případech, které reciprocita nezahrnuje, tedy pro -1 a 2.

Tvrzení. (Dodatek ke kvadratické reciprocitě) *Pro liché prvočíslo p platí*

(i) $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$,

(ii) $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.

[27] Jak si poctivá čtenářka snadno roznásobí.

[28] Neboli neplatí Mersennova hypotéza, která tvrdí opak.

[29] Carl Friedrich Gauss (1777–1855) byl slavný německý matematik a fyzik, který ovlivnil mnoho matematických disciplín včetně teorie čísel. Jeho mozek prý vážil 1492 gramů.

První tvrzení plyne jednoduše z Eulerova kritéria. Druhé tvrzení je opět těžké, jeho důkaz si tedy dovolíme zamlčet. Spolu s dodatkem se kvadratická reciprocita stává ultimátní zbraní, jak rozhodnout, jestli je něco kvadratický zbytek.

Cvičení. (uvědomovací) Mějme lichá prvočísla p, q. Uvědom si, že $\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right)$ je -1, právě když jsou obě prvočísla tvaru $4k+3$.

Ukažme si tedy, jak se reciprocita používá.

Příklad. Zjisti, zda je 179 kvadratický zbytek modulo 463.

Řešení. Všimneme si, že příklad je zadán tak pěkně, že 179 a 463 jsou prvočísla. Počítejme tedy s využitím tvrzení (i) a (iii) z úvodu kapitoly a s pomocí kvadratické reciprocity:

$$\begin{aligned}\left(\frac{179}{463}\right) &= -\left(\frac{463}{179}\right) = -\left(\frac{105}{179}\right) = -\left(\frac{3\cdot 5\cdot 7}{179}\right) = -\left(\frac{3}{179}\right)\cdot\left(\frac{5}{179}\right)\cdot\left(\frac{7}{179}\right) \\ &= -\left(-\left(\frac{179}{3}\right)\right)\cdot\left(\frac{179}{5}\right)\cdot\left(-\left(\frac{179}{7}\right)\right) = -\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{4}{7}\right) = 1.\end{aligned}$$

Takto jsme dostali, že 179 je kvadratický zbytek modulo 463 (aniž bychom museli najít konkrétní řešení kongruence $x^2 \equiv 179 \pmod{463}$).

Cvičení. Je 365 kvadratický zbytek modulo 1847?

A co na to primitivní prvek?

Ukážeme si důležitou souvislost mezi kvadratickými zbytky a primitivním prvkem. Jak víme, primitivní prvek je takový, že jeho umocňováním dostaneme všechny různé zbytky. Které z nich jsou kvadratické? Odpověď je jednoduchá – jsou to ty, které vzniknou umocněním primitivního prvku q na sudou mocninu. Každá sudá mocnina q je totiž zřejmě kvadratický zbytek. Žádné další číslo už kvadratický zbytek nebude. Počet sudých mocnin mezi zbytky je totiž $(p-1)/2$, což je přesně počet kvadratických zbytků!

Cvičení. Dokaž, že kvadratický zbytek nemůže být (pro lichá prvočísla) primitivním prvkem.

Cvičení. Urči prvočísla p, pro která je q primitivní prvek, právě když je $-q$ primitivní prvek.

Úloha. Mějme prvočíslo p. Ukaž, že p je Fermatovo prvočíslo (tedy tvaru $2^{2^n}+1$) právě tehdy, když je každý kvadratický nezbytek zároveň primitivním prvkem modulo p.

Návod. Uvědom si, kolik je nezbytků a kolik je primitivních prvků modulo p. Tím dokážeš, že Fermatovo prvočíslo podmínku splňuje a že p je tvaru 2^m+1. Kdyby nějaké liché číslo dělilo m, využij vzorečku

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)\big(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \cdots - ab^{2k-1} + b^{2k}\big)$$

a dostaneš spor s prvočíselností p. Proto je m tvaru 2^n.

2. podzimní série – Podobnost a shodnost

Výsledková listina

1.–3.	*František*	*Couf*	1	GZborovPH	3 – 3 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–3.	*Martin*	*Raszyk*	4	G Karviná	3 3 3 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–3.	*Miroslav*	*Stankovič*	4	GPošKošice	– – – 5 5 5 5 5	$25 + i$	**25,00**
4.	*Jakub*	*Svoboda*	4	G KomHavíř	3 3 1 5 5 4 5 5	$24 + i$	**23,94**
5.	*Filip*	*Bialas*	1	GOpatovPH	– 3 3 5 5 4 – 5	22	**23,86**
6.	*Vojtěch*	*Suchánek*	3	GJarošeBO	3 3 3 5 5 4 4 5	23	**23,63**
7.	*Radovan*	*Švarc*	3	G ČTřebová	0 0 3 5 5 4 5 5	24	**23,02**
8.	*Martin*	*Hora*	4	GMikul23PL	3 – – 5 5 4 5 5	24	**22,77**
9.	*Marián*	*Poppr*	3	GJNerudyPH	1 – 3 5 5 4 5 4	23	**22,57**
10.	*Václav*	*Steinhauser*	0	ZŠVranéNVl	3 3 3 4 5 4 – –	19	**22,51**
11.	*Tereza*	*Kislingerová*	1	G Klatovy	3 3 3 5 5 – – –	19	**22,43**
12.	*Martin*	*Surma*	3	GJWolkraPV	2 3 3 5 5 4 5 –	$22 - i$	**22,37**
13.	*Anh Dung*	*Le*	4	G Tachov	– – – 5 5 4 5 5	24	**22,33**
14.	*Pavel*	*Turek*	1	GTomkovaOL	3 3 3 5 5 – – –	19	**21,87**
15.–17.	*Markéta*	*Horová*	2	GMikul23PL	3 3 3 5 5 – – –	19	**21,52**
15.–17.	*Minh Thao*	*Nguyen*	2	GEBenešeKL	3 3 3 5 5 – – –	19	**21,52**
15.–17.	*Marian*	*Poljak*	2	GJŠkodyPŘ	3 3 3 5 5 – – –	19	**21,52**
18.	*Jakub*	*Löwit*	2	GČeskoliPH	3 3 3 5 5 4 – –	20	**21,45**
19.–20.	*Ondřej*	*Darmovzal*	3	GJarošeBO	0 3 3 5 5 4 – –	20	**21,41**
19.–20.	*Václav*	*Rozhoň*	3	GJirsíkaČB	3 3 3 5 5 4 – –	20	**21,41**
21.	*Katarína*	*Krajčiová*	3	GAlejKošic	– – 3 5 5 4 5 –	22	**21,35**
22.	*Mikuláš*	*Zindulka*	3	GMikul23PL	3 3 – 5 5 – 4 –	$20 - i$	**21,21**
23.	*Jan*	*Šorm*	2	GJarošeBO	3 3 3 5 5 – – –	19	**20,77**
24.	*Antonín*	*Češík*	4	SPŠElek PA	3 3 – 5 5 5 – –	$21 + i$	**20,33**
25.	*Anh*	*Le Hoang*	2	GJarošeBO	1 3 3 5 5 – – –	17	**20,12**
26.	*Lukáš*	*Sadlek*	3	G Čadca	3 3 3 5 2 4 – –	18	**19,83**
27.	*Marko*	*Puza*	4	GPošKošice	– 3 0 5 5 4 5 –	$22 - i$	**19,51**
28.	*Kristýna*	*Šmídová*	4	GMensaPH	3 3 3 5 5 4 – –	$20 + i$	**19,43**
29.	*Martin*	*Kopřiva*	2	GMikul23PL	3 3 3 5 2 – – –	16	**19,28**
30.	*Jan*	*Soukup*	3	G Klatovy	3 3 – 5 5 4 4 –	21	**19,14**
31.	*Miroslav*	*Psota*	4	GHlinŽilina	– 2 3 5 5 – – 5	$20 + 2i$	**19,07**
32.	*Eduard*	*Batmendijn*	3	CGStĽubovňa	3 3 – 5 – – – 5	$16 + 2i$	**18,45**
33.	*Zuzana*	*Svobodová*	2	G FrýdlNOs	3 1 2 5 5 – – –	16	**18,43**
34.	*Jakub*	*Šebek*	4	GKepleraPH	3 3 3 5 5 – – –	19	**18,35**
35.	*Karolína*	*Kuchyňová*	3	GMLerchaBO	2 3 3 5 5 – – –	18	**18,31**
36.–37.	*Mihály*	*Kotiers*	2	GHSelyhoKM	0 1 3 5 5 – – –	14	**17,77**
36.–37.	*Tomáš*	*Kuzma*	2	GAB Senec	0 3 3 5 2 1 1 0	14	**17,77**
38.	*Jiří*	*Zeman*	4	GLesníZlín	3 3 3 5 – 4 4 –	$19 - i$	**17,52**
39.	*Petr*	*Lukeš*	4	GNeumannŽR	3 3 3 5 5 – – –	19	**17,44**

