Kolmice a tečny

2. JARNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 11. BŘEZNA 2013

ÚLOHA 1. (3 BODY)

V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme H průsečík výšek a D patu výšky na stranu BC. Dokažte, že osy úhlů CHD a ABC jsou na sebe kolmé.

ÚLOHA 2. (3 BODY)

Mějme lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), ve kterém platí, že $|AB| = 2|BC| = 2|CD|$. Ukažte, že potom je strana AD kolmá na úhlopříčku BD.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Mějme trojúhelník ABC. Nakreslíme tři tečny k jeho vepsané kružnici tak, že každá odřízne jiný z vrcholů trojúhelníka. Obvody odříznutých trojúhelníků jsou 1, 2 a 3. Dokažte, že původní trojúhelník byl pravoúhlý.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu A. Na stranách AB a AC najdeme po řadě body E a F takové, že $|BE| = |BD|$ a $|CF| = |CD|$. Kolmice na stranu AB vedená bodem B a kolmice na stranu AC vedená bodem C se protnou v bodě S. Dokažte, že $|SE| = |SF|$.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Jsou dány dvě kružnice, které se protínají v bodech B a C. Jejich společné vnější tečny označme p, q a průsečík těchto tečen A. Body D a E jsou body dotyku kružnic a tečny p. Dokažte, že přímka AB se dotýká kružnice opsané trojúhelníku BDE.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

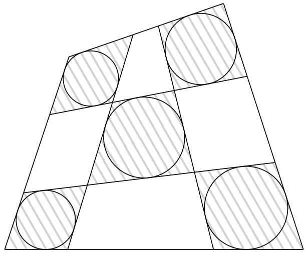
V obdélníku $ABCD$, který splňuje $|AB| = 2|BC|$, je E střed strany CD a P libovolný bod uvnitř strany AB. Označme F a G paty kolmic z A na PD a z B na PC. Ukažte, že čtyřúhelník $EFPG$ je tětivový[1].

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)

Na každé straně čtyřúhelníka zvolíme dva body a dvojice protilehlých bodů spojíme tak, aby se spojnice nekřížily. Původní čtyřúhelník se tak rozdělí na devět menších čtyřúhelníků. Z nich vybereme všechny čtyři rohové a prostřední (na obrázku jsou vyšrafované). Ukažte, že pokud je těchto pět čtyřúhelníků tečnových[2], pak je také původní čtyřúhelník tečnový.

[1] Čtyřúhelník je *tětivový*, jestliže jeho vrcholy leží na jedné kružnici.

[2] Čtyřúhelník je *tečnový*, jestliže mu lze vepsat kružnici.



Úloha 8. (5 bodů)

Je dán trojúhelník ABC a na jeho straně BC libovolný bod D. Označme I, J středy kružnic vepsaných trojúhelníkům ABD a ACD. Dokažte, že všechny kružnice s průměrem IJ procházejí pevným bodem nezávislým na poloze bodu D.

Povídání ke druhé jarní sérii

Druhá jarní série je letos věnována kolmicím a tečnám. Připravili jsme tento úvodní text, který by měl ujasnit základní pojmy a připomenout nejdůležitější tvrzení a věty, které můžete ve svých řešeních používat bez důkazu.

Základní pojmy

Definice. Pravým úhlem rozumíme úhel velikosti $90°$. O dvou přímkách řekneme, že jsou na sebe kolmé, pokud svírají pravý úhel. V obrázku pravý úhel značíme hranatě nebo puntíkem v obloučku.

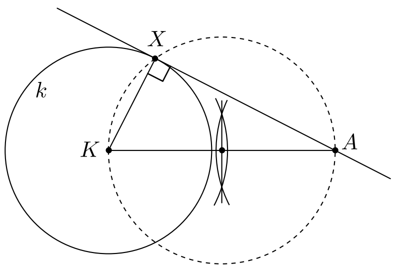
Věta. (Thaletova) *Sestrojme kružnici nad průměrem AB a zvolme na ní libovolný bod C různý od A, B. Potom je trojúhelník ABC pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu C. Popsané kružnici se říká Thaletova.*

Definice. Tečna ke kružnici k je taková přímka, která má s kružnicí k právě jeden společný bod X. Bod X nazýváme bodem dotyku, případně říkáme, že se přímka v bodě X dotýká kružnice k.

