Kombinatorika a pravděpodobnost

3. jarní série Termín odeslání: 8. dubna 2013

Pokud je v nějaké úloze uvažován náhodný výběr, rozumíme tomu tak, že všechny možné výběry mají stejnou pravděpodobnost. Uvažujeme-li náhodné uspořádání, pak všechna pořadí mají stejnou pravděpodobnost.

Úloha 1. (3 body)
Běžný balíček obsahující 52 hracích karet zamícháme a rozdělíme na dvě stejně velké části. Jaká je pravděpodobnost, že červených karet v první části bude stejný počet jako černých karet ve druhé části?

Úloha 2. (3 body)
Zmatený pavouček se objevil ve vrcholu krychle. Každou minutu se musí rozhodnout, zda popoleze do jednoho ze tří hranou sousedících vrcholů, nebo zda se teleportuje do protějšího vrcholu krychle. Protože je zmatený, rozhoduje se vždy náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že se po 2013 minutách bude nacházet ve vrcholu, který je naproti počátečnímu?

Úloha 3. (3 body)
Lukáš si na papír vypsal všechna 2013-ciferná[1] čísla. Viktor si pro změnu na papír vypsal všechna 2014-ciferná čísla a potom vygumoval všechny jejich nenulové cifry (na papíře mu tedy zbyly pouze nuly). Kdo má nyní na svém papíře více cifer a o kolik?

Úloha 4. (5 bodů)
Bylo vypozorováno, že pětasedmdesátiletý člověk má padesátiprocentní šanci, že se dožije alespoň pětaosmdesáti let, ale pouze dvacetiprocentní šanci, že se dožije alespoň devadesáti let. Dále bylo zjištěno, že člověk ve věku osmdesáti let bude s pravděpodobností 25% žít ještě alespoň deset let. S jakou pravděpodobností bude žít osmdesátiletý člověk ještě alespoň pět let?

Úloha 5. (5 bodů)
Do letošní matematické soutěže Náboj[2] se v Praze v kategorii Senioři zaregistrovalo 99 týmů. Organizátoři nyní řeší problém, jak je rozdělit do tří učeben (M1, F1 a F2). Pro jednoduchost předpokládejme, že učebny mají neomezenou kapacitu. Do každé učebny musí být umístěn lichý počet týmů, a navíc nesmí být týmy z tachovského a klatovského gymnázia umístěny současně do učebny F2 (z obou těchto škol je zaregistrovaný právě jeden tým). Kolika způsoby mohou organizátoři rozdělit týmy do místností tak, aby byly všechny uvedené požadavky splněny?

Úloha 6. (5 bodů)
Mirek je velký gurmán a vlastní pytel, ve kterém je 123 karamelek a 321 hašlerek. Aby si své bonbóny pořádně vychutnal, rozhodl se, že je bude konzumovat specifickým způsobem. Když se ráno probudí, začne z pytle náhodně vytahovat jeden bonbón za druhým. První bonbón

[1] Přirozené číslo nikdy nezačíná nulou. To znamená, že například všechna dvojciferná čísla jsou $10, 11, \ldots, 99$.

[2] *http://www.naboj.org/*

rozbalí a sní – každý další bonbón vždy rozbalí, a pokud je tento stejného typu jako všechny předchozí, rovněž jej sní. Je-li jiného typu, vrátí jej zpět do pytle, aby si pro tento den nezkazil chuť. Tím Mirkův ranní rituál končí. Uvedeným způsobem konzumuje Mirek bonbóny každý den až do chvíle, kdy už v pytli žádný nezbyde. Jaká je pravděpodobnost, že posledním snězeným bonbónem bude karamelka?

Úloha 7. (5 bodů)

Mějme v rovině lomenou čáru, která se skládá ze 37 úseček, není uzavřená (tj. začíná jinde, než končí) a nikde sama sebe neprotíná, ani se sama sebe nedotýká. Každou z těchto 37 úseček „protáhneme“ na přímku. Kolik nejméně různých přímek můžeme takto dostat?

