Triangles

4TH AUTUMN SERIES — DATE DUE: 7TH JANUARY 2013

Jak sis jistě všiml(a), zadání čtvrté série je celé v angličtině. Jde totiž o zvláštní, cizojazyčnou sérii; řešení této série přijímáme rovněž **pouze v anglickém jazyce**. Možná Ti překlad a vlastní sepisování zabere více času než obyčejně, avšak věz, že angličtina je jazyk, ve kterém se „dělá“ většina matematiky, a cizojazyčná série je tak příležitost, jak jí jít vstříc.

PROBLEM 1. (3 POINTS)

Divide the triangle with side lengths 1, 2, and $\sqrt{5}$ into five congruent triangles similar to the original one.

PROBLEM 2. (3 POINTS)

Viktor drew a convex quadrilateral $ABCD$. Then he found a point M inside the quadrilateral such that the triangles ABD and MCD were similar (the vertices correspond respectively). Prove that the triangles AMD and BCD are similar, too.

PROBLEM 3. (3 POINTS)

Martina has an equilateral triangle ABC, where she drew the semicircle with diameter BC which does not intersect other two sides of the triangle. Then she marked points K and L on the curve such that they divided the semicircle into three congruent arcs. Prove that the lines AK and AL divide the side BC into thirds.

PROBLEM 4. (5 POINTS)

Let ABC be a triangle whose A-median is perpendicular to the side AC. Given that $AB = 2 \cdot AC$, determine the measure of the angle BAC.

PROBLEM 5. (5 POINTS)

Filip drew a triangle ABC and denoted the midpoints of the sides BC, CA, and AB by K, L, and M, respectively. The tangent to the circumcircle of the triangle through the vertex A intersects the lines KL and KM at points P and Q, respectively. Prove that the lines CP and BQ are parallel.

PROBLEM 6. (5 POINTS)

Alča has a triangle ABC where she drew a ray from the vertex A that intersects the side BC at point X and the circumcircle of the triangle at point Y. Prove that $\frac{1}{AX} + \frac{1}{XY} \geq \frac{4}{BC}$.

PROBLEM 7. (5 POINTS)

In an acute-angled triangle ABC, let D be the foot of the A-altitude and L the foot of the angle bisector of the angle by vertex B. Prove that $\angle CDL > 45°$.

Problem 8. (5 points)

The incircle of a triangle ABC is tangent to the sides BC, CA, and AB at points D, E, and F, respectively. Denote by i_a, i_b, and i_c the incircles of the triangles AEF, BDF, and CDE, respectively. Prove that the pairwise common external tangents[1] of these three circles (other than the sides of the triangle) are concurrent.

[1] *The common external tangent of two circles* is a line tangent to both the circles which does not intersect the segment joining the circles' centres.

Triangles

4^{TH} AUTUMN SERIES — VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Problem 1.

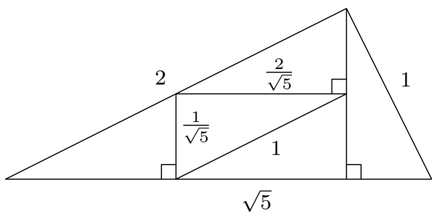
(84; 73; 2,62; 3,0)

Divide the triangle with side lengths 1, 2, *and* $\sqrt{5}$ *into five congruent triangles similar to the original one.* *(Alča Skálová)*

ŘEŠENÍ:

Podle Pythagorovy věty je zadaný trojúhelník pravoúhlý. V pravoúhlém trojúhelníku je obsah roven polovině součinu délek odvěsen, a proto má náš trojúhelník obsah 1. Protože ho máme rozdělit na pět shodných trojúhelníků podobných původnímu, každý z nich bude mít obsah rovný pětině obsahu původního trojúhelníku. Označme si kratší odvěsnu hledaných trojúhelníků a; delší je tedy $2a$. Pro obsahy tedy musí platit $\frac{1}{5} = \frac{1}{2}a \cdot 2a$, odkud máme $a = {}^1\!/\!\sqrt{5}$. Na základě poměrů dopočteme i zbylé délky stran a dostaneme, že strany nových trojúhelníků mají délky 1, ${}^1\!/\!\sqrt{5}$, ${}^2\!/\!\sqrt{5}$.