Co mají kolmice a tečny společného? Tečny ke kružnici k (její střed označíme K) se dají popsat ještě jiným způsobem – jako přímky, které procházejí daným bodem X (bodem dotyku) a jsou kolmé na KX. Libovolnou kolmost tedy můžeme při troše snahy formulovat jako tečnost a naopak.

Úloha. V rovině je dána kružnice k se středem K a mimo ni bod A. Sestrojte tečnu ke kružnici k, která prochází bodem A.

Řešení. Sestrojíme dvě kružnice o stejném poloměru převyšujícím $\frac{1}{2}|AK|$; jednu se středem v A, druhou v K. Spojíme dva průsečíky těchto dvou kružnic a spojnici protneme s úsečkou AK, čímž získáme střed této úsečky. Nyní můžeme sestrojit kružnici nad průměrem AK. Její průsečík s k označme X. Z Thaletovy věty víme, že úhel AXK je pravý, tedy přímka AX je hledaná tečna.

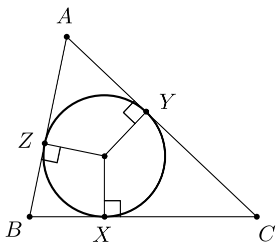


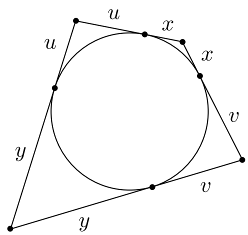
Přenášení tečen

V konstrukci jsme měli na výběr dva průsečíky kružnice k s kružnicí nad průměrem AK. Takto lze sestrojit dvě různé tečny procházející bodem A. Ze symetrie si můžeme všimnout, že délka AX na volbě tečny **nezávisí**! Toto nevinné pozorování může sloužit jako mocný nástroj při počítání některých délek.

Vezměme si například trojúhelník ABC se stranami délek a, b, c (naproti vrcholům A, B, C). Jemu vepsaná kružnice[3] se bude těchto stran dotýkat postupně v bodech X, Y, Z. Takto je obvod trojúhelníka rozdělen na šest částí. Na základě předchozího pozorování máme $|AY| = |AZ|$, $|BX| = |BZ|$ a $|CX| = |CY|$, a vyřešením soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých můžeme dokonce dopočítat

$$
\begin{aligned}
|AY| = |AZ| &= \frac{1}{2}(b + c - a),\\
|BY| = |BZ| &= \frac{1}{2}(c + a - b),\\
|CY| = |CZ| &= \frac{1}{2}(a + b - c).
\end{aligned}
$$





Podobně můžeme postupovat, pokud je kružnice vepsána čtyřúhelníku. Označíme-li si délky jednotlivých tečen jako na obrázku[4], vidíme, že součet libovolných dvou protějších stran dává $u + v + x + y$. Z toho můžeme odvodit charakterizaci tečnových[5] čtyřúhelníků:

Tvrzení. *Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tečnový právě tehdy, když[6] nastává rovnost $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$.*

Další poznatky

Při zacházení s tečnami a kolmými přímkami lze často uplatnit i další věty.

Věta. (O obvodovém a úsekovém úhlu) *Nechť k je kružnice a AB její tětiva. Pak velikost úhlu $\sphericalangle AVB$ se nemění, probíhá-li bod V jeden z oblouků kružnice k určený tětivou AB.*

Dále platí, že velikost úhlu $\sphericalangle AVB$ je shodná s velikostí úhlu, který s tětivou AB svírá tečna kružnice k vedená bodem A. Přesněji: pro bod X ležící v opačné polorovině určené přímkou AB než bod V platí, že přímka XA je tečnou ke kružnici k právě tehdy, když $|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle AVB|$).

Úhlům AVB a XAB říkáme obvodový a úsekový úhel (vzhledem k oblouku AB).

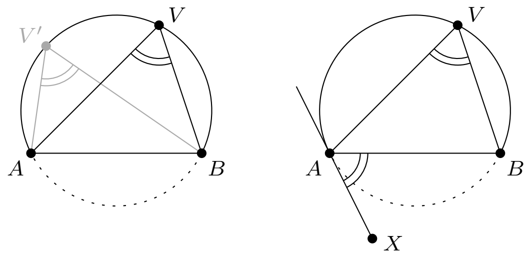
---

[3] Vepsaná kružnice je taková kružnice uvnitř mnohoúhelníka, která se dotýká všech jeho stran.