Úloha 8. (5 bodů)

Třicet žáků třídy 3.B lze jednoznačně uspořádat podle jejich studijních výsledků. Všichni tito žáci mají navíc stejný počet kamarádů a kamarádství je vzájemné (tj. pokud je Horáček kamarád Pažouta, pak je také Pažout kamarád Horáčka). Řekneme, že žák je *nadprůměrný*, pokud má lepší výsledky než nadpoloviční většina jeho kamarádů. Jaký největší počet nadprůměrných žáků může chodit do 3.B?

Kombinatorika a pravděpodobnost

3. jarní série Vzorové řešení

Pokud je v nějaké úloze uvažován náhodný výběr, rozumíme tomu tak, že všechny možné výběry mají stejnou pravděpodobnost. Uvažujeme-li náhodné uspořádání, pak všechna pořadí mají stejnou pravděpodobnost.

Úloha 1.

(68; 67; 2,97; 3,0)

Běžný balíček obsahující 52 hracích karet zamícháme a rozdělíme na dvě stejně velké části. Jaká je pravděpodobnost, že červených karet v první části bude stejný počet jako černých karet ve druhé části? *(Filip Hlásek)*

Řešení:

Označme počet červených karet v první části balíčku n. Protože v každé části máme 26 karet, je počet černých karet v první části roven $26 - n$. V balíčku je 26 karet každé barvy, tedy ve druhé části je $26 - (26 - n) = n$ černých karet. Tedy červených karet v první části je vždy stejně jako černých karet ve druhé části, proto pravděpodobnost tohoto jevu je rovna jedné (tj. 100%).

Poznámky:

Při opravování se ukázalo, že nejtěžší na této úloze bylo vydělit počet karet v balíčku dvěma. Hned dva řešitelé tvrdili, že $\frac{52}{2} = 36$, jednomu vyšlo pro změnu 21. *(Míša Hubatová)*

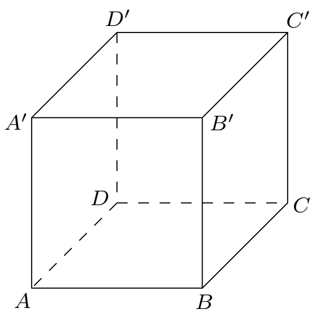
Úloha 2.

(53; 49; 2,66; 3,0)

Zmatený pavouček se objevil ve vrcholu krychle. Každou minutu se musí rozhodnout, zda popoleze do jednoho ze tří hranou sousedících vrcholů, nebo zda se teleportuje do protějšího vrcholu krychle. Protože je zmatený, rozhoduje se vždy náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že se po 2013 *minutách bude nacházet ve vrcholu, který je naproti počátečnímu?* *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Označme si vrcholy kocky klasickým spôsobom A, B, C, D, A', B', C', D' a predpokladajme, že pavúčik začína vo vrchole A.



Po prvej minúte sa nachádza v niektorom z vrcholov B, D, A' alebo C', v každom s rovnakou pravdepodobnosťou. Z ľubovoľného z týchto vrcholov má opäť 4 možnosti, kam sa dostane počas nasledujúcej minúty: vrcholy A, C, B' a D'. Môžeme si všimnúť, že ani jedna z týchto dvoch skupín neobsahuje dva vrcholy, medzi ktorými vie pavúčik priamo prechádzať, preto musí skupiny na svojej ceste nutne striedať.

Po 2012 minútach je teda pavúčik v niektorom z vrcholov A, C, B' a D'. Z každého z nich má na nasledujúci krok 4 možnosti, medzi ktorými si náhodne vyberie, z toho jedna je požadovaný vrchol C'. Teda do vrcholu oproti svojej počiatočnej polohe sa dostane s pravdepodobnosťou $\frac{1}{4}$.

Poznámky:

Táto úloha nebola ťažká, čo sa prejavilo aj v počte správnych riešení. Až na niekoľko málo výnimiek ste úlohu riešili viac alebo menej podobne vzoráku. Žiaľ sa našli aj prípady, kde ste síce dokázali striedanie štvoríc po každej minúte, ale neodvôdnili ste, prečo majú všetky 4 body rovnakú šancu. Pretože je to v podstate polovica celého dôkazu, takýmto riešeniam som jeden bodík ubral. *(Peter „πtr“ Korcsok)*

Úloha 3.