Výška na přeponu nám trojúhelník rozdělí na dva, z nichž menší je jeden z námi hledaných trojúhelníků (má stejné vnitřní úhly jako ten původní, navíc má přeponu délky 1). Větší trojúhelník rozdělíme středními příčkami na čtyři shodné, které jsou rovněž podobné původnímu, a tím je řešení u konce.



POZNÁMKY:

Skoro všechna řešení byla v pořádku. Největším problémem bylo kromě neporozumění slovu „congruent“, které znamená „shodný“, nikoli „podobný“, to, že několik řešitelů zaslalo pouze obrázek s rozděleným trojúhelníkem bez jakéhokoli komentáře, v horším případě i bez jakéhokoli označení délek či pravých úhlů. Těmto řešením jsem nemohl udělit více jak dva body, neboť vůbec nedokazovala, že všechny menší trojúhelníčky jsou shodné, a navíc ještě podobné původnímu. A malá třešnička na dortu – přestože některým z vás připadalo, že daný trojúhelník je 90–60–30, tak opravdu není (-: *(Lukáš Zavřel)*

Problem 2.

(63; 53; 2,51; 3,0)

Viktor drew a convex quadrilateral $ABCD$. Then he found a point M inside the quadrilateral such that the triangles ABD and MCD were similar (the vertices correspond respectively). Prove that the triangles AMD and BCD are similar, too. *(Viktor Szabados)*

Řešení:

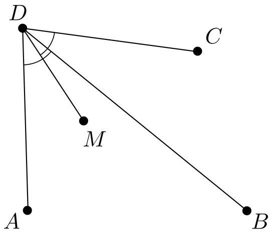
Podobnost trojúhelníků ABD, MCD nám dává

$$\frac{|DA|}{|DB|} = \frac{|DM|}{|DC|}, \quad |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle MDC|.$$

Z toho dopočteme

$$|\sphericalangle ADM| = |\sphericalangle ADC| - |\sphericalangle MDC| = |\sphericalangle ADC| - |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle BDC|.$$

Podle věty *sus* jsou tak podobné i trojúhelníky ADM a BDC.



Poznámky:

Nejčastější chybou v došlých řešeních bylo dopočítávání rovnosti úhlů za použití přičtení nebo odečtení úhlu $|\sphericalangle MDB|$, kdy mnozí na jednu z možných poloh bodu M zapomněli. Naprosto precizní rozebrání všech případů se objevilo jen u pár řešitelů. Vyskytlo se i několik řešení používajících spirální podobnost, díky které je vysloveně vidět, že úloha platí. I když je pravda, že zde to byl trochu kanón na vrabce.

Sám jsem byl překvapen, jak málo slov je potřeba použít – občas by řešení v mongolštině vypadalo téměř stejně. Některá řešení byla dokonce tak stručná, že bylo obtížné poznat, co platí a co se snaží autor dokázat. Navíc si dovolím ještě jedno jazykovědné okénko: věta *sus* (tj. strana-úhel-strana) není v překladu „sentence *sus*“, ale „*sas* condition“, kde *sas* překvapivě znamená side-angle-side. Občas není špatné se trochu zamyslet nad překladem zavedených matematických pojmů. Velkou pochvalu za anglickou formulaci si zaslouží *Mark Karpilovsky*, jehož řešení byla vysloveně radost číst. *(Martin Töpfer)*

Problem 3.