40.	*Vojtěch*	*Lanz*	0	GZborovPH	3 2 3 2 – – – –	10	**17,36**
41.	*Daniel*	*Pišťák*	2	GZborovPH	3 2 3 3 5 – – –	16	**17,30**
42.	*Martin*	*Špilar*	3	G Vyškov	2 2 3 3 5 – – –	15	**17,27**
43.	*Jakub*	*Dargaj*	4	GPošKošice	– 3 3 5 5 4 – –	20	**17,23**
44.	*Barbora*	*Hudcová*	4	PORG PH	3 3 2 5 5 – – –	18	**17,22**
45.	*Miroslav*	*Krabec*	4	G KomHavíř	3 3 3 5 5 – – –	19 – *i*	**16,95**
46.–50.	*Jiřina*	*Duspivová*	2	G Kralupy	2 3 3 5 – – – –	13	**16,90**
46.–50.	*Vít*	*Kalisz*	2	FSG Pirna	1 2 – 5 5 – – –	13	**16,90**
46.–50.	*Patricie*	*Klosse*	2	G ČKrumlov	2 3 3 5 – – – –	13	**16,90**
46.–50.	*Andrea*	*Kučerová*	2	G ČKrumlov	3 3 3 4 – – – –	13	**16,90**
46.–50.	*Jan*	*Václavek*	2	G Ústí n O	3 3 2 5 0 – – –	13	**16,90**
51.	*Jiří*	*Češka*	1	CMGProstěj	0 3 3 5 – – – –	11	**16,83**
52.–53.	*Jaromír*	*Mielec*	1	GVolgogrOS	3 3 2 5 – – – –	13	**16,56**
52.–53.	*Anna*	*Steinhauserová*	4	G Dačice	3 3 3 5 5 4 – –	20	**16,56**
54.	*Petr*	*Jakubčík*	0	PORG PH	3 1 – 5 – – – –	9	**16,42**
55.	*Matěj*	*Konečný*	3	G Jírov ČB	3 3 3 5 – 2 – –	16	**16,25**
56.	*Michaela*	*Brezinová*	2	GKomTrebiš	3 – 3 1 5 – – –	12	**16,00**
57.	*Minh Tri*	*Pham*	2	NPorg	1 3 3 5 – – – –	12	**15,52**
58.	*Jan*	*Jurka*	3	GMLerchaBO	3 2 3 5 – – – –	13 – *i*	**15,04**
59.	*Jakub*	*Sláma*	3	GOpatovPH	3 3 1 5 – – – –	12	**14,47**
60.	*Dominik*	*Krasula*	1	G Krnov	3 2 1 3 – 1 – –	10	**14,33**
61.–63.	*Michaela*	*Brabcová*	2	G Jírov ČB	3 1 – 5 – – – 1	10	**14,05**
61.–63.	*Vojtěch*	*Lukeš*	2	G LPika PL	3 2 – 5 – – – –	10	**14,05**
61.–63.	*Peter Kulcsár*	*Szabó*	2	GHSelyhoKM	– – – 5 5 – – –	10	**14,05**
64.	*Kateřina*	*Nová*	1	G Vimperk	3 3 1 1 – – – –	8	**13,81**
65.	*Daniela*	*Šindelářová*	2	GaSOŠ Telč	1 2 0 3 1 0 – 2	9	**13,00**
66.	*Tomáš*	*Fiala*	3	GLedečNSáz	3 2 1 5 – – – –	11	**12,82**
67.	*Kristýna*	*Ilievová*	3	G Milevsko	2 3 3 – 5 – – –	13	**12,70**
68.	*Lenka*	*Kopfová*	0	CZŠSL HnM	0 3 3 – – – – –	6 – *i*	**12,68**
69.	*Marek*	*Vícha*	3	MendelG OP	1 3 – 5 – 1 – –	10	**12,45**
70.	*Zuzana*	*Vlasáková*	4	G Rumburk	3 3 3 5 – – – –	14	**12,22**
71.	*Henrieta*	*Micheľová*	2	GAlejKošic	3 3 3 – – – – –	9	**12,02**
72.	*Michael*	*Bucha*	3	G Zábřeh	3 1 – 4 – – 1 –	9	**11,39**
73.	*Jan*	*Krejčí*	4	G Bílovec	3 1 3 – 5 – – –	12	**10,27**
74.	*Ľudmila*	*Šimková*	4	GPároNitra	– 3 3 5 – – – –	11	**10,11**
75.	*Jan*	*Kadlec*	3	G Klatovy	1 3 – 2 5 – – –	11	**9,49**
76.	*Pavel*	*Souček*	2	G Nymburk	0 2 3 1 – – – –	6	**9,48**
77.	*Michaela*	*Bieliková*	4	G Sereď	3 3 – 5 – – – –	11	**9,32**
78.	*Viktor*	*Němeček*	3	GJMasar JI	1 2 2 5 – – – –	10	**8,90**
79.	*Hana*	*Daňková*	1	G Vimperk	3 1 – – 0 – – –	4	**8,48**
80.–81.	*Lukáš*	*Honsa*	2	G Jírov ČB	– 3 – 2 – – – –	5	**8,17**
80.–81.	*David*	*Peňáz*	2	GNeumannŽR	3 2 0 0 0 – 0 –	5	**8,17**
82.	*Tereza*	*Koberová*	3	G Chrudim	3 3 – – 0 0 – –	6	**8,00**
83.	*Tran Vi Thanh*	*Pham*	4	GNeumannŽR	3 3 3 – – – – –	9	**7,49**
84.	*Lukáš*	*Kubacki*	1	GNadKavaPH	0 3 – – – – – –	3	**6,79**
85.–87.	*Lucie*	*Roškotová*	2	G Turnov	– – 1 2 0 0 1 0	4	**6,76**
85.–87.	*Adam*	*Říha*	2	G ČesLípa	3 0 0 – 1 – – 0	4	**6,76**
85.–87.	*Šimon*	*Tabačko*	2	EvG Košice	3 0 1 – – – 0 –	4	**6,76**
88.	*Markéta*	*Calábková*	3	GJŠkodyPŘ	3 3 – – – – – –	6	**6,58**
89.	*Přemysl*	*Šťastný*	0	G Žamberk	1 1 – – – – – –	2	**6,25**
90.	*Otto*	*Hollmann*	4	GUBalvanJN	3 – – 3 – – – –	6	**6,00**

