Geometrická zobrazení I

Počínaje 17. ročníkem probíhá každý rok v PraSátku seriál na pokračování. Jde o výklad nějakého odvětí matematiky, se kterým se na střední škole s velkou pravděpodobností setkáš jen v omezené míře či vůbec ne, které je však přesto možné vyložit tak, aby bylo středoškolákům přístupné. Cílem seriálu je tedy rozšířit Tvé matematické obzory o nějaký zajímavý kout matematiky. Ten letošní na téma *Geometrická zobrazení* pro Tebe píší Pepa Tkadlec a Mirek Olšák. Ve druhých, třetích a čtvrtých komentářích vyjde vždy jeden díl a k němu trojice úloh, k jejichž vyřešení by Ti měly stačit znalosti nabyté přečtením a plným pochopením doposud vydaných dílů.

Pár slov úvodem

Geometrická zobrazení jsou jednou z nejpoutavějších kapitol planimetrie. Společně si jich celou řadu představíme a ukážeme si jejich použití v důkazových úlohách. Vědomě se dotýkáme jen okrajově nesmírně obsáhlého tématu užití geometrických zobrazení v úlohách konstrukčních – důkladnější výklad této tematiky je svým rozsahem nad rámec tohoto textu. V prvním dílu se zaměříme na shodná zobrazení, jejich skládání a na stejnolehlost.

Řešení některých příkladů či cvičení mohou vyžadovat znalosti z jiných oblastí planimetrie, čtenáře bažícího po hlubším vhledu a širším rozhledu proto odkazujeme na Knihovnu na stránkách PraSete[1].

Co je to zobrazení

Formálně řečeno je geometrické zobrazení funkce (nazvěme ji f) jdoucí z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$. V případě geometrických zobrazení v rovině, kterými se budeme v prvním dílu zabývat výhradně, jde tedy o jakýsi předpis, který každému bodu roviny přiřadí nějaký jiný bod roviny (ne nutně různý od toho původního). Bod, který zobrazujeme, nazýváme *vzor*, bod, na který se náš vzor zobrazí, nazýváme *obraz*. Obraz bodu zpravidla značíme očárkováním vzoru. Bod, u něhož splývá obraz se vzorem, nazveme *pevný*.

To, že zobrazení f přiřadí bodu A bod A' lze formálně zapsat jako $f(A) = A'$. Přiřazení rozhodně nemusí být symetrické – to, že $f(A) = A'$ ještě vůbec neznamená, že $f(A') = A$.

Abychom si o rozmanitosti geometrických zobrazení udělali aspoň jakýs takýs obrázek, uveďme několik více či méně exotických příkladů:

(i) Zobrazení, které každý bod roviny nechá na místě. Toto zobrazení se nazývá *identita* a budeme ho značit I.
(ii) Zobrazení, které všem bodům roviny přiřadí jeden a ten samý (předem určený) bod roviny.
(iii) Zobrazení, které body uvnitř daného kruhu pootočí o $89°$ po směru hodinových ručiček a zbylé body nechá tam, kde jsou.
(iv) Zobrazení, které bodu o souřadnicích $[a, b]$ v kartézské soustavě souřadnic přiřadí bod o souřadnicích $[a^2 + b, \log |b|]$.

[1] *http://mks.mff.cuni.cz/library/library.php*

Chceme-li pochopit, jak dané zobrazení funguje, často pomůže, objevíme-li něco, co se v tomto zobrazení zachovává. Například v identitě jsou všechny body pevné. Proto identita zachovává vzdálenosti mezi body (pro každé dva body A a B platí $|AB| = |A'B'|$), velikosti úhlů ($|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle A'B'C'|$) a vlastně vše, co člověka napadne.

Třetí zobrazení z výše uvedeného seznamu sice zachovává vzdálenost od středu daného kruhu (nazveme-li ho O, pak pro každý bod A platí $|OA| = |OA'|$), ale už nezachovává vzdálenosti mezi každými dvěma body. Čtvrté zobrazení podle autorů nezachovává nic zajímavého.

Cvičení. Dokažte, že ačkoliv je identita jediným zobrazením, v němž jsou všechny body pevné, není jediným zobrazením, které zachovává všechny vzdálenosti i velikosti úhlů.

Cvičení. Nalezněte zobrazení f různé od identity, které pro každý bod A splňuje $(A')' = A$, tedy zobrazení, které má všechny body pevné, je-li provedeno dvakrát po sobě.

Cvičení. Nalezněte zobrazení f, které pro každý bod A splňuje $(A')' = A$ a zároveň $A' \neq A$ (tedy nemá žádný pevný bod).

Je přirozené studovat geometrická zobrazení postupně od těch „krotkých“ po ta méně krotká. Pusťme se do toho.

Shodná zobrazení

Velmi speciální třídu geometrických zobrazení tvoří tzv. *shodná zobrazení*, tedy zobrazení, která zachovávají vzdálenosti mezi body (pro každé dva body A, B a jejich obrazy A', B' platí $|AB| = |A'B'|$).

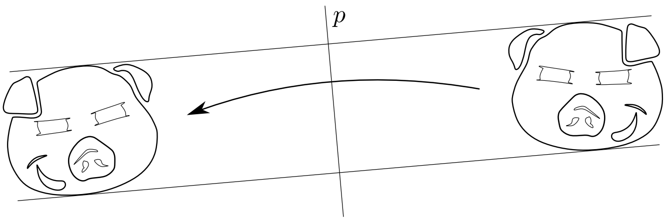
Příkladem shodného zobrazení je výše zmíněná identita, ale tato zdaleka není jediná. Podívejme se shodným zobrazením na zoubek.

Cvičení. Dokažte, že zachovává-li zobrazení délky úseček, zachovává už i velikosti úhlů.