[4] Ano, použili jsme obrat, který v řešeních vídáme neradi. To proto, že toto povídání nemá ambici být zcela precizním.

[5] Čtyřúhelník nazýváme tečnový, pokud mu lze vepsat kružnici.

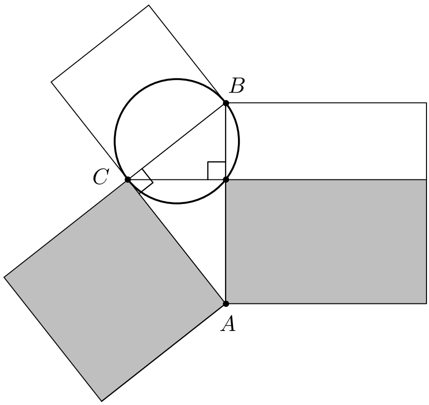
[6] Obrácenou implikaci jsme nedokázali, ale platí.



Věta. (Mocnost bodu ke kružnici) *V rovině je dán bod X a kružnice k. Volme přímku p tak, aby procházela bodem X a protínala kružnici k ve dvou bodech A, B. Pak hodnota součinu $|XA| \cdot |XB|$ nezávisí na volbě přímky p a nazýváme ji mocností bodu X ke kružnici k.*

Pokud leží bod X mimo kružnici a přímku p volíme jako tečnu, body A, B splynou do jednoho, tedy mocnost bodu X je v takovém případě rovna $|XA|^2$.

Příklad. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C. Jaká je mocnost bodu A ke kružnici nad průměrem BC?



Jednak je to $|AC|^2$, jelikož přímka AC je tečnou k této kružnici. Současně, označíme-li P patu výšky z vrcholu C, pak P z Thaletovy věty leží na kružnici nad průměrem BC, tedy mocnost z bodu A je rovna $|AP| \cdot |AB|$. Tím jsme dostali rovnost $|AC|^2 = |AP| \cdot |AB|$, které se říká **Eukleidova věta o odvěsně**.

Provedeme-li nyní totéž ještě pro bod B a kružnici nad průměrem AC, dostaneme známou Pythagorovu větu.

Věta. (Pythagorova) *Je dán trojúhelník ABC. Úhel u vrcholu C je pravý právě tehdy, když*[7] *platí rovnost $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$.*

Na samotný závěr ještě uděláme malou reklamu kreslicím programům. Ty jsou velmi užitečné obzvláště tehdy, pokud se Ti těžko kreslí obrázky od ruky a jsi líný je rýsovat ;-). Za všechny jmenujme například program GeoGebra, který lze zdarma stáhnout (nebo jen spustit v okně prohlížeče) na stránce *http://www.geogebra.org/*.

---

[7] Obrácenou implikaci jsme nedokázali, ale platí.

Kolmice a tečny

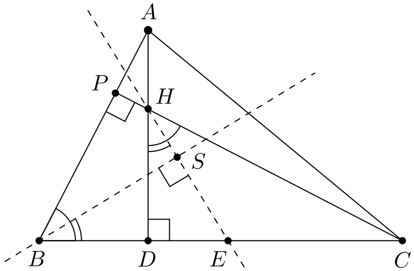
2. jarní série Vzorové řešení

Úloha 1. (56; 55; 2,96; 3,0)

V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme H průsečík výšek a D patu výšky na stranu BC. Dokažte, že osy úhlů CHD a ABC jsou na sebe kolmé. *(Vít „Vejtek“ Musil)*

Řešení:

Označme P patu výšky trojúhelníka ABC na stranu AB. Dále označme průsečíky osy úhlu CHD s osou úhlu ABC a se stranou BC postupně jako S a E. Nakonec pojmenujme β velikost úhlu ABC.



Trojúhelníky CHD a CBP sdílí úhel u vrcholu C a navíc $|\sphericalangle CDH| = |\sphericalangle CPB| = 90°$. Proto jsou podobné (věta *uu*) a shodují se tak i v třetím úhlu

$$|\sphericalangle CHD| = |\sphericalangle CBP| = \beta.$$

Dále trojúhelníky EHD a EBS sdílí úhel u vrcholu E a navíc $|\sphericalangle EHD| = |\sphericalangle EBS| = \frac{\beta}{2}$. Proto jsou podobné a shodují se tak i v třetím úhlu

$$|\sphericalangle ESB| = |\sphericalangle EDH| = 90°,$$

což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:

S úlohou neměl vůbec nikdo problém a některá řešení, využívající například spirální podobnost, byla na jeden řádek. Pro další geometrické úlohy bych snad jen mohl doporučit, abyste při počítání úhlů mysleli na to, co dále opravdu využijete, a ne jen na to, abyste si spočetli velikosti všech úhlů na obrázku. *(Lukáš Zavřel)*

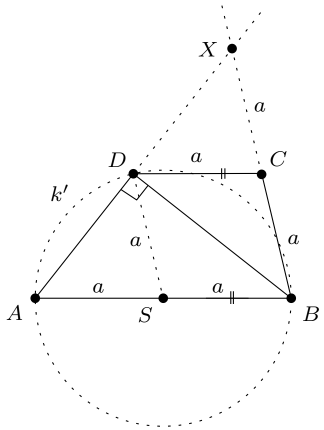
Úloha 2.

(62; 61; 2,89; 3,0)

Mějme lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), ve kterém platí, že $|AB| = 2|BC| = 2|CD|$. Ukažte, že potom je strana AD kolmá na úhlopříčku BD. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Stred strany AB označme S. Vieme, že $|SB| = |CD| = |BC|$ a $SB \parallel CD$. Preto $SBCD$ je kosoštvorec a platí $|SA| = |SB| = |SD|$. Bod D tým pádom leží na Tálesovej kružnici so stredom S a priemerom AB. Preto je uhol ADB pravý.



Iné riešenie:

Predĺžme strany AD a BC a ich prienik označme X. Všimnime si, že CD tvorí strednú priečku v $\triangle ABX$. Tým pádom je $\triangle ABX$ rovnoramenný a DB je jeho výška.

Poznámky:

Úlohu ste dokázali skoro všetci správne vyriešiť. Páčilo sa mi, že prišlo veľa rôznych postupov, ako sa dala úloha zdolať. Väčšina z vás postupovala rovnako ako vo vzoráku, ostatní to dokazovali cez podobnosť alebo doplnenie na kosodĺžnik … Jedine mi prekážalo, že ste automaticky prehlásili $SBCD$ za kosoštvorec aj bez toho, aby ste predtým niečo napísali. Rozhodol som sa za to tentokrát nestrhávať bod, ale ak ste mali ešte nejakú menšiu chybu, tak už som strhával.

(Viktor Szabados)

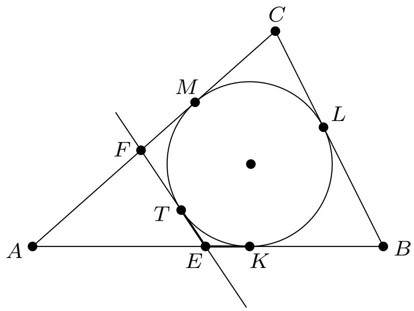
Úloha 3.

(43; 40; 2,84; 3,0)

Mějme trojúhelník ABC. Nakreslíme tři tečny k jeho vepsané kružnici tak, že každá odřízne jiný z vrcholů trojúhelníka. Obvody odříznutých trojúhelníků jsou 1, 2 a 3. Dokažte, že původní trojúhelník byl pravoúhlý. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Označme si K, L, M body dotyku stran trojúhelníka s kružnicí vepsanou (viz obrázek). Dále si označme T bod dotyku tečny, která „odřízla“ bod A, s kružnicí vepsanou. Průsečíky téže tečny se stranami AB, AC označme E, F.



Body K a T jsou body dotyku tečen vedených ke kružnici z téhož bodu (E), a tudíž platí $|EK| = |ET|$. Obdobně $|FT| = |FM|$ (tečny z bodu F) a $|AK| = |AM|$ (tečny z bodu A).

Díky uvedeným rovnostem můžeme upravit:

$$\begin{aligned}\text{obvod}(\triangle AEF) &= |AE| + |EF| + |AF| = \\ &= |AE| + |ET| + |FT| + |AF| = \\ &= |AE| + |EK| + |FM| + |AF| = \\ &= |AK| + |AM|.\end{aligned}$$

A jelikož $|AK| = |AM|$, platí

$$|AK| = |AM| = \frac{1}{2}\,\text{obvod}(\triangle AEF).$$

Stejným způsobem odvodíme, že

$$|BK| = |BL| = \frac{1}{2}\,\text{obvod}(\triangle \text{ u vrcholu } B), \qquad |CL| = |CM| = \frac{1}{2}\,\text{obvod}(\triangle \text{ u vrcholu } C).$$

BÚNO[8] předpokládejme, že obvody trojúhelníků u vrcholu A, B, C jsou po řadě 1, 2 a 3. Potom je $|AB| = |AK| + |KB| = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$, $|BC| = |BL| + |LC| = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ a $|AC| = |AM| + |MC| = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2}$. Nyní již snadno ověříme, že délky stran trojúhelníka ABC splňují Pythagorovu větu, a tedy trojúhelník ABC je pravoúhlý.