(50; 43; 2,56; 3,0)

Lukáš si na papír vypsal všechna 2013-ciferná[3] čísla. Viktor si pro změnu na papír vypsal všechna 2014-ciferná čísla a potom vygumoval všechny jejich nenulové cifry (na papíře mu tedy zbyly pouze nuly). Kdo má nyní na svém papíře více cifer a o kolik? *(Pepa Tkadlec, Mirek Olšák)*

Řešení (podle Martina Sýkory):

Na počátku má Viktor na papíře desetkrát více čísel než Lukáš. Jestliže smaže každému číslu první (zřejmě nenulovou) cifru, budou mít všechna Lukášova a Viktorova čísla stejný počet cifer, počítáme-li i nuly na začátku. Tedy Viktorova čísla budou mít dohromady desetkrát více cifer než Lukášova, přičemž na Viktorově papíře budou všechny možné 2012-tice složené z cifer 0 až 9 stejně zastoupené (každá právě devětkrát). Po smazání všech nenulových číslic mu proto zbyde desetina cifer, což je právě tolik, kolik má na papíře Lukáš.

Poznámky:

Většina z vás úlohu vyřešila správně. Skoro všichni jste potřebovali vyjádřit počet cifer, který zbude Lukášovi a Viktorovi, explicitně jako $9 \cdot 2013 \cdot 10^{2012}$, ale i toto řešení vedlo k cíli. Ti, kteří úlohu nevyřešili, většinou přehlédli nějakou drobnost, například popletli počty čísel a cifer. *(Petr Ryšavý)*

Úloha 4.

(64; 64; 4,97; 5,0)

Bylo vypozorováno, že pětasedmdesátiletý člověk má padesátiprocentní šanci, že se dožije alespoň pětaosmdesáti let, ale pouze dvacetiprocentní šanci, že se dožije alespoň devadesáti let. Dále bylo zjištěno, že člověk ve věku osmdesáti let bude s pravděpodobností 25% žít ještě alespoň deset let. S jakou pravděpodobností bude žít osmdesátiletý člověk ještě alespoň pět let? *(Alexander „Olin“ Slávik)*

Řešení:

Označme p pravděpodobnost, že se 75-letý dožije 80, q že se 80-letý dožije 85 a konečně r, že se 85-letý dožije 90. Budeme chtít spočítat q.

Pravděpodobnost, že se 75-letý dožije ještě 10 let, je pq – musí se nejprve dožít 80 a potom 85. Podle zadání víme, že $pq = 0{,}5$. Obdobně pravděpodobnost, že se 75-letý dožije 90, je $pqr = 0{,}2$. Konečně pravděpodobnost, že se 80-letý dožije 90, je $qr = 0{,}25$.

[3] Přirozené číslo nikdy nezačíná nulou. To znamená, že například všechna dvojciferná čísla jsou $10, 11, \ldots, 99$.

Nyní už máme dostatek informací pro vyjádření q ze zadaných hodnot:

$$q = \frac{pq \cdot qr}{pqr} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}25}{0{,}2} = 0{,}625.$$

Tedy pravděpodobnost, že se 80-letý dožije 90, je 62,5%.

POZNÁMKY:
Úlohu bylo velmi snadné vyřešit, sepsání bylo obtížnější. Za formálně nejlepší řešení bych chtěl pochválit *Martina Raszyka*, úlohu řešil velmi precizně pomocí podmíněné pravděpodobnosti. Vytknout se nedal ani „statistický“ přístup, kdy si řešitel sestavil typický vzorek např. 100 lidí a z pravděpodobností spočítal, kolik se jich typicky dožije daného věku. Všichni jistě tušíme, že ne vždy se ze 100 lidí přesně 20 lidí dožije 90, avšak pro dopočtení správného výsledku tento přístup dostačuje. *(Jakub „Roman“ Klemsa)*

Úloha 5.

(33; 27; 3,73; 5,0)

Do letošní matematické soutěže Náboj[4] se v Praze v kategorii Senioři zaregistrovalo 99 týmů. Organizátoři nyní řeší problém, jak je rozdělit do tří učeben (M1, F1 a F2). Pro jednoduchost předpokládejme, že učebny mají neomezenou kapacitu. Do každé učebny musí být umístěn lichý počet týmů, a navíc nesmí být týmy z tachovského a klatovského gymnázia umístěny současně do učebny F2 (z obou těchto škol je zaregistrovaný právě jeden tým). Kolika způsoby mohou organizátoři rozdělit týmy do místností tak, aby byly všechny uvedené požadavky splněny?