Osová souměrnost

V jistém smyslu nejelementárnějším shodným zobrazením je osová souměrnost. Je-li v rovině dána přímka p, pak osovou souměrností O_p podle této přímky p rozumíme zobrazení definované jako

(i) $A' = A$, pokud A leží na p,
(ii) A' je takový bod, že p je osa úsečky AA', pokud A neleží na p.



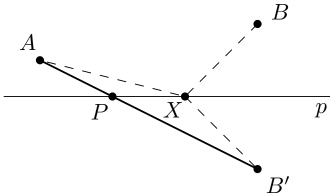
Z této definice okamžitě plynou následující vlastnosti osové souměrnosti:

(i) Osová souměrnost O_p je určena přímkou.
(ii) Pevné body osové souměrnosti jsou právě body ležící na přímce p.
(iii) Pro každý bod P na přímce p a pro libovolný bod A platí $|PA| = |PA'|$.
(iv) Pro každý bod A platí $(A')' = A$.
(v) Obrazem přímky je přímka, obrazem kružnice je kružnice.

Následující příklad dobře ilustruje časté užití geometrických zobrazení při řešení úloh. Pomocí vhodného zobrazení totiž můžeme v obrázku přeuspořádat délky úseček či velikosti úhlů a dát tak geometrický význam zvláštně působícím výrazům. Užití trojúhelníkové nerovnosti pro minimalizaci součtu délek úseček je rovněž typické.

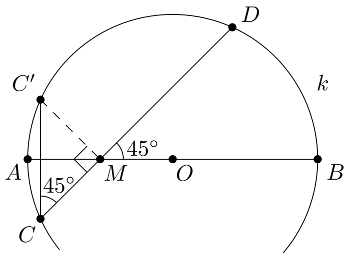
Příklad. V rovině je dána přímka p a body A, B ležící v téže polorovině určené přímkou p. Nalezněte na přímce p takový bod P, aby $|AP| + |PB|$ bylo minimální.

Řešení. Zobrazme bod B v osové souměrnosti podle přímky p. Jelikož osová souměrnost zachovává vzdálenosti, pro každý bod X přímky p platí $|AX| + |XB| = |AX| + |XB'|$. Z trojúhelníkové nerovnosti však máme $|AX| + |XB'| \geq |AB'|$, kde rovnost nastává právě tehdy, leží-li bod X na úsečce AB'. Hledaný bod P je tedy průsečík přímky p a úsečky AB'.



Příklad. Na průměru AB kružnice k zvolme bod M. Tětiva CD kružnice k prochází bodem M a svírá s průměrem AB úhel $45°$. Dokažte, že hodnota výrazu $|CM|^2 + |MD|^2$ nezávisí na poloze bodu M.

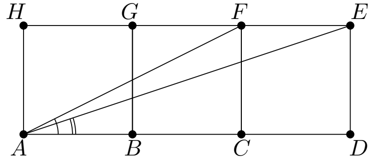
Řešení. Označme C' obraz bodu C v osové souměrnosti podle AB. Jelikož $|\sphericalangle C'MD| = 90°$, máme $|CM|^2 + |MD|^2 = |C'M|^2 + |MD|^2 = |C'D|^2$, takže stačí ukázat, že tětiva $C'D$ má konstantní délku. Díky větě o obvodovém úhlu tedy stačí dokázat, že jí přísluší konstantní obvodový úhel. Z rovnoramennosti trojúhelníku MCC' je tento roven $|\sphericalangle C'CD| = |\sphericalangle C'CM| = 45°$ nezávisle na poloze M, takže jsme hotovi.



Cvičení. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC a jeho průsečík výšek H. Ukažte, že obrazy bodu H v osových souměrnostech podle stran trojúhelníka ABC leží na kružnici jemu opsané.

Cvičení. Uvnitř ostrého úhlu s rameny p, q je dán bod A. Nalezněte body P na p a Q na q tak, aby $|AP| + |PQ| + |QA|$ bylo minimální. Co se stane, pokud bude zadaný úhel pravý nebo tupý?

Cvičení. Jsou dány tři shodné čtverce jako na obrázku. Určete hodnotu $|\sphericalangle DAE| + |\sphericalangle DAF|$.



Návod. Překlopte E podle AD a zkoumejte trojúhelník AFE'.

Cvičení. V téže polorovině určené přímkou p jsou dány body A, B. Nalezněte na přímce p nějaký bod X tak, aby úsečky AX, BX svíraly s přímkou p úhly, z nichž velikost jednoho je dvakrát větší než velikost druhého.

Návod. Zobrazte B osově podle p a dokreslete kružnici se středem v B', která se dotýká p.

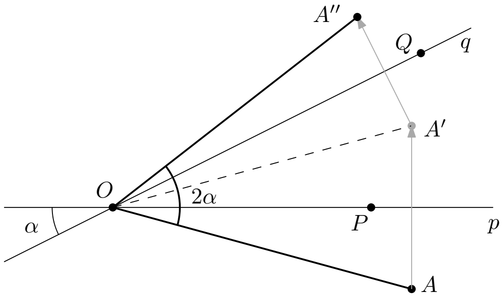
Skládání poprvé

Otázka, která se přirozeně nabízí po představení kteréhokoliv zobrazení, je následující: *Co se stane, aplikujeme-li několik zobrazení daného typu po sobě?* Pokusme se na ni odpovědět. Dodejme ještě, že pro postupné provádění zobrazení se vžil termín *skládání*.

Zřejmě platí, že složení dvou osových souměrností podle téže osy je identita. Budeme se tedy zabývat obecným případem, v němž jsou osy dvou skládaných osových souměrností různé. Zaveďme nejdříve potřebné značení.

Jsou-li dána dvě zobrazení f a g, pak jejich složením rozumíme zobrazení, které bodu A přiřadí bod $g(f(A))$, tj. nejdříve provedeme zobrazení f a na výsledek ještě zobrazení g. Toto zobrazení někdy značíme[2] $g \circ f$. Pozor, na pořadí, v němž zobrazení skládáme, záleží – složením dvou zobrazení v opačném pořadí obecně získáme jiný výsledek.