Poznámky:
Až na pár výjimek byla všechna řešení správně. Součástí většiny řešení byl i náčrtek, což je potěšující, občas však byl značně nepřehledný. Neodpustím si tedy radu pro ty z vás, kteří tak ještě nečiní: označujete-li v náčrtku délku nějaké úsečky, dbejte na to, aby bylo jasné, jaké jsou její koncové body (a tedy kterou úsečky tím vlastně míníte)! *(Alča Skálová)*

Úloha 4.

(46; 44; 4,78; 5,0)

V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu A. Na stranách AB a AC najdeme po řadě body E a F takové, že $|BE| = |BD|$ a $|CF| = |CD|$. Kolmice na stranu AB vedená bodem B a kolmice na stranu AC vedená bodem C se protnou v bodě S. Dokažte, že $|SE| = |SF|$. *(Pepa Tkadlec)*

[8] Oblíbená matematická zkratka „bez újmy na obecnosti“.

Řešení pomocí Pythagorových vět:

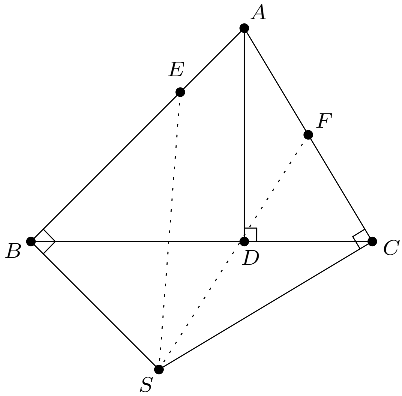
Z Pythagorových vět pro trojúhelníky ABS, ACS dostáváme

$$|AC|^2 + |CS|^2 = |AS|^2 = |AB^2| + |BS|^2.$$

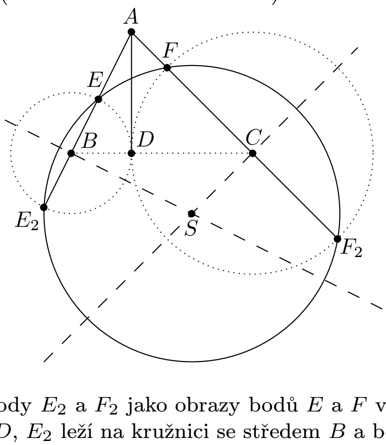
Dále z Pythagorových vět pro trojúhelníky ACD a ABD a zadaných rovností $|CD| = |CF|$ a $|BD| = |BE|$ dostáváme

$$|AC|^2 - |CF|^2 = |AC|^2 - |CD|^2 = |AD|^2 = |AB|^2 - |BD|^2 = |AB|^2 - |BE|^2.$$

Získané rovnice od sebe odečteme a máme $|CS|^2 + |CF|^2 = |BS|^2 + |BE|^2$. Z toho na základě Pythagorových vět pro trojúhelníky CFS a BES již plyne $|FS|^2 = |ES|^2$, a tedy i $|FS| = |ES|$.



Řešení pomocí mocnosti (podle Miroslava Psoty):



Zkonstruujeme si po řadě body E_2 a F_2 jako obrazy bodů E a F ve středových souměrnostech podle B, resp. C. Body E, D, E_2 leží na kružnici se středem B a body F, D, F_2 na kružnici se středem v C. AD je kolmá na BC (spojnici středů), takže AD je tečna obou kružnic. Z mocnosti (viz úvodní text) $|AE| \cdot |AE_2| = |AD|^2 = |AF| \cdot |AF_2|$ dostáváme, že body E, E_2, F, F_2 leží na další kružnici. Přímka BS je osa strany EE_2 a přímka CS je osa strany FF_2, takže bod S je střed kružnice opsané čtyřúhelníku EE_2FF_2. A tedy $|SE| = |SF|$, protože mají obě délku poloměru této kružnice.