(57; 46; 2,47; 3,0)

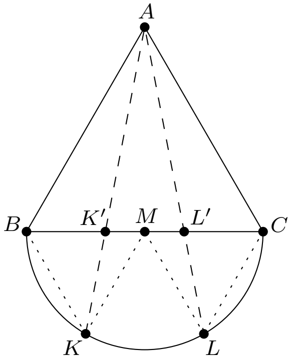
Martina has an equilateral triangle ABC, where she drew the semicircle with diameter BC which does not intersect other two sides of the triangle. Then she marked points K and L on the curve such that they divided the semicircle into three congruent arcs. Prove that the lines AK and AL divide the side BC into thirds. *(Martina Vaváčková)*

Řešení:

Buď M střed úsečky BC a K', L' postupně průsečíky BC s AK a AL. Jelikož body K, L dělí spodní půlkružnici na tři stejné části, platí $|\sphericalangle K'MK| = \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ = |\sphericalangle K'BA|$, takže trojúhelníky $K'MK$ a $K'BA$ jsou si podobné (*uu*). Z této podobnosti dostáváme

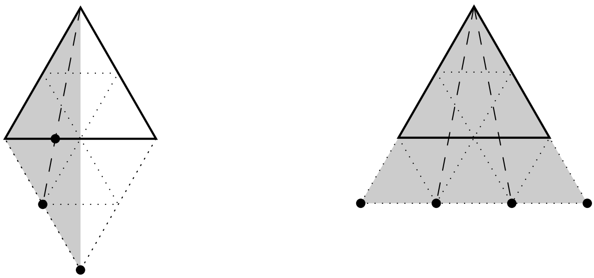
$$\frac{|MK'|}{|BK'|} = \frac{|MK|}{|AB|} = \frac{|BM|}{|BC|} = \frac{1}{2},$$

takže bod K' leží ve třetině úsečky MB. Z toho a ze symetrie máme, že body K' a L' dělí BC na třetiny.



Jiné řešení – myšlenka (dokreslíme jeden bod):
Označme A' osový obraz bodu A podle BC. V trojúhelníku ABA' je zřejmě M střed strany AA' a K střed strany BA', tedy AK a BM jsou těžnice a AK dělí BM v poměru $2:1$. Zbytek jako výše.

Jiné řešení – myšlenka (dokreslíme dva body):
Označme B', C' po řadě průsečíky přímky KL s přímkami AB a AC. Snadno nahlédneme, že trojúhelník $AB'C'$ je rovnostranný a body K, L dělí jeho stranu $B'C'$ na třetiny. Trojúhelníky ABC a $AB'C'$ jsou podobné, a proto rovněž body K', L' dělí stranu BC na třetiny.



Poznámky:
Většina řešitelů si s úlohou poradila – někteří hravě, jiní trochu těžkopádně. Elegantnější řešení využívala vedle podobnosti trojúhelníků často také trojúhelníkovou síť či vlastnosti těžnic, méně elegantní řešení počítala rozličné délky a úhly, oháněla se goniometrickými funkcemi, ba i na kosinovou větu došlo!

Našlo se několik řešitelů, kteří prohlásili, že rozdělí-li vnitřní úhel rovnostranného trojúhelníka dvěma přímkami na tři stejné části, rozseknou tyto přímky protější stranu na třetiny. Z jednoho řešení jsem se dokonce dozvěděla, že to platí obecně (pro rozdělení vnitřního úhlu v jakémkoliv poměru) a že jde o „speciální vlastnost“ rovnostranného trojúhelníka. Rozmyslete si, že to není pravda.

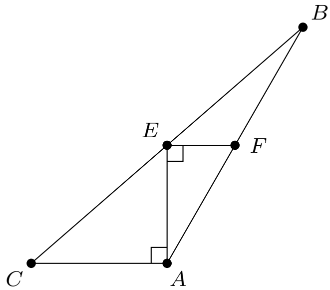
Nakonec bych chtěla pochválit ty, kteří zavedli značení dříve, než jej začali používat, a pokárat ty ostatní. Často se totiž stalo, že se v řešení najednou objevil neznámý bod, který byl v lepším případě dohledatelný v nakresleném obrázku, v horším případě jsem si musela sama domyslet, o jaký bod se jedná. Raději tedy ještě jednou zdůrazňuji, že obrázek by neměl být nedílnou součástí řešení. Vše, co do obrázku nakreslíte navíc (oproti zadání úlohy), byste měli popsat i slovy. *(Martina Vaváčková)*

Problem 4.