Vraťme se nyní k naší úloze. V rovině uvažme dvě přímky p, q a pro pohodlnost nejdříve předpokládejme, že se protínají. Označme O jejich průsečík a α úhel mezi nimi. Uvažme zobrazení, které vznikne osovou souměrností podle přímky p následovanou osovou souměrností podle přímky q, a pokusme se popsat jeho efekt na body roviny.



Zřejmě $O_q(O_p(O)) = O_q(O) = O$. Zvolme teď bod A v rovině kdekoliv jinde a označme $A' = O_p(A)$ a $A'' = O_q(A')$. Z vlastností osové souměrností plyne

$$|OA| = |OA'| = |OA''|.$$

Zvolíme-li v případě znázorněném na obrázku pro přehlednost na přímkách p, q body P, Q, dopočteme

$$|\sphericalangle AOA''| = |\sphericalangle AOA'| + |\sphericalangle A'OA''| = 2|\sphericalangle POA'| + 2|\sphericalangle A'OQ| = 2|\sphericalangle POQ| = 2\alpha.$$

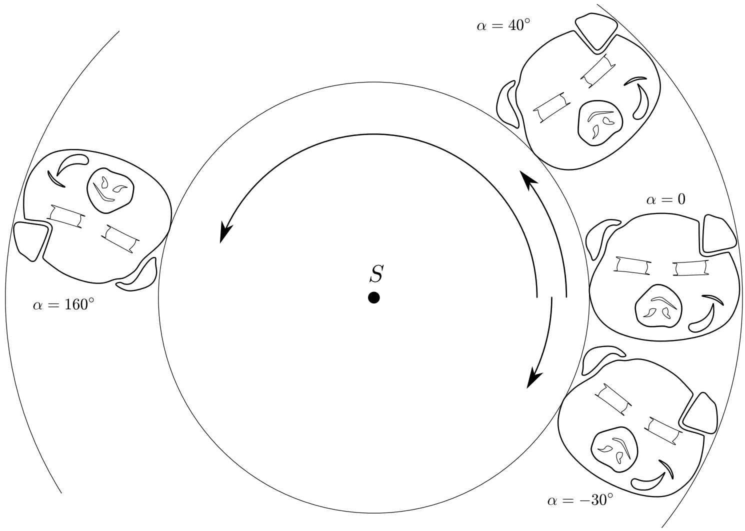
Stejný výsledek obdržíme i pro ostatní vzájemné polohy přímek p, q a bodu A. Tyto dva vztahy už bod A'' určují. Zkoumání osové souměrnosti nás tedy přirozeně vede ke zkoumání dalšího zobrazení. Říkejme mu *otočení*.

[2]Nenech se mýlit pořadím písmen g a f, skutečně takto zapisujeme zobrazení, v němž provádíme nejprve f a potom g.

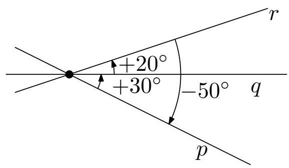
Otočení

Je-li v rovině dán bod O a je-li dáno číslo $\alpha \in \langle 0, 360^\circ)$, pak otočením $R_{(O,\alpha)}$ rozumíme zobrazení definované jako

(i) $R_{(O,\alpha)}(O) = O$,
(ii) $R_{(O,\alpha)}(A) = A'$ splňující $|OA'| = |OA|$ a $|\sphericalangle AOA'| = \alpha$ pro libovolné $A \neq O$.



Na tomto místě je potřeba upozornit na nepřesnost, jíž se při této definici dopouštíme. Přísně vzato existují dva odpovídající body A' – jeden otočený po směru, druhý proti směru chodu hodinových ručiček. Této nepřesnosti se lze vyhnout zavedením tzv. *orientovaných úhlů*. Ty (zhruba řečeno) spočívají v tom, že se jednomu ze dvou směrů (zpravidla tomu proti směru) přiřadí kladné a druhému záporné znaménko. Budeme-li tedy od teď mluvit o úhlu mezi dvěma přímkami, bude nám záležet na pořadí, v němž tyto zmíníme. Na obrázku tak polopřímky p a q svírají úhel 30°, přímky q a r úhel 20° a přímky r a p úhel -50°.



Otočení jakožto složení dvou shodných zobrazení je samo shodným zobrazením. Kromě toho má řadu dalších vlastností. Jmenujme:

(i) Otočení $R_{(O,\alpha)}$ je určené svým středem a velikostí úhlu otočení.
(ii) Je-li $\alpha = 0$, redukuje se otočení na identitu. Takovému otočení říkáme triviální.
(iii) Je-li $\alpha \neq 0$, je jediným pevným bodem otočení jeho střed.
(iv) Obrazem přímky AB je přímka $A'B'$ svírající s AB úhel α. Obrazem kružnice je kružnice.

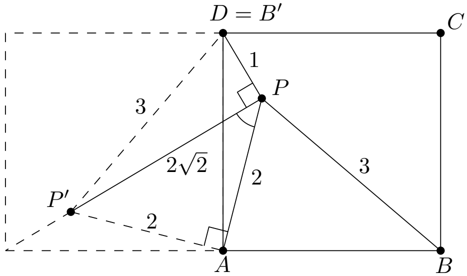
Cvičení. (střed otočení) Jsou dány různoběžné úsečky AB a $A'B'$ shodné délky. Zkonstruujte střed otočení R zobrazujícího AB na $A'B'$.

Cvičení. (rozklad otočení) Uvědomte si, že otočení $R_{(O,\alpha)}$ vznikne složením dvou osových souměrností podle libovolných os protínajících se v bodě O a svírajících úhel $\frac{1}{2}\alpha$.

Otočení je extrémně účinnou zbraní při trikových řešeních geometrických úloh. Otáčíme proto, abychom lépe využili shodnosti některých délek v obrázku či doplňkovosti velikostí některých úhlů. Velikost úhlu otočení volíme konkrétně – obvykle šedesát nebo devadesát stupňů.