91.–93.	*Tomáš*	*Flaschka*	2	G Hlučín	3 – – – – – – –	3	**5,27**
91.–93.	*Jaroslav*	*Stránský*	2	G Tišnov	2 1 – – – – 0 –	3	**5,27**
91.–93.	*Tomáš*	*Šácha*	2	SPŠEB Břeclav	3 0 0 – – – 0 –	3	**5,27**
94.	*Irena*	*Bačinská*	4	ŠpMNDaG BA	2 3 – – – – – –	5	**5,00**
95.–96.	*Jan*	*Lukáč*	3	G ČKrumlov	– 3 – – – – – –	3	**4,23**
95.–96.	*Emese*	*Szabó*	3	GZKMJ Gal	3 – – – – – – –	3	**4,23**
97.	*Jakub*	*Hledík*	3	GSŘMRSkuteč	– 3 – – – – – –	3	**3,74**
98.–102.	*Martin*	*Konečný*	2	GStrážnice	0 2 – – – – – –	2	**3,65**
98.–102.	*Jakub*	*Marták*	2	G GolNitra	0 0 1 0 0 1 0 0	2	**3,65**
98.–102.	*Štefan*	*Račák*	2	GTajBanBys	– 1 – 1 0 0 0 0	2	**3,65**
98.–102.	*Adéla*	*Šedová*	2	GJungmanLT	0 1 1 0 0 – 0 –	2	**3,65**
98.–102.	*Jana*	*Vráblíková*	2	GLesníZlín	– 1 0 1 0 – 0 –	2	**3,65**
103.	*Kristýna*	*Šudomová*	2	GValašKlob	1 – – 1 – 0 0 0	2	**3,30**
104.	*Nicholas*	*Čapek*	4	GBNěmcovHK	0 3 – 1 – – – –	4	**3,26**
105.	*Veronika*	*Holubová*	3	PORG PH	0 1 – 1 – – – –	2	**2,88**
106.–108.	*Markéta*	*Ospálková*	1	G Uničov	1 – – – – – – –	1	**2,67**
106.–108.	*David*	*Ucháč*	1	VOŠDoprPH	0 1 – – 0 – – –	1	**2,67**
106.–108.	*Marie*	*Vonzino*	1	GTomkovaOL	– – – 1 – – – 0	1	**2,67**
109.	*Jana*	*Lepšová*	4	G Dobruška	– 3 – – – – – –	3	**2,58**
110.	*Tomáš*	*Valovič*	4	GAHŠ VKrtíš	0 0 – 1 – 1 0 –	2	**2,00**
111.–113.	*Tomáš*	*Beneš*	2	GVráLevice	0 1 0 0 – – – –	1	**1,91**
111.–113.	*Martin*	*Chabada*	2	G Bardejov	0 0 – 0 0 1 – –	1	**1,91**
111.–113.	*Tomáš*	*Velich*	2	GJHroncaBA	0 1 0 0 0 0 0 –	1	**1,91**
114.	*Adam*	*Gálik*	4	GOlivuPopr	0 1 0 0 0 0 0 0	1	**1,00**
115.–128.	*Daniel*	*Backov*	2	G Ružomb	0 – – – – – 0 –	0	**0,00**
115.–128.	*Katarína*	*Behinská*	2	G GolNitra	– – – – – – – 0	0	**0,00**
115.–128.	*Jaroslav*	*Cerman*	2	GJilemnice	0 – – – – – – –	0	**0,00**
115.–128.	*Petr*	*Gintar*	3	MendelG OP	0 – 0 0 0 0 – –	0	**0,00**
115.–128.	*Jakub*	*Hrubý*	2	G Chrudim	0 – – 0 – – – 0	0	**0,00**
115.–128.	*Matěj*	*Kosma*	2	SOŠDoprOS	– – – 0 0 0 0 0	0	**0,00**
115.–128.	*Alena*	*Košáková*	2	G Strakon	– – 0 0 0 0 0 0	0	**0,00**
115.–128.	*Stanislav*	*Kruml*	3	G Chotěboř	0 – 0 – – – – –	0	**0,00**
115.–128.	*Jozef*	*Mišt*	2	GAHŠ VKrtíš	– – – 0 0 – – –	0	**0,00**
115.–128.	*Marina*	*Pogarčenko*	2	GJungmanLT	0 0 0 – 0 0 – 0	0	**0,00**
115.–128.	*Tereza*	*Rašková*	3	GTomkovaOL	– – – 0 – – 0 –	0	**0,00**
115.–128.	*Jáchym*	*Solecký*	1	PORG PH	0 – – – – – – –	0	**0,00**
115.–128.	*Jiří*	*Štrincl*	3	GSRandyJN	0 – – – – – – –	0	**0,00**
115.–128.	*Věra*	*Tesařová*	1	MasG Plzeň	– – 0 – – – – –	0	**0,00**