(78; 72; 4,49; 5,0)

Let ABC be a triangle whose A-median is perpendicular to the side AC. Given that $AB = 2\cdot AC$, determine the measure of the angle BAC. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:



Označme E, resp. F střed strany BC, resp. AB. Úsečka EF je střední příčka v trojúhelníku ABC a jako taková jednak splňuje $|EF| = \frac{1}{2}|AC|$, jednak je s AC rovnoběžná. Protože je AE podle zadání kolmá na CA, je díky rovnoběžnosti kolmá i na EF. Dále platí $|AF| = \frac{1}{2}|AB| = |AC|$, a je tedy

$$\sin|\sphericalangle EAF| = \frac{|EF|}{|AF|} = \frac{\frac{1}{2}|AC|}{|AC|} = \frac{1}{2}, \quad \text{neboli} \quad |\sphericalangle EAF| = 30^\circ.$$

Požadovanou velikost úhlu CAB spočteme jako $|\sphericalangle CAE| + |\sphericalangle EAF| = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$.

Poznámky:

Ukázalo se, že úloze by spíše slušelo zařazení mezi trojbodovky – došlo opravdu hodně řešení, přičemž téměř všechna byla správně. Chtěl bych však varovat před přílišnou stručností v řešení, která v několika případech vyústila dokonce ve ztrátu bodů. Rovněž bych chtěl upozornit, že je mnohem lepší, pokud všechny objekty, které v řešení používáte (body, úhly, ...), přesně zadefinujete v textu řešení a nenecháte opravovatele, aby jejich definice věštil z náčrtku.

Kromě vzorového řešení se vyskytlo ještě několik variací na něj – některé spočívaly v dokreslení průsečíku přímky AC s kolmicí vedenou bodem B, jiné zase trojúhelník „doplňovaly na rovnoběžník“. Nezanedbatelnou skupinu tvořila i čistě počítací řešení, která se stala opravdovou přehlídkou příslušného aparátu: kromě Pythagorovy věty se objevilo i mnoho vět sinových a kosinových, dvě řešení využívala Apolloniovu větu a své využití našel i jeden téměř neznámý vzorec pro délku těžnice. *(Alexander „Olin“ Slávik)*

Problem 5.

(65; 57; 4,06; 5,0)

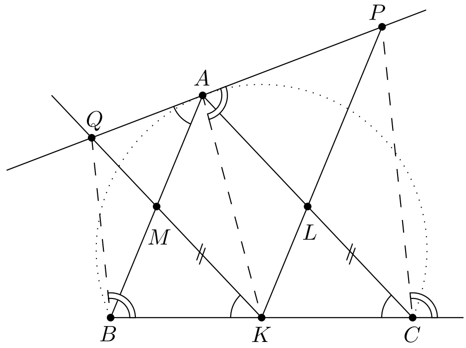
Filip drew a triangle ABC and denoted the midpoints of the sides BC, CA, and AB by K, L, and M, respectively. The tangent to the circumcircle of the triangle through the vertex A intersects the lines KL and KM at points P and Q, respectively. Prove that the lines CP and BQ are parallel. *(Filip Hlásek)*

Řešení:

Střední příčka KM trojúhelníku ABC je rovnoběžná s přímkou AC, a proto jsou souhlasné úhly QKB a ACB shodné. Zároveň je velikost obvodového úhlu ACB nad tětivou AB rovna velikosti odpovídajícího úsekového úhlu QAB. Dostáváme rovnost $|\sphericalangle QKB| = |\sphericalangle QAB|$, ze které plyne, že čtyřúhelník $AQBK$ je tětivový. Analogicky dostaneme, že čtyřúhelník $APCK$ je také tětivový. Na závěr využijeme další známou vlastnost[2] tětivových čtyřúhelníků:

$$|\sphericalangle KBQ| = 180^\circ - |\sphericalangle KAQ| = |\sphericalangle KAP| = 180^\circ - |\sphericalangle KCP|,$$

z čehož plyne dokazovaná rovnoběžnost přímek BQ a PQ (souhlasné úhly).