Příklad. Uvnitř čtverce $ABCD$ je dán bod P tak, že $|PD| = 1$, $|PA| = 2$ a $|PB| = 3$. Určete velikost úhlu APD.

Řešení. Uvažme otočení podle středu A o $90°$. Obrazy bodů značme čárkovaně.



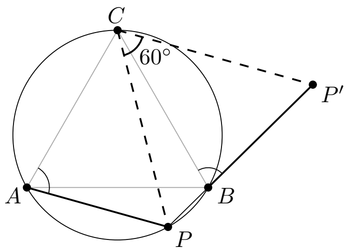
Bod B' splyne s bodem D. Trojúhelník PAP' je rovnoramenný pravoúhlý s odvěsnami délky 2, tedy $|PP'| = 2\sqrt{2}$. V trojúhelníku $P'PD$ díky tomu platí

$$|P'P|^2 + |PD|^2 = (2\sqrt{2})^2 + 1^2 = 8 + 1 = 9 = 3^2 = |P'D|^2,$$

takže $|\sphericalangle P'PD| = 90°$. To spolu s $|\sphericalangle APP'| = 45°$ dává kýženou odpověď $|\sphericalangle APD| = 135°$.

Příklad. Na kratším oblouku AB kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC je dán bod P. Ukažte, že $|PC| = |PA| + |PB|$.

Řešení. Otočme trojúhelník CAP podle středu C o $60°$ a označme P' obraz bodu P (bod A se zřejmě zobrazí na B).



Body P, B, P' leží v přímce, neboť

$$|\sphericalangle P'BC| + |\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle PAC| + |\sphericalangle CBP| = 180°.$$

Úsečky CP a CP' jsou stejně dlouhé a svírají úhel $60°$, takže trojúhelník CPP' je rovnostranný a

$$|CP| = |PP'| = |PB| + |BP'| = |PB| + |PA|,$$

kde poslední rovnost vyplývá z toho, že BP' je obrazem AP.

Cvičení. Uvnitř pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu C je dán bod P. Ukažte, že úsečky o délkách $|PA|$, $|PB|$ a $|PC|\sqrt{2}$ tvoří strany trojúhelníka.

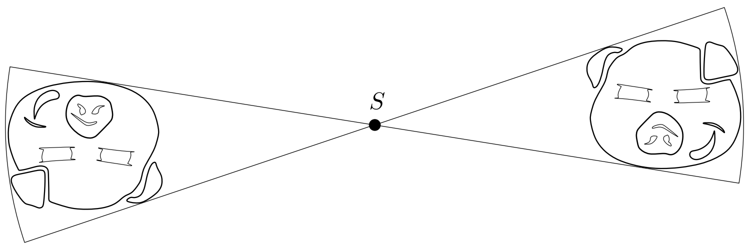
Cvičení. V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ platí $|AB| = |AE| = |CD| = 1$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEA| = 90^\circ$ a $|BC| + |DE| = 1$. Určete jeho obsah.

Cvičení. Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ vznikl slepením rovnostranného trojúhelníku AEF o straně a, rovnoběžníku $ABDE$ splňujícího $|AB| = 1$ a trojúhelníku BCD splňujícího $|BC| + |CD| = 2$. Navíc platí $|CF| = 3$. V závislosti na a určete obsah šestiúhelníku $ABCDEF$.

Návod. Otočte o 60° podle F a z $1+2 = 3$ vyvoďte, že v jisté „trojúhelníkové“ nerovnosti nastává rovnost.

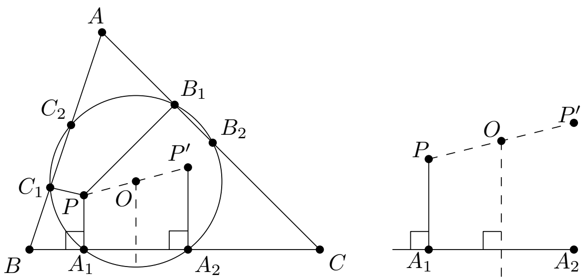
Středová souměrnost

Speciálním případem otočení je otočení o 180°. Takovému zobrazení se říká *středová souměrnost* a značíme ho S_O, kde O je střed otočení (a tedy i souměrnosti). Ve srovnání s obecným otočením má středová souměrnost dvě dobré vlastnosti navíc. Jednak pro každý bod A platí $(A')' = A$, dále platí to, že bod A, bod A' a střed středové souměrnosti leží v přímce. Konečně poznamenejme, že středová souměrnost vzniká složením osových souměrností podle kolmých os.



Příklad. Kružnice protíná strany BC, CA, AB trojúhelníka ABC v bodech A_1 a A_2, B_1 a B_2, C_1 a C_2. Ukažte, že pokud se kolmice na odpovídající strany vedené body A_1, B_1 a C_1 protnou v jednom bodě, pak se v jednom bodě protnou i kolmice na odpovídající strany vedené body A_2, B_2 a C_2.

Řešení. Označme P průsečík kolmic vedených body A_1, B_1 a C_1 a O střed dané kružnice. Označme P' obraz bodu P ve středové souměrnosti podle středu O.



Jelikož O leží na ose úsečky A_1A_2, leží P' na kolmici na stranu BC vedenou bodem A_2. Analogickým argumentem dostáváme, že P' leží i na zbylých dvou kolmicích a ty se tedy protínají v jednom bodě.

Cvičení. Na straně BC trojúhelníku ABC jsou dány (ne nutně různé) body K, L tak, že $|BK| = |CL|$. Pro kterou polohu bodů K, L je součet $|AK| + |AL|$ minimální?

Cvičení. Ukažte, že obrazy průsečíku výšek ve středových souměrnostech podle středů stran daného trojúhelníka ABC padnou na kružnici trojúhelníku ABC opsanou.