3. podzimní série – Funkce

Výsledková listina

1.–3.	*František*	*Couf*	1	GZborovPH	3 2 – 5 5 5 5 5	$25 + i$	**25,00**
1.–3.	*Martin*	*Hora*	4	GMikul23PL	3 – – 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–3.	*Radovan*	*Švarc*	3	G ČTřebová	0 0 3 5 5 5 5 5	25	**25,00**
4.	*Pavel*	*Turek*	1	GTomkovaOL	3 2 2 5 4 5 5 5	24	**24,55**
5.	*Martin*	*Surma*	3	GJWolkraPV	3 3 3 5 5 5 5 0	23	**23,41**
6.	*Ondřej*	*Darmovzal*	3	GJarošeBO	3 3 – 5 4 – 5 5	$22 + i$	**23,10**
7.	*Filip*	*Bialas*	1	GOpatovPH	3 3 3 5 4 5 – –	20	**22,94**
8.	*Martin*	*Raszyk*	4	G Karviná	3 3 3 5 4 5 5 5	24	**22,58**
9.	*Lukáš*	*Sadlek*	3	G Čadca	3 0 3 5 5 4 2 –	20	**21,41**
10.	*Jan*	*Jurka*	3	GMLerchaBO	3 3 3 5 4 – 5 –	20	**21,34**
11.	*Jakub*	*Svoboda*	4	G KomHavíř	3 3 2 5 4 5 5 1	22	**20,83**
12.	*Eduard*	*Batmendijn*	3	CGStĽubovňa	3 3 3 5 – – – 5	$19 + i$	**20,73**
13.–14.	*Václav*	*Rozhoň*	3	GJirsíkaČB	3 3 – 5 4 4 – –	19	**20,63**
13.–14.	*Vojtěch*	*Suchánek*	3	GJarošeBO	3 1 3 5 3 5 – 1	19	**20,63**
15.	*Jan*	*Soukup*	3	G Klatovy	3 3 3 5 5 4 5 –	22	**20,50**
16.	*Katarína*	*Krajčiová*	3	GAlejKošic	3 3 – 5 5 5 – –	21	**20,18**
17.	*Matěj*	*Konečný*	3	G Jírov ČB	3 3 2 5 3 4 5 1	20	**20,17**
18.	*Jakub*	*Löwit*	2	GČeskoliPH	3 3 3 5 3 4 2 –	18	**19,87**
19.	*Miroslav*	*Psota*	4	GHlinŽilina	3 – – 5 4 4 5 –	21	**19,65**
20.	*Karolína*	*Kuchyňová*	3	GMLerchaBO	3 3 3 5 5 – – –	19	**19,28**
21.	*Jan*	*Šorm*	2	GJarošeBO	3 3 3 5 3 – – –	17	**19,17**
22.	*Daniel*	*Pišťák*	2	GZborovPH	3 2 2 5 1 5 3 –	18	**19,12**
23.	*Antonín*	*Češík*	4	SPŠElek PA	3 3 3 5 2 4 5 –	20	**18,84**
24.	*Václav*	*Steinhauser*	0	ZŠVranéNVl	3 3 1 5 1 – – –	13	**18,66**
25.–26.	*Vojtěch*	*Lukeš*	2	G LPika PL	3 3 3 – 3 – 3 –	15	**18,59**
25.–26.	*Minh Thao*	*Nguyen*	2	GEBenešeKL	3 – 1 5 2 4 – –	15	**18,59**
27.	*Tereza*	*Kislingerová*	1	G Klatovy	3 3 3 – 2 – 2 –	13	**18,52**
28.	*Jan*	*Alfery*	2	GNPražačPH	2 1 3 5 – 4 – –	15	**18,39**
29.	*Miroslav*	*Stankovič*	4	GPošKošice	3 – – 5 4 4 5 –	21	**18,24**
30.	*Marian*	*Poljak*	2	GJŠkodyPŘ	3 – – 5 2 3 1 –	14	**17,77**
31.	*Mikuláš*	*Zindulka*	3	GMikul23PL	3 3 – 5 2 – 2 –	15	**17,27**
32.	*Miroslav*	*Krabec*	4	G KomHavíř	3 3 3 5 – – 5 –	19	**17,26**
33.	*Marko*	*Puza*	4	GPošKošice	3 – – 5 4 3 5 –	20	**17,06**
34.	*Martin*	*Kopřiva*	2	GMikul23PL	2 0 3 5 3 – – –	13	**16,79**
35.	*Zuzana*	*Svobodová*	2	G FrýdlNOs	3 3 3 5 – – – –	14	**16,69**
36.	*Jan*	*Krejčí*	4	G Bílovec	3 2 2 5 3 – 5 –	18	**16,50**
37.	*Michael*	*Bucha*	3	G Zábřeh	3 3 2 1 – 3 3 0	14	**16,36**
38.	*Marián*	*Poppr*	3	GJNerudyPH	3 3 – 5 – 4 2 –	17	**15,79**
39.	*Markéta*	*Calábková*	3	GJŠkodyPŘ	3 3 2 5 – 2 2 –	15	**15,73**

40.	*Jaromír*	*Mielec*	1	GVolgogrOS	3 – 3 5 1 – – –	12	**15,64**
41.	*Vojtěch*	*Lanz*	0	GZborovPH	3 – – – 2 3 – –	8	**15,39**
42.	*Minh Tri*	*Pham*	2	NPorg	3 3 1 2 – – 2 –	$11 + i$	**14,82**
43.	*Jan*	*Kadlec*	3	G Klatovy	3 3 – 5 3 2 – –	16	**14,52**
44.–45.	*Jakub*	*Sláma*	3	GOpatovPH	3 – 3 1 4 1 – –	12	**14,47**
44.–45.	*Martin*	*Špilar*	3	G Vyškov	3 2 2 1 2 – 3 1	12	**14,47**
46.	*Markéta*	*Horová*	2	GMikul23PL	3 – – 5 2 – – –	10	**14,05**
47.	*Anh Dung*	*Le*	4	G Tachov	– – – 5 4 5 0 5	19	**13,62**
48.	*Vít*	*Kalisz*	2	FSG Pirna	3 2 0 2 2 – – –	$9 + i$	**13,29**
49.	*Dominik*	*Krasula*	1	G Krnov	3 – 1 1 3 1 – –	9	**13,28**
50.	*Anh*	*Le Hoang*	2	GJarošeBO	3 2 1 2 1 – 1 0	9	**13,00**
51.	*Jiří*	*Zeman*	4	GLesníZlín	3 3 – 5 3 – – –	14	**12,49**
52.	*Jakub*	*Dargaj*	4	GPošKošice	3 3 3 5 2 – – –	16	**12,45**
53.	*Petr*	*Lukeš*	4	GNeumannŽR	3 3 – – 2 4 2 –	14	**12,04**
54.	*Michaela*	*Brabcová*	2	G Jírov ČB	3 3 1 – 1 – 0 –	8	**11,89**
55.	*Tomáš*	*Fiala*	3	GLedečNSáz	3 3 1 0 3 – – –	10	**11,79**
56.	*Petr*	*Jakubčík*	0	PORG PH	3 – – – 2 – – –	5	**11,66**
57.–58.	*Lukáš*	*Honsa*	2	G Jírov ČB	3 3 1 – – – – –	7	**10,72**
57.–58.	*Jan*	*Václavek*	2	G Ústí n O	3 – 1 1 1 – 1 1	7	**10,72**
59.–60.	*Jiří*	*Čech*	3	G Strakon	3 – – 5 – – – –	8	**10,30**
59.–60.	*Vít*	*Fojtík*	3	GÚstavníPH	3 – 2 1 – – 1 1	8	**10,30**
61.	*Kateřina*	*Nová*	1	G Vimperk	3 – – – 2 – – –	5	**10,00**
62.	*Anna*	*Steinhauserová*	4	G Dačice	3 2 2 5 2 1 – –	14	**9,66**
63.	*Jakub*	*Hledík*	3	GSŘMRSkuteč	3 – 2 1 2 – – –	8	**9,43**
64.	*Zuzana*	*Vlasáková*	4	G Rumburk	3 3 3 2 – – – –	11	**9,28**
65.	*Lukáš*	*Kubacki*	1	GNadKavaPH	3 – – 1 – – – –	4	**8,48**
66.–67.	*Jaroslav*	*Stránský*	2	G Tišnov	3 – 1 – 1 – – –	5	**8,17**
66.–67.	*Daniela*	*Šindelářová*	2	GaSOŠ Telč	3 – – – 2 – – –	5	**8,17**
68.–70.	*Markéta*	*Ospálková*	1	G Uničov	3 – – – – – – –	3	**6,79**
68.–70.	*David*	*Ucháč*	1	VOŠDoprPH	3 – 0 – – – – –	3	**6,79**
68.–70.	*Marie*	*Vonzino*	1	GTomkovaOL	3 – – – – – – –	3	**6,79**
71.–73.	*Tomáš*	*Kuzma*	2	GAB Senec	3 – 0 – 1 – – –	4	**6,76**
71.–73.	*Anežka*	*Michálková*	2	GaSOŠ Telč	3 – 1 – 0 – – –	4	**6,76**
71.–73.	*Štefan*	*Račák*	2	GTajBanBys	3 1 0 – 0 – 0 –	4	**6,76**
74.	*Adam*	*Gálik*	4	GOlivuPopr	3 1 0 0 1 0 1 0	6	**6,00**
75.–76.	*Tereza*	*Koberová*	3	G Chrudim	3 – – – 1 – – –	4	**5,53**
75.–76.	*Jiří*	*Štrincl*	3	GSRandyJN	3 – – – 1 – – –	4	**5,53**
77.–84.	*Daniel*	*Backov*	2	G Ružomb	3 – – – – – – –	3	**5,27**
77.–84.	*Jiřina*	*Duspivová*	2	G Kralupy	3 – – – – – – –	3	**5,27**
77.–84.	*Patricie*	*Klosse*	2	G ČKrumlov	3 – – – – – – –	3	**5,27**
77.–84.	*Kryštof*	*Kolář*	2	GJarošeBO	3 – – – – – – –	3	**5,27**
77.–84.	*Andrea*	*Kučerová*	2	G ČKrumlov	3 – – – – – – –	3	**5,27**
77.–84.	*Jakub*	*Marták*	2	G GolNitra	– – 0 0 1 2 – –	3	**5,27**
77.–84.	*Adam*	*Říha*	2	G ČesLípa	3 – – – – – – –	3	**5,27**
77.–84.	*Pavel*	*Souček*	2	G Nymburk	3 – – – – – – –	3	**5,27**
85.–87.	*Michaela*	*Biová*	3	MendelG OP	3 – – 0 – – – –	3	**4,23**
85.–87.	*Emese*	*Szabó*	3	GZKMJ Gal	3 – – – – – – –	3	**4,23**
85.–87.	*Kristýna*	*Šmídová*	4	GMensaPH	2 3 – – – – – –	5	**4,23**
88.	*Tomáš*	*Flaschka*	2	G Hlučín	2 – – – – – – –	2	**3,65**
89.	*Kristýna*	*Šudomová*	2	GValašKlob	2 – – – – 0 – –	2	**3,30**
90.	*Marek*	*Vícha*	3	MendelG OP	2 – – – – – – –	2	**2,88**