Jiné řešení:
Opět využijeme rovnoběžnosti přímek KM a AC, díky které mají souhlasné úhly AQM a PAL stejnou velikost. Podobně jsou rovnoběžné také přímky KL a AB, z čehož plyne $|\sphericalangle QAM| = |\sphericalangle APL|$. Trojúhelníky AQM a PAL jsou potom podobné, protože se shodují ve dvou úhlech. Z podobnosti vyplývá shodnost poměrů délek odpovídajících si stran, kterou dále upravíme za použití středů stran trojúhelníku:

$$\frac{|PL|}{|AM|} = \frac{|AL|}{|QM|}, \quad \text{takže} \quad \frac{|PL|}{|BM|} = \frac{|CL|}{|QM|}.$$

Díky zmíněným rovnoběžnostem jsou také úhly QMB a CLP shodné. Trojúhelníky QMB a CLP se tedy shodují v úhlu a poměru délek odpovídajících si stran a jsou proto podobné. Na závěr důkazu dáme dohromady všechny poznatky a dokončíme ho stejně jako u prvního řešení:

$$|\sphericalangle KCP| = |\sphericalangle KCL| + |\sphericalangle LCP| = |\sphericalangle BKM| + |\sphericalangle MQB| = 180^\circ - |\sphericalangle KBQ|.$$

Poznámky:
Ukázali jsme dva odlišné přístupy k této úloze, z nichž každý byl něčím výjimečný. Jak si správně všiml *Štěpán Šimsa*, tak by první řešení dokazovalo úlohu, i pokud by K byl libovolný bod na straně BC a přímka KL (resp. KM) byla rovnoběžná s AB (resp. AC). Druhé řešení se naopak obejde bez kružnice opsané a tečnosti přímky procházející bodem A. Řešitelé, kteří se vydali touto cestou, museli ovšem využít středů stran K a L. Pro ty, kteří jsou zběhlí v počítání úhlů a hledání tětivových čtyřúhelníků, to byla oddechová úloha, ale přesto se našlo nemálo zdlouhavých a nepřehledných řešení. Příště si můžete ušetřit spoustu práce použitím známých tvrzení o obvodových a úsekových úhlech nebo tětivových čtyřúhelnících. Věřím, že jste se v této sérii poučili a nabyté zkušenosti zužitkujete v dalších geometrických úlohách. Na závěr pouze poznamenám, že mě obvykle v řešení geometrické úlohy potěší náčrtek situace, ale tentokrát mě *Jakub Šafin* tak pobavil následujícím výrokem, že jsem mu absenci obrázku odpustil: „*Drawings are for pussies, true men can imagine.*“ *(Filip Hlásek)*

[2] Součet protějších vnitřních úhlů v tětivovém čtyřúhelníku je roven 180°.

Problem 6.

(41; 36; 4,29; 5,0)

Alča has a triangle ABC where she drew a ray from the vertex A that intersects the side BC at point X and the circumcircle of the triangle at point Y. Prove that $\frac{1}{AX} + \frac{1}{XY} \geq \frac{4}{BC}$.

(Alča Skálová)

Řešení:

Levou stranu nerovnice můžeme odhadnout pomocí nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem $1/|AX| + 1/|XY| \geq 2/\sqrt{|AX| \cdot |XY|}$. Z tvrzení o mocnosti bodu ke kružnici máme $|AX| \cdot |XY| = |BX| \cdot |XC|$. Stačí nám tedy ukázat již jen to, že

$$\frac{2}{\sqrt{|BX| \cdot |XC|}} \geq \frac{4}{|BC|},$$

ekvivalentně

$$|BX| + |XC| = |BC| \geq 2\sqrt{|BX| \cdot |XC|},$$

což je také jenom nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

Poznámky:

Našlo se hodně elegantních rychlých řešení, dost z vás se ale jalo rozebírat roztodivné případy a někteří opět hrdinně s nerovností „hýbali“. Zjistili tak sice, že rovnost může nastat jedině tehdy, když je X střed úsečky AY, ale práci si tím spíše přidělali. *(Michael „Majkl“ Bílý)*

Problem 7.