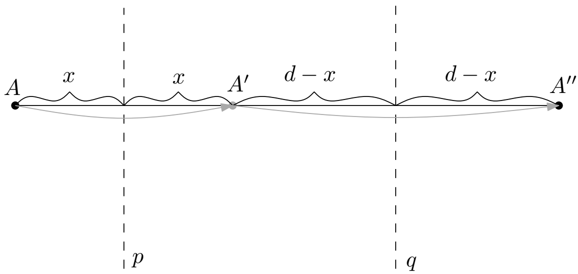
Cvičení. Na těžnici z vrcholu C trojúhelníku ABC nalezněme bod X tak, aby $|BX| = |AC|$. Označme Y průsečík přímky BX a strany AC. Ukažte, že trojúhelník CXY je rovnoramenný.

Cvičení. Jednotkové kružnice k a l se dotýkají v bodě T. Kružnice m o poloměru 2 má střed na kružnici k a dotýká se jí v bodě B. Ukažte, že přímka BT prochází jedním z průsečíků kružnic l a m.

A co když se neprotnou?

Už víme, co vznikne složením osových souměrností podle os, které se protnou. Nevyřešili jsme však případ, kdy jsou ony dvě osy rovnoběžné. Zaměřme se na něj nyní.

Ať jsou v rovině dány rovnoběžné přímky p, q ve vzdálenosti d. Pokusme se popsat zobrazení vzniklé složením osové souměrnosti podle přímky p a souměrnosti podle přímky q (tedy $O_q \circ O_p$). Bez újmy na obecnosti se na obrázek dívejme tak, aby přímky p, q byly svislé. Vyberme si v rovině libovolný bod A a označme $A' = O_p(A)$ a $A'' = O_q(A')$.



Body A, A' a A'' leží všechny stejně „vysoko“, neboť AA', resp. $A'A''$ jsou kolmé na p, resp. q. K úplnému[3] popisu bodu A'' tedy stačí vyjádřit jeho vzdálenost od bodu A pomocí d. Označíme-li vzdálenost bodu A od přímky p jako x, získáváme v zobrazeném případě

$$|AA''| = |AA'| + |A'A''| = 2 \cdot x + 2 \cdot (d - x) = 2d.$$

Rozborem případů zjistíme, že stejný výsledek dostaneme i pro ostatní možné vzájemné polohy bodů A, A', A'' a přímek p, q. Závěrem tak je, že složením osových souměrností podle rovnoběžných přímek je zobrazení, které každým bodem „pohne“ ve směru kolmém na tyto přímky o vzdálenost dvakrát větší, než je jejich vzdálenost. Zabývejme se proto teď *posunutím*.

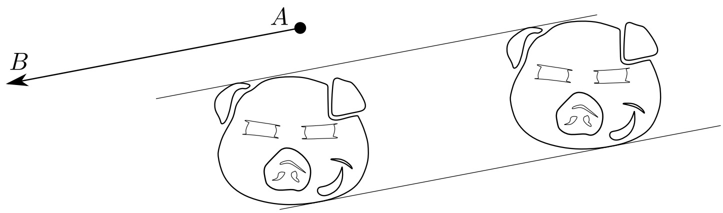
Posunutí

Je-li dán vektor[4] $\overrightarrow{AB}$, pak posunutím $T_{\overrightarrow{AB}}$ rozumíme zobrazení, které libovolnému bodu X přiřadí bod X' takový, že $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$, tedy takový bod, že $ABX'X$ je rovnoběžník.

Posunutí o vektor $\overrightarrow{AB}$ vzniká složením dvou osových souměrností podle libovolných dvou rovnoběžných os kolmých na směr posunutí a vzdálených $\frac{1}{2}|AB|$ ve vhodném pořadí.

[3] Přesněji: Ke skoro úplnému ...

[4] Jestli nevíš, co je to vektor, neděs se a představuj si ho jako šipku, která má nějaký směr a je nějak dlouhá. Dvě písmenka pak označují počáteční a koncový bod šipky.



I posunutí je pochopitelně shodné zobrazení. Mezi jeho další vlastnosti patří:

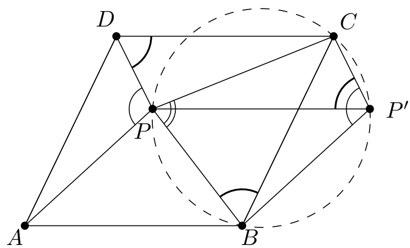
(i) Posunutí je určeno vektorem, tedy dvojicí bodů.
(ii) Posunutí o nulový vektor je identita. Takovému posunutí říkáme triviální.
(iii) Je-li vektor posunutí nenulový, nemá posunutí žádné pevné body.
(iv) Obrazem úsečky je rovnoběžná úsečka (shodné délky).
(v) Obrazem přímky je přímka, obrazem kružnice je kružnice.

Příklad. Uvnitř rovnoběžníku $ABCD$ je dán bod P tak, že $|\sphericalangle APD|+|\sphericalangle CPB| = 180°$. Dokažte, že $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle PDC|$.

Řešení. Označme P' obraz bodu P v posunutí o vektor $\overrightarrow{AB}$. Pak

$$|\sphericalangle BP'C| + |\sphericalangle CPB| = |\sphericalangle APD| + |\sphericalangle CPB| = 180°,$$

takže čtyřúhelník $BP'CP$ je tětivový. Je proto $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle CP'P|$, a jelikož $PP'CD$ je rovnoběžník, tak i $|\sphericalangle CP'P| = |\sphericalangle PDC|$.



Cvičení. Označme postupně A_1, B_1, C_1 středy stran BC, CA, AB trojúhelníka ABC. Označme I_a, I_b, I_c středy kružnic vepsaných trojúhelníkům AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 a O_a, O_b, O_c středy kružnic těmto trojúhelníkům opsaných. Dokažte, že trojúhelníky $I_aI_bI_c$ a $O_aO_bO_c$ jsou shodné.