91.	*Kristýna*	*Ilievová*	3	G Milevsko	3 – – – – – – 0	3	**2,87**
92.	*Otto*	*Hollmann*	4	GUBalvanJN	2 – – – – – – – –	2	**2,00**
93.–94.	*Petr*	*Gintar*	3	MendelG OP	– – – – – – 0 –	0	**0,00**
93.–94.	*Tomáš*	*Velich*	2	GJHroncaBA	0 – 0 – – – – – –	0	**0,00**

1. seriálová série – Teorie čísel

Výsledková listina

1.–10.	*Eduard*	*Batmendijn*	3	CGStĽubovňa	5 5 5	15	**15,00**
1.–10.	*Filip*	*Bialas*	1	GOpatovPH	5 5 5	15	**15,00**
1.–10.	*František*	*Couf*	1	GZborovPH	5 5 5	$15 + i$	**15,00**
1.–10.	*Martin*	*Hora*	4	GMikul23PL	5 5 5	$15 + i$	**15,00**
1.–10.	*Matěj*	*Konečný*	3	G Jírov ČB	5 5 5	15	**15,00**
1.–10.	*Anh Dung*	*Le*	4	G Tachov	5 5 5	15	**15,00**
1.–10.	*Martin*	*Raszyk*	4	G Karviná	5 5 5	$15 + i$	**15,00**
1.–10.	*Jan*	*Soukup*	3	G Klatovy	5 5 5	$15 + i$	**15,00**
1.–10.	*Radovan*	*Švarc*	3	G ČTřebová	5 5 5	15	**15,00**
1.–10.	*Pavel*	*Turek*	1	GTomkovaOL	5 5 5	15	**15,00**
11.	*Jakub*	*Löwit*	2	GČeskoliPH	5 5 4	14	**14,32**
12.	*Jakub*	*Svoboda*	4	G KomHavíř	4 5 5	14	**13,57**
13.	*Ondrej*	*Bínovský*	3	GAnMeTr	5 5 –	$10 + i$	**11,46**
14.	*Jan*	*Jurka*	3	GMLerchaBO	5 – 5	$10 + i$	**11,39**
15.	*Lukáš*	*Sadlek*	3	G Čadca	3 4 2	9	**10,36**
16.	*Martin*	*Kopřiva*	2	GMikul23PL	5 3 –	8	**10,25**
17.	*Markéta*	*Horová*	2	GMikul23PL	4 3 –	$7 + i$	**9,66**
18.	*Jan*	*Šorm*	2	GJarošeBO	5 3 –	8	**9,58**
19.	*Václav*	*Steinhauser*	0	ZŠVranéNVl	2 3 –	5	**8,61**
20.	*Anh*	*Le Hoang*	2	GJarošeBO	1 2 3	6	**8,43**
21.	*Miroslav*	*Stankovič*	4	GPošKošice	5 – 5	$10 + i$	**7,94**
22.	*Mikuláš*	*Zindulka*	3	GMikul23PL	3 3 –	6	**7,47**
23.	*Jan*	*Krejčí*	4	G Bílovec	– 3 5	8	**6,95**
24.	*Marko*	*Puza*	4	GPošKošice	1 3 5	9	**6,72**
25.	*Václav*	*Rozhoň*	3	GJirsíkaČB	5 – –	$5 + i$	**6,69**
26.	*Markéta*	*Calábková*	3	GJŠkodyPŘ	5 – –	$5 + i$	**5,70**
27.	*Karolína*	*Kuchyňová*	3	GMLerchaBO	5 – –	$5 + i$	**5,49**
28.	*Marián*	*Poppr*	3	GJNerudyPH	5 0 1	6	**5,25**
29.	*Petr*	*Lukeš*	4	GNeumannŽR	1 – 5	6	**4,91**
30.	*Antonín*	*Češík*	4	SPŠElek PA	5 – –	$5 + i$	**4,39**
31.	*Katarína*	*Krajčiová*	3	GAlejKošic	5 – –	5	**4,28**
32.	*Jan*	*Kadlec*	3	G Klatovy	1 2 2	5	**4,20**
33.–34.	*Dominik*	*Krasula*	1	G Krnov	1 – 1	2	**3,60**
33.–34.	*Daniel*	*Pišťák*	2	GZborovPH	1 – 2	3	**3,60**
35.–36.	*Minh Thao*	*Nguyen*	2	GEBenešeKL	2 – –	2	**3,47**
35.–36.	*Jan*	*Václavek*	2	G Ústí n O	0 2 –	2	**3,47**
37.	*Jakub*	*Dargaj*	4	GPošKošice	1 4 –	5	**3,26**
38.	*Miroslav*	*Psota*	4	GHlinŽilina	– 4 –	4	**3,04**
39.	*Anna*	*Steinhauserová*	4	G Dačice	2 3 –	5	**2,95**