(Michal Szabados)

ŘEŠENÍ:
Každému týmu kromě tachovského a klatovského přidělíme jednu ze tří učeben, což lze provést 3^{97} způsoby. Rozdělili jsme takto lichý počet týmů, takže nastala jedna ze dvou následujících situací:

(i) V každé učebně je lichý počet týmů. Zbylé dva týmy tedy musíme umístit společně, abychom neporušili paritu, ale ne do F2. Máme tedy dvě možnosti.
(ii) V jedné učebně je lichý počet týmů a v dalších dvou sudý. Tachovský tým musíme umístit do jedné z učeben se sudým počtem týmů a klatovský pak do té druhé, tedy máme taktéž dvě možnosti.

Protože pro každé rozdělení prvních 97 týmů můžeme právě dvěma způsoby přiřadit učebnu klatovskému a tachovskému týmu, je celkový počet možností roven $2 \cdot 3^{97}$.

POZNÁMKY:
Všeobecně nejčastější chybou bylo buď to, že jste předpokládali, že týmy kromě klatovského a tachovského jsou „nerozeznatelné“, a tedy záleží jen na počtu týmů v jednotlivých třídách a umístění našich pojmenovaných týmů, nebo jste si mysleli, že týmy jsou seřazené a vy se mezi ně snažíte strčit dvě „závory“, které vám týmy rozdělí do tří místností, a poté jste od toho odečítali možnosti, kdy klatovští a tachovští jsou spolu v F2. Neřešili jste tak vůbec, kolika způsoby je můžeme takto uspořádat, a zároveň jste neřešili problém, jestli nepočítáme něco dvakrát, což činí celý tento postup ultra obtížným. Další postup se snažil za pomoci dvou sum přes liché indexy spočítat počet všech možných rozdělení s lichými počty týmů ve třídách. K jeho zdárnému dořešení bylo ale potřeba znát součet poloviny řádku v Pascalově trojúhelníku a hlavně si pak všimnout, že sčítáme liché členy binomického rozvoje $(1+2)^{99}$, které umíme sečíst například tak, že k tomuto rozvoji přičteme $(1-2)^{99}$ a podělíme dvěma. Úvaha s binomickým rozvojem ale byla pro většinu řešitelů konečnou, a proto bych pro příště snad jen mohl poradit, že déle se zamýšlet nad způsobem řešení a mít méně práce se samotným provedením se prostě vyplácí.

(Lukáš Zavřel)

[4] *http://www.naboj.org/*

Úloha 6. (27; 18; 3,19; 4,0)

Mirek je velký gurmán a vlastní pytel, ve kterém je 123 karamelek a 321 hašlerek. Aby si své bonbóny pořádně vychutnal, rozhodl se, že je bude konzumovat specifickým způsobem. Když se ráno probudí, začne z pytle náhodně vytahovat jeden bonbón za druhým. První bonbón rozbalí a sní – každý další bonbón vždy rozbalí, a pokud je tento stejného typu jako všechny předchozí, rovněž jej sní. Je-li jiného typu, vrátí jej zpět do pytle, aby si pro tento den nezkazil chuť. Tím Mirkův ranní rituál končí. Uvedeným způsobem konzumuje Mirek bonbóny každý den až do chvíle, kdy už v pytli žádný nezbyde. Jaká je pravděpodobnost, že posledním snězeným bonbónem bude karamelka? *(Mirek Olšák)*

Řešení:

To, že Mirek sní jako poslední karamelku, znamená, že v rámci jezení dojdou hašlerky jako první.

Uvažme nejprve jeden Mirkův ranní rituál a obecnou situaci, kdy je před rituálem v pytli $h \neq 0$ hašlerek a $k \neq 0$ karamelek. Bude nás zajímat pravděpodobnost, že Mirkovi v tomto dni dojdou všechny hašlerky, a stejně tak nás bude zajímat pravděpodobnost, že Mirkovi dojdou v tomto dni všechny karamelky.