Cvičení. Kde máme postavit most MN přes řeku oddělující vesnice A, B tak, aby byla cesta $AMNB$ co nejkratší? Předpokládáme, že břehy řeky jsou rovnoběžné přímky a most je na ně kolmý.

Cvičení. Řekneme, že dva body v rovině *sousedí*, pokud je jejich vzdálenost 1. Ukažte, že v rovině existuje množina 2^{2011} bodů takových, že každý z nich sousedí s právě 2011 jinými.

Návod. Začněte s úsečkou a množinu konstruujte induktivně zkopírováním a posunutím o vzdálenost 1 ve vhodném směru.

Skládání podruhé

Zjistili jsme, že skládáním osových souměrností získáváme buď posunutí, nebo otočení (případně identitu, což je speciální případ obojího). Nabízí se tak otázka, jaká další shodná zobrazení lze získat – tentokrát skládáním samotných otáčení a posouvání. Proberme postupně možnosti.

(i) Složením dvou posunutí je zřejmě posunutí (případně identita).

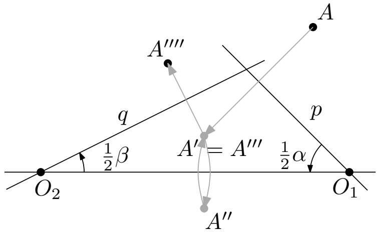
(ii) Složením dvou otočení podle téhož středu je zřejmě otočení (případně identita).

(iii) Složením dvou netriviálních otočení podle různých středů je buď posunutí, nebo otočení.

Důkaz. Ať $R_{(O_1,\alpha)}$ a $R_{(O_2,\beta)}$ jsou otočení ($O_1 \neq O_2$) a zkoumejme zobrazení vzniklé jejich složením. Označme p přímku procházející bodem O_1 a svírající úhel $\frac{1}{2}\alpha$ s přímkou O_1O_2. Obdobně označme q přímku procházející bodem O_2 a svírající úhel $\frac{1}{2}\beta$ s přímkou O_1O_2. Složení dvou otočení lze pak zapsat jako

$$\left(O_q \circ O_{O_1O_2}\right) \circ \left(O_{O_1O_2} \circ O_p\right) = O_q \circ \left(O_{O_1O_2} \circ O_{O_1O_2}\right) \circ O_p = O_q \circ I \circ O_p = O_q \circ O_p,$$

což je skutečně otočení nebo posunutí.

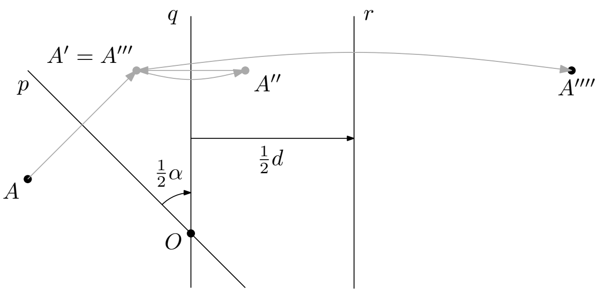


(iv) Složením netriviálního otočení a posunutí je otočení.

Důkaz. Rozložíme nejdříve otočení na dvě osové souměrnosti O_p, O_q tak, aby druhá osa (q) byla kolmá na vektor posunutí. Toto posunutí následně rozložíme na dvě osové souměrnosti O_q a O_r. Výsledkem je zobrazení

$$(O_r \circ O_q) \circ (O_q \circ O_p) = O_r \circ (O_q \circ O_q) \circ O_p = O_r \circ O_p,$$

což je složení dvou nerovnoběžných osových souměrností, a tedy otočení.



Cvičení. Co vznikne složením dvou středových souměrností? Co vznikne složením tří středových souměrností?

Cvičení. Co vznikne složením osové souměrnosti O_p a posunutí o vektor kolmý na přímku p?

Cvičení. Ukažte, že zobrazíme-li bod X středově podle bodů O_1, O_2, O_3 a poté v tomtéž pořadí podle nich ještě jednou, zůstane na svém místě.

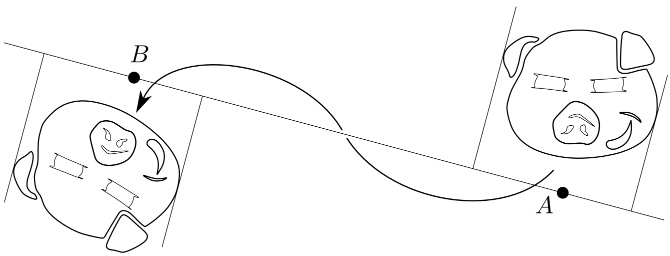
Cvičení. Ukažte, že žádný rovinný útvar nemůže mít přesně dva středy souměrnosti.

Návod. Ukažte, že jsou-li O_1, O_2 dva různé středy souměrnosti, pak bod středově souměrný s bodem O_1 podle bodu O_2 je středem středové souměrnosti $S_{O_2} \circ S_{O_1} \circ S_{O_2}$.

Zbývá popsat, jaké zobrazení vznikne složením otočení, resp. posunutí s osovou souměrností, tj. jaké zobrazení vznikne složením tří osových souměrností.

Posunutá souměrnost[5]

Je-li p přímka v rovině a A, B body na ní, pak *posunutou souměrností* $G_{\overrightarrow{ab}}$ rozumíme zobrazení, které vznikne složením posunutí o vektor $\overrightarrow{AB}$ a osové souměrnosti podle přímky p.