40.–41.	*Lukáš*	*Kubacki*	1	GNadKavaPH	1	–	–	1	**2,51**
40.–41.	*Kateřina*	*Nová*	1	G Vimperk	1	–	–	1	**2,51**
42.	*Anežka*	*Michálková*	2	GaSOŠ Telč	1	–	–	1	**1,85**
43.	*Jaromír*	*Mielec*	1	GVolgogrOS	1	–	–	1	**1,74**
44.	*Zuzana*	*Svobodová*	2	G FrýdlNOs	1	–	–	1	**1,53**
45.	*Jakub*	*Sláma*	3	GOpatovPH	1	–	–	1	**1,45**
46.	*Tomáš*	*Fiala*	3	GLedečNSáz	1	–	–	1	**1,31**
47.	*Jakub*	*Hledík*	3	GSŘMRSkuteč	1	–	–	1	**1,27**
48.–53.	*Petr*	*Gintar*	3	MendelG OP	0	–	–	0	**0,00**
48.–53.	*Petr*	*Jakubčík*	0	PORG PH	–	0	–	0	**0,00**
48.–53.	*Jakub*	*Marták*	2	G GolNitra	0	0	–	0	**0,00**
48.–53.	*Jozef*	*Mišt*	2	GAHŠ VKrtíš	0	–	–	0	**0,00**
48.–53.	*Markéta*	*Ospálková*	1	G Uničov	0	–	0	0	**0,00**
48.–53.	*Kristýna*	*Šudomová*	2	GValašKlob	0	–	–	0	**0,00**

Pořadí po 3. podzimní sérii

1.	*František*	*Couf*	1	GZborovPH	25	25	25	15	**89,62**	325
2.	*Radovan*	*Švarc*	3	G ČTřebová	25	23	25	15	**88,02**	792
3.	*Martin*	*Hora*	4	GMikul23PL	25	23	25	15	**87,77**	659
4.	*Filip*	*Bialas*	1	GOpatovPH	25	24	23	15	**86,80**	87
5.	*Pavel*	*Turek*	1	GTomkovaOL	24	22	25	15	**85,49**	215
6.	*Jakub*	*Svoboda*	4	G KomHavíř	22	24	21	14	**80,51**	293
7.	*Eduard*	*Batmendijn*	3	CGStĽubovňa	25	18	21	15	**79,18**	104
8.	*Jakub*	*Löwit*	2	GČeskoliPH	23	21	20	14	**78,57**	296
9.	*Martin*	*Raszyk*	4	G Karviná	16	25	23	15	**78,11**	701
10.	*Jan*	*Soukup*	3	G Klatovy	22	19	21	15	**76,56**	587
11.	*Václav*	*Rozhoň*	3	GJirsíkaČB	25	21	21	7	**73,73**	74
12.	*Anh Dung*	*Le*	4	G Tachov	22	22	14	15	**73,28**	1016
13.	*Václav*	*Steinhauser*	0	ZŠVranéNVl	23	23	19	9	**73,25**	170
14.	*Miroslav*	*Stankovič*	4	GPošKošice	22	25	18	8	**72,98**	523
15.	*Katarína*	*Krajčiová*	3	GAlejKošic	25	21	20	4	**70,81**	402
16.	*Lukáš*	*Sadlek*	3	G Čadca	18	20	21	10	**69,75**	70
17.	*Martin*	*Surma*	3	GJWolkraPV	23	22	23	–	**68,37**	175
18.	*Martin*	*Kopřiva*	2	GMikul23PL	21	19	17	10	**67,77**	87
19.	*Ondřej*	*Darmovzal*	3	GJarošeBO	23	21	23	–	**67,42**	67
20.	*Markéta*	*Horová*	2	GMikul23PL	22	22	14	10	**66,75**	67
21.	*Mikuláš*	*Zindulka*	3	GMikul23PL	21	21	17	7	**66,58**	67
22.	*Marko*	*Puza*	4	GPošKošice	23	20	17	7	**66,46**	480
23.	*Karolína*	*Kuchyňová*	3	GMLerchaBO	23	18	19	5	**66,45**	266
24.	*Jan*	*Šorm*	2	GJarošeBO	17	21	19	10	**66,09**	261
25.	*Matěj*	*Konečný*	3	G Jírov ČB	14	16	20	15	**65,69**	274
26.	*Vojtěch*	*Suchánek*	3	GJarošeBO	20	24	21	–	**64,09**	64
27.	*Antonín*	*Češík*	4	SPŠElek PA	20	20	19	4	**63,57**	196
28.	*Miroslav*	*Psota*	4	GHlinŽilina	21	19	20	3	**63,02**	256
29.	*Jan*	*Jurka*	3	GMLerchaBO	13	15	21	11	**61,10**	79
30.	*Minh Thao*	*Nguyen*	2	GEBenešeKL	17	22	19	3	**60,48**	60
31.	*Tereza*	*Kislingerová*	1	G Klatovy	18	22	19	–	**58,65**	59
32.	*Marián*	*Poppr*	3	GJNerudyPH	14	23	16	5	**57,30**	382
33.	*Marian*	*Poljak*	2	GJŠkodyPŘ	17	22	18	–	**56,19**	56
34.	*Zuzana*	*Svobodová*	2	G FrýdlNOs	18	18	17	2	**55,08**	233
35.	*Jan*	*Krejčí*	4	G Bílovec	21	10	17	7	**54,89**	196
36.	*Martin*	*Špilar*	3	G Vyškov	22	17	14	–	**53,91**	54
37.	*Anh*	*Le Hoang*	2	GJarošeBO	11	20	13	8	**52,27**	52
38.	*Vojtěch*	*Lanz*	0	GZborovPH	19	17	15	–	**51,77**	52
39.	*Jakub*	*Dargaj*	4	GPošKošice	19	17	12	3	**51,54**	438
40.	*Anna*	*Steinhauserová*	4	G Dačice	21	17	10	3	**50,35**	542