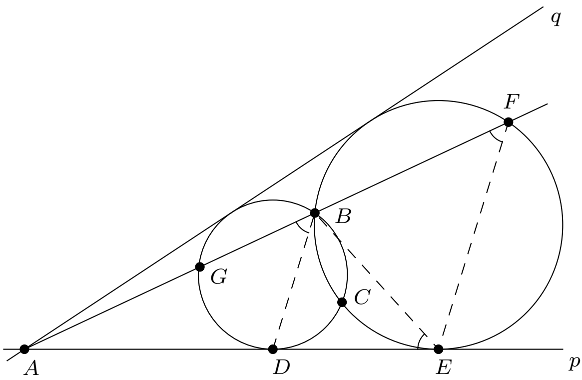
Poznámky:
Většina řešitelů úlohu řešila za pomoci Pythagorových vět. Pouze pár z vás použilo postup s mocností. *(Anna Chejnovská)*

Úloha 5.

(34; 32; 4,53; 5,0)

Jsou dány dvě kružnice, které se protínají v bodech B a C. Jejich společné vnější tečny označme p, q a průsečík těchto tečen A. Body D a E jsou body dotyku kružnic a tečny p. Dokažte, že přímka AB se dotýká kružnice opsané trojúhelníku BDE. *(Vít „Vejtek“ Musil)*

První řešení (obvodový a úsekový úhel):
Označme jako F průsečík přímky AB a kružnice opsané trojúhelníku BCE různý od bodu B. Bod A je jistě střed stejnolehlosti, která zobrazuje kružnici opsanou trojúhelníku CDB na kružnici opsanou trojúhelníku BEF. Body D, E a B, F jsou sobě si odpovídající body v této stejnolehlosti, proto jsou přímky DB a EF rovnoběžné, tedy úhly $\sphericalangle BFE$ a $\sphericalangle ABD$ mají stejnou velikost. Dále podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu platí $|\sphericalangle BFE| = |\sphericalangle BED|$. Celkem dostáváme rovnost $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BED|$ a přímka AB je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BDE podle téže věty.



Druhé řešení (mocnost):
Označme navíc jako G průsečík přímky AB a kružnice opsané trojúhelníku BCD různý od B. Z mocnosti bodu A k zadaným kružnicím máme

$$|AD|^2 = |AG| \cdot |AB|,$$
$$|AE|^2 = |AB| \cdot |AF|.$$

Ze stejnolehlosti popsané výše platí

$$\frac{|AB|}{|AG|} = \frac{|AF|}{|AB|},$$

neboli

$$|AB|^2 = |AG| \cdot |AF|.$$

Znásobením prvních dvou rovností a dosazením poslední pak dostáváme

$$|AD|^2 \cdot |AE|^2 = |AB|^2 \cdot |AG| \cdot |AF| = |AB|^4,$$

ekvivalentně $|AD| \cdot |AE| = |AB|^2$ a z mocnosti bodu ke kružnici platí, že přímka AB je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku BDE.

Třetí řešení (kruhová inverze podle Štěpána Šimsy):
Kružnice opsaná trojúhelníku BCD je obrazem kružnice opsané trojúhelníku BCE při kruhové inverzi podle kružnice se středem v bodě A o poloměru $|AB|$, jelikož obě kružnice leží v tomtéž úhlu a procházejí jedním bodem B. Bod D se zřejmě zobrazí do bodu E, a proto musí platit $|AD| \cdot |AE| = |AB|^2$, což z mocnosti bodu A ke kružnici opsané trojúhelníku BDE znamená, že AB je její tečnou.

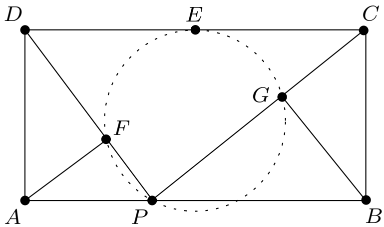
Poznámky:
Většina řešitelů postupovala cestou více či méně elegantního úhlení. Méně z vás pak používalo v řešení mocnost a jediný *Štěpán* předvedl elegantní kruhovou inverzi, za kterou si vysloužil i-čko a publikovaný vzorák. *(Vít „Vejtek“ Musil)*

Úloha 6.