Náhodné vybírání bonbónů z pytle si můžeme představit jako náhodné uspořádání všech bonbónů do posloupnosti dlouhé $k+h$ a následně postupné braní bonbónů od začátku. K tomu, aby došly všechny karamelky, je třeba, aby byly v posloupnosti nejprve všechny karamelky a až po nich všechny hašlerky. Obdobně, aby došly všechny hašlerky, musí posloupnost vypadat přesně obráceně – nejprve hašlerky, pak karamelky. Pravděpodobnost, že dojdou všechny hašlerky, je tedy stejná jako pravděpodobnost, že dojdou všechny karamelky (konkrétně je rovna $1/\binom{k+h}{h}$).

V každém dni, kdy jsou ještě v pytli oba druhy bonbónů, tak dojdou s nějakou pravděpodobností všechny hašlerky, se stejnou pravděpodobností dojdou všechny karamelky, a v opačném případě se počet bonbónů změní jiným způsobem tak, že v pytli stále zbudou oba typy bonbónů. Díky tomu je ze symetrie celková pravděpodobnost, že karamelky dojdou jako první, stejná jako celková pravděpodobnost, že hašlerky dojdou jako první. Některý typ bonbónů jako první nutně dojde (když Mirek sní každý den alespoň jeden bonbón), takže odpovědí na úlohu je pravděpodobnost $\frac{1}{2}$.

Poznámky:

Někteří řešitelé se bláhově domnívali, že pravděpodobnost vyjde stejně, jako kdyby Mirek jen náhodně vytahoval bonbóny z pytle. U takové myšlenky by však zkušenějšího řešitele mělo trknout už to, že kdyby byl celý ranní rituál zbytečný, tak by si přece organizátoři nedali takovou práci s jeho popisem. Zbylá řešení byla převážně správně. Úloha měla vlastně dva kroky – ukázat, že pravděpodobnost, že v jednom dni dojdou hašlerky, je stejná jako pravděpodobnost, že dojdou karamelky, a potom z toho usoudit, že výsledek je $\frac{1}{2}$. V prvním kroku si vysloužili *Eduard Batmendijn* a *Karolína Kuchyňová* imaginární bod za vzorové uspořádání bonbónů do posloupnosti, díky kterému se vyhnuli jakémukoli počítání. V druhém kroku jsem uznával v podstatě jakýkoli argument, neb musím uznat, že některé věci jsou prostě jasné. Nejformálnější řešení je indukcí podle počtu bonbónů, které se po prvním ranním rituálu odvolá na indukční předpoklad. V dilematu evidence versus indukce se mi opět líbila věta prvního jmenovaného řešitele: „Z toho už by malo byť jasné, že šanca, že poslednú hašlerku zje skôr ako poslednú karamelku, je $\frac{1}{2}$, ale ak nie je, tak jednoduchý dôkaz je napríklad indukciou cez počet cukríkov: …“

(Mirek Olšák)

Úloha 7. (35; 20; 2,74; 2,0)

Mějme v rovině lomenou čáru, která se skládá ze 37 úseček, není uzavřená (tj. začíná jinde, než končí) a nikde sama sebe neprotíná, ani se sama sebe nedotýká. Každou z těchto 37 úseček

„protáhneme“ na přímku. Kolik nejméně různých přímek můžeme takto dostat?

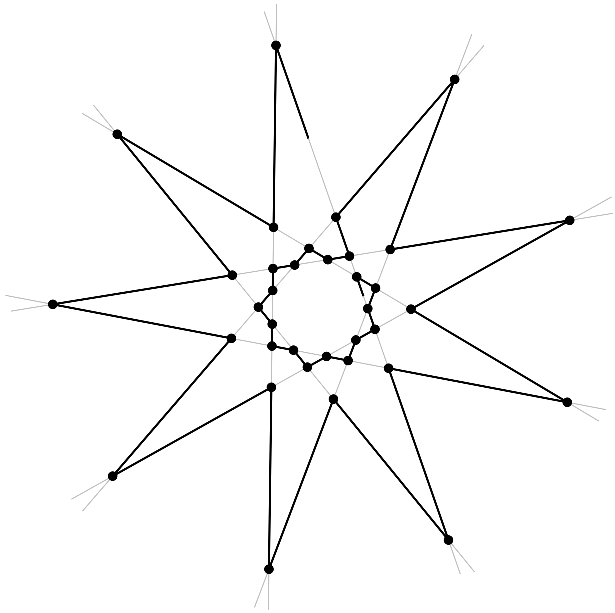
(Martina Vaváčková)

Řešení:

Lomená čára o 37 úsecích mění směr ve 36 bodech. Tyto body jsou průsečíky přímek, jež vzniknou protažením jednotlivých úseků.