(37; 25; 3,49; 5,0)

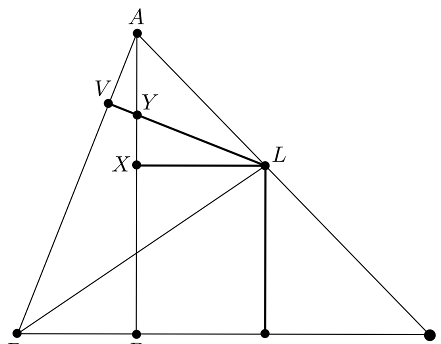
In an acute-angled triangle ABC, let D be the foot of the A-altitude and L the foot of the angle bisector of the angle by vertex B. Prove that $\angle CDL > 45°$. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Označme U, V, X postupně kolmé projekce bodu L na přímky BC, AB, AD. Trojúhelník ABC je ostroúhlý, tedy body D, U, V leží na jeho stranách. Označme ještě jako Y průsečík úseček AD a VL. Bod L leží na ose úhlu ABC, tedy

$$|LU| = |LV| > |LY| > |LX|.$$

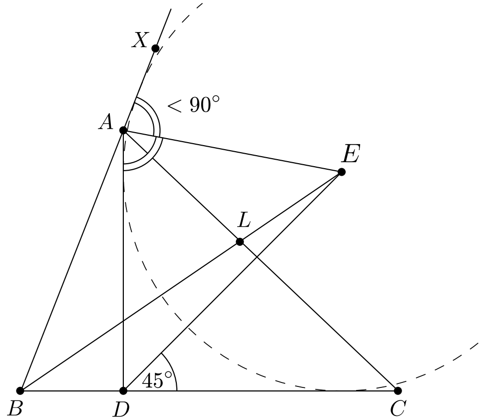
To nám dává $|\sphericalangle LDU| > |\sphericalangle LDX| = 90° - |\sphericalangle LDU|$, čili $|\sphericalangle CDL| > 45°$.



Alternativní řešení:

Nechť E je střed kružnice připsané straně AD trojúhelníku ABD a X nějaký bod na polopřímce opačné k AB. Platí $|\sphericalangle XAE| = |\sphericalangle XAD|/2 < 90°$, zatímco $|\sphericalangle XAC| = 180° - |\sphericalangle BAC| > 90°$.

Proto E leží mimo trojúhelník ABC, a L tak leží uvnitř úsečky BE, tedy v opačné polorovině určené přímkou DE než bod C. Máme tedy $|\sphericalangle CDL| = 45^\circ + |\sphericalangle EDL| > 45^\circ$.



Poznámky:

Všichni jste se s tím nějak poprali. *(Tomáš „Šavlík“ Pavlík)*

Problem 8.

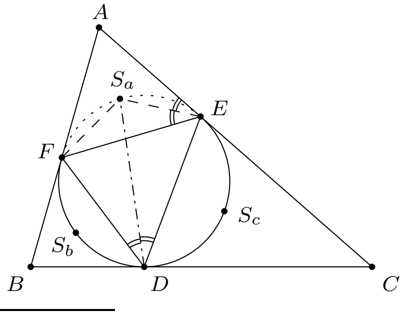
(20; 14; 3,50; 5,0)

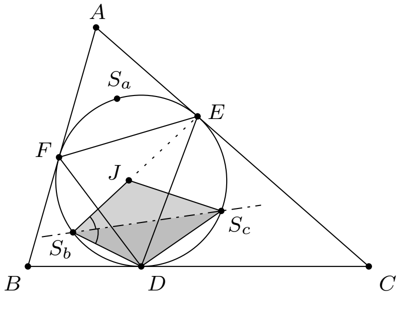
The incircle of a triangle ABC is tangent to the sides BC, CA, and AB at points D, E, and F, respectively. Denote by i_a, i_b, and i_c the incircles of the triangles AEF, BDF, and CDE, respectively. Prove that the pairwise common external tangents[3] of these three circles (other than the sides of the triangle) are concurrent. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Nejdříve dokážeme, že střed kružnice i_a (označme ho S_a) je ve skutečnosti středem kratšího oblouku EF kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

Jelikož ES_a je osa úsekového úhlu AEF příslušného kratšímu oblouku EF kružnice vepsané, prochází středem tohoto oblouku (stejně velké úhly příslušejí stejně dlouhým obloukům). Podobně prochází středem oblouku EF i osa úhlu AFE, takže střed S_a kružnice i_a opravdu splývá se středem oblouku DE. Analogicky dostáváme, že středy S_b, S_c kružnic i_b, i_c jsou středy oblouků DF, DE kružnice vepsané.