(27; 25; 4,59; 5,0)

V obdélníku $ABCD$, který splňuje $|AB| = 2|BC|$, je E střed strany CD a P libovolný bod uvnitř strany AB. Označme F a G paty kolmic z A na PD a z B na PC. Ukažte, že čtyřúhelník $EFPG$ je tětivový[9]. *(Martin Töpfer)*

Řešení:
Nejprve si uvědomíme, že existuje jediná kružnice k taková, že prochází body E a P a přímka CD je k ní tečnou. Střed této kružnice leží na ose úsečky EP (body E, P leží na kružnici) a na kolmici k CD vedené bodem E (E je bod dotyku tečny). Jelikož tyto dvě přímky nejsou rovnoběžné, je střed k určen jednoznačně.



Nyní ukážeme, že i body F a G leží na této kružnici. Podle Euklidovy věty o odvěsně pro trojúhelník APD platí $|AD|^2 = |DF| \cdot |DP|$. Ze zadání víme, že $|AD| = |DE|$, a tedy $|DE|^2 = |DF| \cdot |DP|$. Protože $|DF| \cdot |DP|$ je mocnost bodu D ke kružnici opsané trojúhelníku PEF, tak i $|DE|^2$ vyjadřuje mocnost bodu D k této kružnici. To nám říká, že DE (resp. CD) je tečnou k této kružnici v bodě E, a tedy kružnice opsaná trojúhelníku PEF je totožná s kružnicí k. Analogicky ukážeme, že i kružnice opsaná trojúhelníku PEG je kružnicí k, a tedy body E, F, G a P leží na jedné kružnici.

Poznámky:
Většina došlých řešení využívala mocnost jako ve vzorovém řešení. Našlo se ale pár ošklivějších řešení, kde se více počítalo. Občas se jen vyjadřovaly délky úseček, ale došlo i na čistě analytické řešení. Je pravda, že úloha od pohledu vypadala „upočítatelně“, protože takřka všude byly pravé úhly, přesto se většinou vyplatí zamyslet nad elegantnějších řešením. To bývá ve výsledku mnohdy o dost jednodušší a člověk si ušetří práci s nezáživným počítáním. Z netradičních řešení mě zaujalo řešení od *Michaely Bielikové*, která úlohu vyřešila pouhým přenášením úhlů.

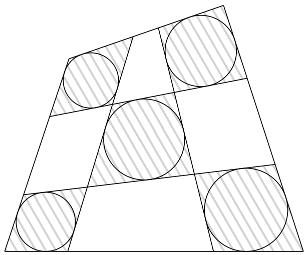
(Martin Töpfer)

[9] Čtyřúhelník je *tětivový*, jestliže jeho vrcholy leží na jedné kružnici.

Úloha 7.

(23; 21; 4,43; 5,0)

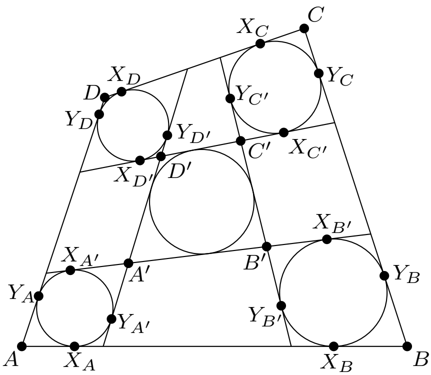
Na každé straně čtyřúhelníka zvolíme dva body a dvojice protilehlých bodů spojíme tak, aby se spojnice nekřížily. Původní čtyřúhelník se tak rozdělí na devět menších čtyřúhelníků. Z nich vybereme všechny čtyři rohové a prostřední (na obrázku jsou vyšrafované). Ukažte, že pokud je těchto pět čtyřúhelníků tečnových[10]*, pak je také původní čtyřúhelník tečnový.*



(Martina Vaváčková)

Řešení:

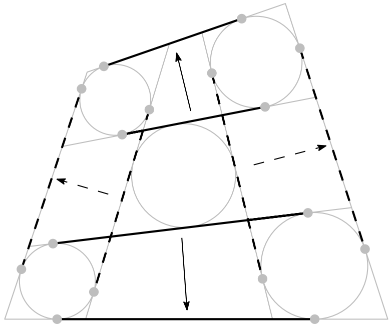
Označme A, B, C, D vrcholy původního čtyřúhelníka, A', B', C', D' příslušné vrcholy prostředního tečnového čtyřúhelníka. Dále označme body dotyku čtyř krajních kružnic jako na obrázku[11].