Lomená čára tedy musí ležet na alespoň devíti přímkách. Osm nebo méně přímek má totiž dohromady nejvýše $\frac{8\cdot 7}{2} = 28$ průsečíků, devět může mít až $\frac{9\cdot 8}{2} = 36$ průsečíků.

Obrázek níže ukazuje, že devět přímek nám stačí.



Poznámky:

Sešlo se poměrně hodně řešení, z nichž zhruba polovina byla špatně. Pro zajímavost – dva řešitelé tvrdili, že minimum je dvacet přímek, jeden tvrdil, že osmnáct, tři řešitelé byli přesvědčeni o třinácti, další tři se shodli na dvanácti a pět řešitelů uvedlo deset. Z osmnácti správných řešení bylo třináct vzorových, zbylých pět se lišilo obrázkem. *(Martina Vaváčková)*

Úloha 8.

(18; 11; 2,89; 4,5)

Třicet žáků třídy 3.B lze jednoznačně uspořádat podle jejich studijních výsledků. Všichni tito žáci mají navíc stejný počet kamarádů a kamarádství je vzájemné (tj. pokud je Horáček kamarád Pažouta, pak je také Pažout kamarád Horáčka). Řekneme, že žák je nadprůměrný*, pokud má lepší výsledky než nadpoloviční většina jeho kamarádů. Jaký největší počet nadprůměrných žáků může chodit do 3.B?*

(Pepa Tkadlec)

Řešení:

Nadprůměrných žáků může být maximálně 25. Nejprve si ukážeme konstrukci pro 25 žáků. V této konstrukci bude mít každý žák devět kamarádů.

Všichni žáci kromě posledních pěti se budou kamarádit se čtyřmi, kteří je dle studijních výsledků bezprostředně následují (tedy už se automaticky kamarádí i s těmi co jim bezprostředně předcházejí, pokud takoví existují). Prvním pěti studentům chybí postupně pět, čtyři, tři, dva a jeden kamarád, dalším dvaceti studentům chybí jeden kamarád, tedy dohromady jim chybí 35 kamarádů. Konečně posledním pěti studentům chybí po řadě pět, šest, sedm, osm a devět kamarádů. Budeme chtít, aby prvních 25 studentů bylo nadprůměrných. K tomu stačí je skamarádit s posledními pěti studenty, kterým chybí také 35 kamarádství. Při tomto „skamaráďování“ je jediná omezující podmínka ta, že nemůžeme stejnou dvojici studentů skamarádit vícekrát. Tomu se však snadno vyhneme, když jako první seženeme kamarády čtyřem nejlepším žákům.

Nyní dokážeme, že nadprůměrných žáků nemůže být víc než 25. Počet kamarádů každého žáka si označme k a pro spor předpokládejme, že nadprůměrných žáků je více než 25.

Pokud je $k \geq 8$, tak většina kamarádů je alespoň 5. Každý nadprůměrný by se tedy musel kamarádit s aspoň pěti horšími, což se ale posledním pěti žákům nikdy nepovede.

Pro $k = 7$ budeme mít $\frac{7 \cdot 30}{2} = 105$ kamarádství. Víme, že nejlepší žák má sedm horších kamarádů, zbytek nadprůměrných žáků má minimálně čtyři horší kamarády. To dává alespoň $25 \cdot 4 + 7 = 107$ kamarádství, což je opět spor.

Pokud $k \leq 6$, pak existuje $\frac{30k}{2} = 15k$ kamarádství, 26 nadprůměrných žáků musí mít ale dohromady alespoň $26 \cdot \frac{k+1}{2} = 13k + 13$ horších kamarádů. To je však pro naše $k \leq 6$ více:

$$15k < 13k + 13 \Leftrightarrow k < \frac{13}{2}.$$

Poznámky:

Nejčastější chybná řešení byla založena na tom, že se žáci třídili do stejně velkých skupinek, ve kterých se mezi sebou kamarádili. *(Anna Chejnovská)*