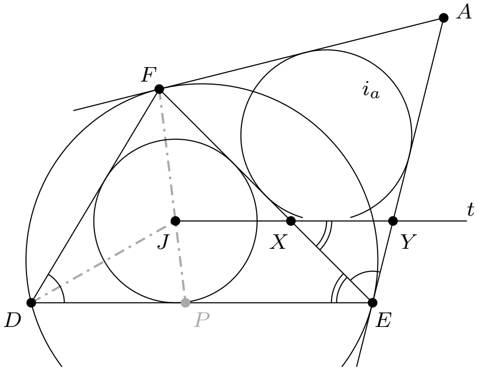


[3] *The common external tangent of two circles* is a line tangent to both the circles which does not intersect the segment joining the circles' centres.

Naopak stejně dlouhým obloukům příslušejí stejně velké obvodové úhly, takže body S_a, S_b, S_c leží na osách vnitřních úhlů trojúhelníka DEF. Označme J jejich průsečík (tedy střed kružnice vepsané trojúhelníku DEF).

Jelikož S_c leží i na ose úhlu DS_bE, máme $|\sphericalangle JS_bS_c| = |\sphericalangle ES_bS_c| = |\sphericalangle DS_bS_c|$ a podobně $|\sphericalangle JS_cS_b| = |\sphericalangle DS_cS_b|$, takže trojúhelníky S_bJS_c a S_bDS_c jsou shodné (*usu*). Bod J je proto osovým obrazem bodu D podle úsečky S_bS_c. Jelikož D leží na jedné společné vnější tečně kružnic i_b, i_c, leží J na té druhé. Tatáž argumentace zajistí, že J leží i na společných vnějších tečnách kružnic i_a, i_c a i_a, i_b, a my jsme hotovi.

Náznak jiného řešení (podle Pepy Svobody):
Po zvážení všech symetrií úlohy stačí ukázat, že čtyřúhelník $AFXY$ odseknutý z $\triangle AEF$ rovnoběžkou s přímkou DE vedenou bodem J je tečnový, což se redukuje na $|FX| = |XY| + |YE|$. Jelikož jsou si trojúhelníky DEF a EXY podobné (*uu*), lze pravou stranu vyjádřit výhradně pomocí prvků trojúhelníka DEF. K dokončení důkazu pak stačí použít to, že osa úhlu dělí protější stranu v poměru délek stran přilehlých a že střed kružnice vepsané dělí osu úhlu ve známém poměru.



Poznámky:
Výše uvedené řešení pracovalo s takzvanými *Švrčkovými body*. Pokud ses s nimi ještě nesetkal, můžeš nahlédnout například do naší knihovny[4].

Všechna došlá řešení se podobala tomu vzorovému (i načrtnutému) v tom smyslu, že „uhádla“ průsečík společných vnějších tečen J a následně ukázala, že jím jednotlivé tečny procházejí. Takové řešení se může zdát trikové, neboť vůbec není jasné, který bod uhádnout. V případě úloh v korespondenčních seminářích ale na tuto práci nejste sami – stačí si obrázek nakreslit v jednom z mnoha kreslicích programů (jmenujme například *GeoGebru*, která je volně ke stažení) a uhádnutí je otázkou chvilky. Nehledě na to, že se pak dají snadno odpozorovat i další pomocná tvrzení, která jsme cestou potřebovali ... Tak doufám, že k příští geometrické osmičce opět dorazí přes deset řešení na plný počet bodů :). *(Pepa Tkadlec)*

[4] *mks.mff.cuni.cz/library/SvrcuvBodMV/SvrckuvBodMV.pdf*