41.	*Miroslav*	*Krabec*	4	G KomHavíř	16	17	17	–	**50,32**	238
42.	*Daniel*	*Pišťák*	2	GZborovPH	8	17	19	4	**48,25**	387
43.	*Minh Tri*	*Pham*	2	NPorg	17	16	15	–	**47,68**	121
44.	*Dominik*	*Krasula*	1	G Krnov	15	14	13	4	**46,53**	233
45.	*Petr*	*Jakubčík*	0	PORG PH	18	16	12	0	**46,31**	46
46.	*Jan*	*Kadlec*	3	G Klatovy	18	9	15	4	**46,00**	392
47.	*Vojtěch*	*Lukeš*	2	G LPika PL	13	14	19	–	**45,64**	46
48.	*Kateřina*	*Nová*	1	G Vimperk	19	14	10	3	**45,60**	46
49.	*Tomáš*	*Fiala*	3	GLedečNSáz	19	13	12	1	**45,06**	122
50.	*Petr*	*Lukeš*	4	GNeumannŽR	10	17	12	5	**44,45**	208
51.	*Jan*	*Václavek*	2	G Ústí n O	13	17	11	3	**44,09**	44
52.	*Jakub*	*Sláma*	3	GOpatovPH	12	14	14	1	**42,84**	43
53.	*Vít*	*Kalisz*	2	FSG Pirna	12	17	13	–	**42,08**	42
54.	*Daniela*	*Šindelářová*	2	GaSOŠ Telč	21	13	8	–	**42,01**	42
55.	*Michaela*	*Brabcová*	2	G Jírov ČB	16	14	12	–	**41,94**	42
56.	*Kristýna*	*Šmídová*	4	GMensaPH	18	19	4	–	**41,68**	136
57.	*Andrea*	*Kučerová*	2	G ČKrumlov	19	17	5	–	**41,54**	42
58.	*Jaromír*	*Mielec*	1	GVolgogrOS	6	17	16	2	**40,39**	321
59.	*Markéta*	*Calábková*	3	GJŠkodyPŘ	12	7	16	6	**39,77**	213
60.	*Jakub*	*Šebek*	4	GKepleraPH	21	18	–	–	**38,87**	98
61.	*Patricie*	*Klosse*	2	G ČKrumlov	16	17	5	–	**38,17**	38
62.	*Michael*	*Bucha*	3	G Zábřeh	10	11	16	–	**38,05**	38
63.	*Tomáš*	*Kuzma*	2	GAB Senec	13	18	7	–	**37,53**	38
64.	*Jiří*	*Češka*	1	CMGProstěj	19	17	–	–	**35,35**	35
65.	*Jiřina*	*Duspivová*	2	G Kralupy	11	17	5	–	**32,89**	33
66.	*Jakub*	*Hledík*	3	GSŘMRSkuteč	17	4	9	1	**31,84**	134
67.	*Mihály*	*Kotiers*	2	GHSelyhoKM	13	18	–	–	**30,77**	31
68.	*Jiří*	*Zeman*	4	GLesníZlín	–	18	12	–	**30,01**	147
69.	*Lukáš*	*Kubacki*	1	GNadKavaPH	11	7	8	3	**29,16**	29
70.	*Lenka*	*Kopfová*	0	CZŠSL HnM	16	13	–	–	**29,10**	29
71.	*Lukáš*	*Honsa*	2	G Jírov ČB	9	8	11	–	**28,37**	28
72.	*Štefan*	*Račák*	2	GTajBanBys	18	4	7	–	**28,18**	28
73.	*Viktor*	*Němeček*	3	GJMasar JI	19	9	–	–	**28,11**	338
74.	*Michaela*	*Brezinová*	2	GKomTrebiš	12	16	–	–	**27,89**	28
75.	*Jan*	*Alfery*	2	GNPražačPH	9	–	18	–	**27,63**	64
76.	*Barbora*	*Hudcová*	4	PORG PH	10	17	–	–	**27,31**	92
77.	*Anežka*	*Michálková*	2	GaSOŠ Telč	19	–	7	2	**27,20**	27
78.	*Marek*	*Vícha*	3	MendelG OP	11	12	3	–	**26,72**	27
79.	*Zuzana*	*Vlasáková*	4	G Rumburk	4	12	9	–	**25,45**	169
80.	*Marie*	*Vonzino*	1	GTomkovaOL	16	3	7	–	**25,35**	25
81.	*Markéta*	*Ospálková*	1	G Uničov	15	3	7	0	**24,35**	24
82.	*Jaroslav*	*Stránský*	2	G Tišnov	11	5	8	–	**24,16**	24
83.	*Adam*	*Říha*	2	G ČesLípa	12	7	5	–	**23,92**	24
84.	*Peter Kulcsár*	*Szabó*	2	GHSelyhoKM	9	14	–	–	**23,53**	24
85.	*David*	*Ucháč*	1	VOŠDoprPH	14	3	7	–	**23,27**	23
86.	*Henrieta*	*Micheľová*	2	GAlejKošic	11	12	–	–	**22,94**	163
87.	*Tereza*	*Koberová*	3	G Chrudim	9	8	6	–	**22,70**	23
88.	*Emese*	*Szabó*	3	GZKMJ Gal	13	4	4	–	**21,93**	22
89.	*Kristýna*	*Ilievová*	3	G Milevsko	6	13	3	–	**21,35**	265
90.	*Daniel*	*Backov*	2	G Ružomb	16	0	5	–	**21,27**	21
91.	*Kristýna*	*Šudomová*	2	GValašKlob	14	3	3	0	**20,98**	120

92.–93.	*Jakub*	*Marták*	2	G GolNitra	12	4	5	0	**20,81**	21
92.–93.	*Tomáš*	*Flaschka*	2	G Hlučín	12	5	4	–	**20,81**	21
94.	*Michaela*	*Bieliková*	4	G Sereď	11	9	–	–	**20,58**	161
95.	*Přemysl*	*Šťastný*	0	G Žamberk	14	6	–	–	**20,52**	21
96.	*David*	*Peňáz*	2	GNeumannŽR	12	8	–	–	**20,06**	20
97.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	0	GZborovPH	20	–	–	–	**19,76**	20
98.	*Vojtěch*	*Linhart*	3	SlovanG OL	18	–	–	–	**18,15**	18
99.	*Martin*	*Minasjan*	4	GKepleraPH	18	–	–	–	**17,82**	135
100.	*Jana*	*Vráblíková*	2	GLesníZlín	14	4	–	–	**17,70**	18
101.	*Jiří*	*Štrincl*	3	GSRandyJN	11	0	6	–	**16,92**	17
102.	*Martin*	*Konečný*	2	GStrážnice	13	4	–	–	**16,65**	17
103.	*Lucie*	*Roškotová*	2	G Turnov	9	7	–	–	**16,24**	16
104.	*Ľudmila*	*Šimková*	4	GPároNitra	5	10	–	–	**15,47**	78
105.	*Tereza*	*Rašková*	3	GTomkovaOL	15	0	–	–	**15,43**	15
106.	*Otto*	*Hollmann*	4	GUBalvanJN	7	6	2	–	**15,00**	15
107.	*Pavel*	*Souček*	2	G Nymburk	–	9	5	–	**14,75**	15
108.–109.	*Radim*	*Bárta*	3	GJarošeBO	14	–	–	–	**14,47**	14
108.–109.	*Jan*	*Knížek*	3	G Strakon	14	–	–	–	**14,47**	14
110.	*Tran Vi Thanh*	*Pham*	4	GNeumannŽR	7	7	–	–	**14,08**	150
111.–114.	*Petr*	*Červenka*	2	GNadKavaPH	14	–	–	–	**14,05**	14
111.–114.	*Jozef*	*Mišt*	2	GAHŠ VKrtíš	14	0	–	0	**14,05**	14
111.–114.	*Jakub*	*Starý*	2	VOŠKutHora	14	–	–	–	**14,05**	14
111.–114.	*Jakub*	*Ševčík*	2	GKukučPopr	14	–	–	–	**14,05**	14
115.	*Adam*	*Gálik*	4	GOlivuPopr	7	1	6	–	**14,00**	14
116.	*Tomáš*	*Velich*	2	GJHroncaBA	12	2	0	–	**13,80**	14
117.	*Nicholas*	*Čapek*	4	GBNěmcovHK	11	3	–	–	**13,78**	129
118.	*Barbora*	*Pešlová*	3	G Vimperk	13	–	–	–	**13,41**	131
119.–121.	*Matyáš*	*Medek*	4	GMozartovaPA	13	–	–	–	**13,00**	13
119.–121.	*Jakub*	*Schinko*	2	GNadKavaPH	13	–	–	–	**13,00**	13
119.–121.	*Lukáš*	*Zíb*	2	GPísnickPH	13	–	–	–	**13,00**	13
122.–123.	*Jakub Josef*	*Slavík*	1	BiskG Brno	13	–	–	–	**12,64**	13
122.–123.	*Jáchym*	*Solecký*	1	PORG PH	13	0	–	–	**12,64**	13
124.	*Martin*	*Šourek*	3	GCoubTábor	12	–	–	–	**12,45**	12
125.–126.	*Jakub*	*Hrubý*	2	G Chrudim	12	0	–	–	**11,89**	12
125.–126.	*Martin*	*Kutiš*	2	G Humpolec	12	–	–	–	**11,89**	12
127.	*Adéla*	*Šedová*	2	GJungmanLT	8	4	–	–	**11,82**	12
128.	*Pavlína*	*Hartmanová*	2	G Broumov	12	–	–	–	**11,76**	30
129.	*Vojtěch*	*Juříček*	2	G Kralupy	12	–	–	–	**11,70**	39
130.	*Borek*	*Požár*	0	G Rakovník	12	–	–	–	**11,66**	12
131.	*Ondrej*	*Bínovský*	3	GAnMeTr	–	–	–	11	**11,46**	11
132.–133.	*Tomáš*	*Beneš*	2	GVráLevice	9	2	–	–	**11,39**	11
132.–133.	*Martin*	*Chabada*	2	G Bardejov	9	2	–	–	**11,39**	11
134.	*Zuzana*	*Tréglová*	1	G Žatec	11	–	–	–	**11,38**	11
135.	*Michaela*	*Biová*	3	MendelG OP	7	–	4	–	**11,02**	11
136.	*Veronika*	*Holubová*	3	PORG PH	8	3	–	–	**10,88**	11
137.–138.	*Petra*	*Kratochvílová*	2	GHustopeče	11	–	–	–	**10,72**	11
137.–138.	*Daniel*	*Krejbych*	2	G Litomyšl	11	–	–	–	**10,72**	11
139.	*Kryštof*	*Kolář*	2	GJarošeBO	5	–	5	–	**10,54**	11
140.–142.	*Jiří*	*Čech*	3	G Strakon	–	–	10	–	**10,30**	10
140.–142.	*Vít*	*Fojtík*	3	GÚstavníPH	–	–	10	–	**10,30**	10
140.–142.	*Marek*	*Štěpán*	3	SPŠE Fren	10	–	–	–	**10,30**	10