Není těžké si rozmyslet, že na pořadí, ve kterém provedeme osovou souměrnost a posunutí, nezáleží – v obou případech dostaneme totéž shodné zobrazení. Mezi další vlastnosti posunuté souměrnosti patří:

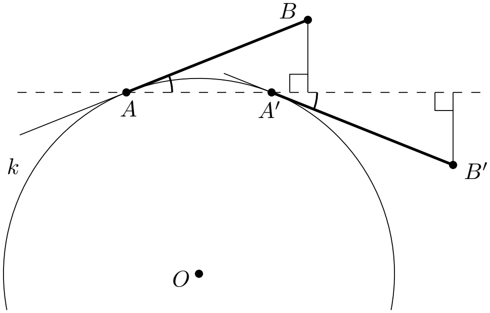
(i) Posunutá souměrnost je určena dvěma body.
(ii) Je-li vektor posunutí nulový (tj. $A = B$), redukuje se posunutá souměrnost na osovou souměrnost.
(iii) Je-li vektor posunutí nenulový, nemá posunutá souměrnost žádné pevné body.
(iv) Obraz každého bodu má od přímky p stejnou vzdálenost jako jeho vzor a leží v opačné polorovině přímkou určené.

Posunutá souměrnost je malým bratříčkem svých větších sourozenců. Ukažme si ale její použití alespoň na jednom příkladě.

Příklad. Na tečně ke kružnici k se středem O vedené bodem A zvolíme bod B. Úsečku AB otočíme podle O o nějaký úhel, čímž dostaneme úsečku $A'B'$. Ukažte, že přímka AA' prochází středem úsečky BB'. (Turnaj měst 2007)

Řešení. Bez újmy na obecnosti se na obrázek podívejme tak, aby přímka AA' byla vodorovná. Úsečky AB a $A'B'$ svírají s přímkou AA' stejný úhel. Lze je tedy na sebe zobrazit posunutou souměrností $G_{\overrightarrow{AA'}}$. Body B je proto od přímky AA' stejně „nahoře“ jako bod B' „dole“. Střed úsečky BB' tak leží na přímce AA'.

[5] V anglické literatuře nazývána *glide reflection*.



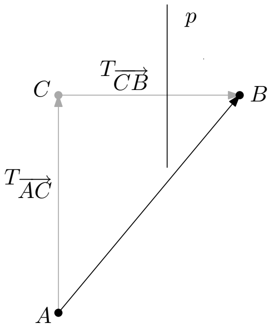
Cvičení. Červená karkulka jde za babičkou. Cestou chce ale jít přesně kilometr podél řeky. Je-li řeka přímka, navrhněte karkulce nejkratší cestu.

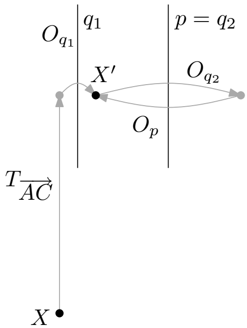
Je to všechno?

Popsali jsme zobrazení, které vznikne složením posunutí o nějaký vektor a překlopení podle něj. Tím jsme ale rozhodně nepostihli, co vznikne posunutím o nějaký vektor a překlopením podle jiné přímky, nebo dokonce složením osové souměrnosti a otočení. Nebo snad ano?

Skládáme-li osovou souměrnost O_p a otočení, můžeme otočení rozložit na dvě osové souměrnosti tak, aby první osa, podle které zobrazujeme, byla rovnoběžná s O_p. Na výsledné zobrazení se pak lze dívat jako na posunutí následované osovou souměrností (podle obecné osy). Zkoumejme tedy složení posunutí o vektor $\overrightarrow{AB}$ a osové souměrnosti podle (různoběžné) přímky p.

Rozložme posunutí na dvě dílčí posunutí – posunutí $T_{\overrightarrow{AC}}$ ve směru přímky p a posunutí $T_{\overrightarrow{CB}}$ ve směru na p kolmém.





„Kolmé“ posunutí $T_{\overrightarrow{CB}}$ se dá rozložit na $O_{q_2} \circ O_{q_1}$, kde přímku q_2 lze volit totožnou s p. Celkem tak dostáváme

$$O_p \circ T_{\overrightarrow{AB}} = O_p \circ \left(T_{\overrightarrow{CB}} \circ T_{\overrightarrow{AC}}\right) = O_p \circ \left(O_p \circ O_{q_1}\right) \circ T_{\overrightarrow{AC}} = O_{q_1} \circ T_{\overrightarrow{AC}},$$

což je skutečně posunutá souměrnost.

Teď už jsme připraveni vyslovit větu charakterizující shodná zobrazení v rovině a nastínit její důkaz.

Věta. *Každé shodné zobrazení v rovině je osová souměrnost, otočení, posunutí nebo posunutá souměrnost.*

Idea důkazu. Důkaz postupuje ve třech krocích.

Nejdříve si uvědomíme, že každé shodné zobrazení je určené obrazem různostranného trojúhelníku, tj. je-li dán různostranný trojúhelník ABC a shodný trojúhelník $A'B'C'$, pak existuje jediné shodné zobrazení, které zobrazí $\triangle ABC$ na $\triangle A'B'C'$. To plyne z toho, že každý bod roviny je jednoznačně určen svými vzdálenostmi od bodů A, B, C.

Takové shodné zobrazení lze reprezentovat složením několika již popsaných shodných zobrazení. Skutečně, stačí nejdříve posunout trojúhelník o vektor $\overrightarrow{AA'}$, poté otočit podle bodu A' o takový úhel, aby se na sebe zobrazily body B a B', a (pokud je to nutné) osově překlopit podle přímky $A'B'$.

Konečně si zbývá všimnout, že ve výše uvedeném postupu lze složit otočení a posunutí. Jak již víme, vznikne otočení (případně posunutí nebo identita, jsou-li otočení či otočení i posunutí triviální). Pokud navíc ještě osově překlápíme, vznikne osové posunutí (případně osová souměrnost).

Problémy

Kapitolu shodných zobrazení uzavřeme několika těžšími úlohami. Ten, kdo napíše na chat[6] jako první správné řešení některého z čokoládových příkladů, bude odpovídajícím způsobem odměněn.

Příklad. Na stranách AB, BC, CA ostroúhlého trojúhelníku ABC najděte body C_1, A_1, B_1 tak, aby obvod trojúhelníku $A_1B_1C_1$ byl nejmenší možný.