Prostřední čtyřúhelník je tečnový, a tedy platí $|A'B'| + |C'D'| = |B'C'| + |D'A'|$. Ze symetrie máme $|A'X_{A'}| = |A'Y_{A'}|$, podobně pro B', C' a D'. Platí tedy také $|X_{A'}X_{B'}| + |X_{C'}X_{D'}| = |Y_{B'}Y_{C'}| + |Y_{D'}Y_{A'}|$. Přímky AB a $A'B'$ jsou vnějšími společnými tečnami dvou kružnic, tedy opět ze symetrie dostáváme $|X_AX_B| = |X_{A'}X_{B'}|$, obdobně pro dvojice přímek BC a $B'C'$, CD a $C'D'$, DA a $D'A'$. Odtud $|X_AX_B|+|X_CX_D| = |Y_BY_C|+|Y_DY_A|$. Protože však $|AX_A| = |AY_A|$ (a totéž pro B, C, D), platí $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$, a tedy čtyřúhelník $ABCD$ je tečnový, což jsme chtěli dokázat.

[10] Čtyřúhelník je *tečnový*, jestliže mu lze vepsat kružnici.

[11] Správně bychom to měli rozepsat, ale protentokrát si to odpustíme.



Poznámky:

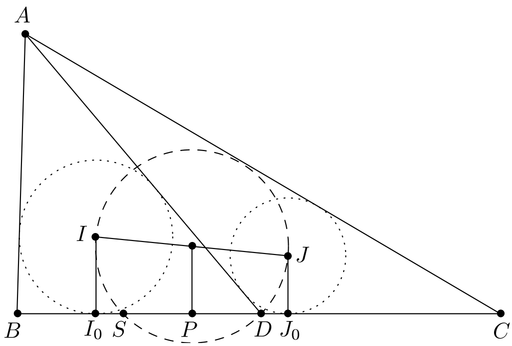
Navzdory tomu, že úloha byla na sedmičku poměrně jednoduchá, se nesešlo zrovna mnoho řešení. Těší mě však, že naprostá většina z nich byla správně. Kladným imaginárním bodem jsem ocenila ty řešitele, kteří se vyhnuli nepřehlednému značení a nezanořili se do světa rovnic, ale naopak stručně a výstižně popsali, v čem řešení spočívá. :) *(Martina Vaváčková)*

Úloha 8.

(13; 13; 5,00; 5,0)

Je dán trojúhelník ABC a na jeho straně BC libovolný bod D. Označme I, J středy kružnic vepsaných trojúhelníkům ABD a ACD. Dokažte, že všechny kružnice s průměrem IJ procházejí pevným bodem nezávislým na poloze bodu D. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:



Nazveme I_0, J_0 a P postupně projekce bodů I, J a středu úsečky IJ na stranu BC. Dále označíme délky úseček: $|BD| = x$, $|AD| = y$ a strany trojúhelníka mají velikosti a, b, c. Nejprve si uvědomme, že DI a DJ jsou osy vedlejších úhlů, tedy úhel IDJ je pravý a bod D leží na kružnici nad průměrem IJ.

Bod středově symetrický s D podle P si označíme S. Ten tedy také leží na kružnici nad IJ, navíc leží na BC. Pokud tedy zjistíme, že vzdálenost $|SB|$ nebude záviset na poloze D, bude kružnice nad IJ procházet stále tímto bodem.

$$
\begin{aligned}
|BI_0| &= \frac{x+c-y}{2},\\
|DJ_0| &= \frac{(a-x)+y-b}{2},\\
|BJ_0| &= x+|DJ_0| = \frac{a+c+x-b}{2},\\
|BP| &= \frac{|BJ_0|+|BI_0|}{2} = \frac{a+c-b+2x}{4},
\end{aligned}
$$

konečně

$$|BS| = 2|BP| - |BD| = \frac{a-b+c}{2}.$$

Jak tedy vidíme, poloha bodu S nezáleží na poloze bodu D a úloha je vyřešena.

Poznámky:
Všechna došlá řešení byla správná, a tak jsem alespoň imaginárními body ohodnotil stručnost, nápaditost, přehlednost a srozumitelnost řešení a v neposlední řadě také čas, který jsem strávil jejich kontrolováním. Obzvláště zabrat mi dal řešitel, který použil osm sinových vět na všechny trojúhelníky, které našel, a poté z nich postupně skládal důkaz. Nebyl ale jediný – i další postupovali podobně komplikovaně. *(Filip Hlásek)*