143.–147.	*Dominik*	*Hodan*	1	GNadAlejPH	10	–	–	–	**10,00**	10
143.–147.	*Věra*	*Tesařová*	1	MasG Plzeň	10	0	–	–	**10,00**	10
143.–147.	*The Minh*	*Tran*	1	PČGKarVary	10	–	–	–	**10,00**	10
143.–147.	*Tomáš*	*Valovič*	4	GAHŠ VKrtíš	8	2	–	–	**10,00**	10
143.–147.	*Kateřina*	*Volková*	1	MG Vsetín	10	–	–	–	**10,00**	10
148.	*Jan*	*Erhart*	3	GFXŠaldyLI	9	–	–	–	**9,45**	203
149.–153.	*Cedrik*	*Horčička*	3	G ČesLípa	9	–	–	–	**9,17**	9
149.–153.	*Denisa*	*Kolenčíková*	3	GNámestovo	9	–	–	–	**9,17**	9
149.–153.	*Jan*	*Krůza*	3	GVPavlovic	9	–	–	–	**9,17**	9
149.–153.	*Tomáš*	*Vaníček*	3	G Jírov ČB	9	–	–	–	**9,17**	9
149.–153.	*Peter*	*Vook*	3	GPošKošice	9	–	–	–	**9,17**	9
154.	*Daniel*	*Kočik*	4	GŠroKošice	9	–	–	–	**9,00**	9
155.	*Hana*	*Daňková*	1	G Vimperk	–	8	–	–	**8,48**	8
156.	*Jan*	*Lukáč*	3	G ČKrumlov	4	4	–	–	**8,46**	8
157.	*Lenka*	*Vincenová*	0	GTomkovaOL	8	–	–	–	**8,34**	8
158.–160.	*Katarína*	*Behinská*	2	G GolNitra	8	0	–	–	**8,17**	8
158.–160.	*Matěj*	*Kosma*	2	SOŠDoprOS	8	0	–	–	**8,17**	8
158.–160.	*Dennis*	*Ryšánek*	2	SPŠÚžlabPH	8	–	–	–	**8,17**	8
161.–163.	*Antonie*	*Brožová*	4		8	–	–	–	**8,00**	8
161.–163.	*Jakub*	*Kříž*	4	SPŠ PB	8	–	–	–	**8,00**	8
161.–163.	*Matěj*	*Sháněl*	4	G VysMýto	8	–	–	–	**8,00**	8
164.	*Vendula*	*Kotyzová*	4	WichtG OS	8	–	–	–	**7,76**	113
165.	*Ivona*	*Hrivová*	4	GOkrŽilina	7	–	–	–	**7,38**	157
166.	*Marie*	*Koutná*	4	GTNovákBO	7	–	–	–	**7,00**	7
167.–170.	*Levente*	*Berky*	3	GZKMJ Gal	7	–	–	–	**6,79**	7
167.–170.	*Kristýna*	*Davídková*	1	OA Liberec	7	–	–	–	**6,79**	7
167.–170.	*Anna*	*Filipová*	3	G Kolín	7	–	–	–	**6,79**	7
167.–170.	*Jana*	*Menšíková*	1	G Frýdlant	7	–	–	–	**6,79**	7
171.–173.	*Alena*	*Košáková*	2	G Strakon	7	0	–	–	**6,76**	7
171.–173.	*Ronald*	*Luc*	2	GJarošeBO	7	–	–	–	**6,76**	7
171.–173.	*Šimon*	*Tabačko*	2	EvG Košice	–	7	–	–	**6,76**	7
174.	*Tomáš*	*Konečný*	1	GJirsíkaČB	6	–	–	–	**5,75**	143
175.–177.	*Stanislav*	*Kruml*	3	G Chotěboř	6	0	–	–	**5,53**	6
175.–177.	*Barbora*	*Kubicová*	3	PORG PH	6	–	–	–	**5,53**	6
175.–177.	*Vít*	*Maroščík*	3	G Bohumín	6	–	–	–	**5,53**	6
178.	*Valentína*	*Straková*	4	G Sereď	5	–	–	–	**5,36**	68
179.–181.	*Matej*	*Kašťák*	2	G Hlohovec	5	–	–	–	**5,27**	5
179.–181.	*Marina*	*Pogarčenko*	2	GJungmanLT	5	0	–	–	**5,27**	5
179.–181.	*Tomáš*	*Šácha*	2	SPŠEB Břeclav	–	5	–	–	**5,27**	5

182.–194. *Nevešli se.*

adresa: *Korespondenční seminář*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
web: *http://mks.mff.cuni.cz/*
e-mail: *mks@mff.cuni.cz*