Příklad. Na stranách AC, BC trojúhelníku ABC nalezněte body K, L tak, aby $|AK| = |KL| = |LB|$.

Příklad. (čokoládový) Uvnitř úhlu MON jsou dány body K, L. Nalezněte na polopřímce ON bod X tak, aby v trojúhelníku XYZ, kde Y, Z jsou průsečíky XK, resp. XL a OM, platilo $|XY| = |XZ|$.

Příklad. (čokoládový) Na přímkách p, q, r jsou dány postupně body P, Q, R. Zkonstruujte přímku ℓ, která protíná přímky p, q, r v bodech P_1, Q_1, R_1 takových, že $|PP_1| = |QQ_1| = |RR_1|$.

Příklad. (čokoládový) Uvnitř jednotkového čtverce je dán (ne nutně souvislý) útvar U takový, že vzdálenost žádných dvou bodů z U není rovna 0,001.

(i) Ukažte, že obsah útvaru U je menší než 0,34.
(ii) Ukažte, že obsah útvaru U je menší než 0,287.

Tím jsou dovršena shodná zobrazení a my se můžeme pustit do zobrazení podobných.

Podobná zobrazení

Podobná zobrazení jsou ta, která zobrazí každý útvar na útvar podobný s původním útvarem. Taková zobrazení již nemusí zachovávat délky stran, ale přímky budou stále zobrazeny na přímky a kružnice na kružnice.

Dále jsou zachovány velikosti úhlů. Zároveň bude poměr mezi délkou úsečky a délkou jejího obrazu (pro dané podobné zobrazení) stále stejné kladné číslo. Tomuto číslu budeme říkat *absolutní hodnota koeficientu* podobného zobrazení. U shodných zobrazení (která jsou vždy současně podobnými) je tato hodnota rovna jedné.

---

[6] *http://mks.mff.cuni.cz/chat/chat.php?topic=2*

Body v nekonečnu

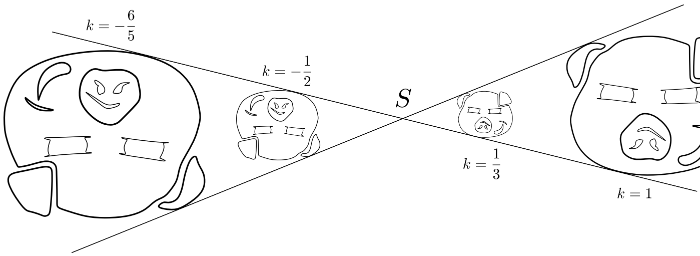
Pro větší komfort se k obvyklé rovině přidávají další, tzv. *nevlastní*, body neboli body v nekonečnu. Pro každý směr přímky se přidá jeden takový bod. Je to ten bod, ve kterém „se protnou všechny rovnoběžky tohoto směru“. Dále přidáme tzv. nevlastní přímku, což bude množina všech nevlastních bodů. Body, které byly v původní rovině, nazýváme vlastní.

Čeho jsme tím dosáhli? Pro začátek toho, že každé dvě různé přímky se protnou právě v jednom bodě. A přitom stále platí, že každé dva různé body určují právě jednu přímku.

Za obraz nevlastního bodu ve shodných a podobných zobrazeních budeme považovat směr obrazu příslušné přímky.

Ve středoškolské matematice ovšem nevlastní body nejsou úplně běžné, takže je nedoporučujeme (obzvlášť v olympiádě) automaticky předpokládat. Všechny body v zadání úloh budou chápány jako vlastní, nebude-li řečeno jinak.

Vlastní stejnolehlost



Vlastní stejnolehlost je jednoznačně určena svým středem S (vlastní bod) a koeficientem k (nenulové reálné číslo). Pak pro libovolný bod X definujeme jeho obraz X' tak, aby platilo $\overrightarrow{SX'} = k\overrightarrow{SX}$. Je-li k kladné/záporné, říkáme, že stejnolehlost je kladná/záporná.

Nevlastní stejnolehlost

Nevlastní stejnolehlost je jen jiný název pro posunutí, protože bude často pohodlné ho za stejnolehlost považovat. Střed S nevlastní stejnolehlosti je nevlastní bod, koeficient je vždy roven 1. Tedy stejnolehlost s koeficientem různým od jedné je vždy vlastní. Vektor tohoto posunutí musí být ve směru S (nebo nulový). Na základě středu a koeficientu ovšem není jasně dána jeho velikost ani orientace.

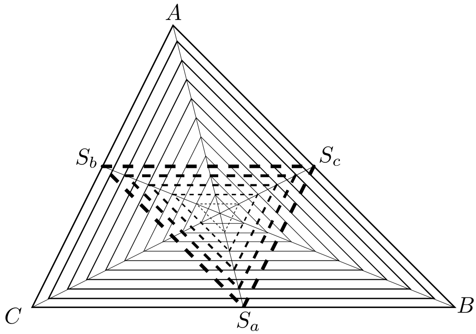
Vlastnosti stejnolehlosti (vlastní i nevlastní):

(i) Obraz přímky ve stejnolehlosti je vždy rovnoběžná přímka.
(ii) Střed stejnolehlosti je pevný bod.
(iii) Mezi libovolnými dvěma rovnoběžnými úsečkami existují právě jedna kladná a právě jedna záporná stejnolehlost. Obecně existuje stejnolehlost mezi dvěma podobnými mnohoúhelníky s rovnoběžnými odpovídajícími si stranami.
(iv) Střed stejnolehlosti, bod a jeho obraz leží v jedné přímce.
(v) Koeficient stejnolehlosti je na základě zobrazení vždy jednoznačně určen. Střed vždy, když se nejedná o identitu.
(vi) Inverzním zobrazením k stejnolehlosti je opět stejnolehlost se stejným středem a převráceným koeficientem.
(vii) Identita je stejnolehlostí s koeficientem 1 a libovolným středem.
(viii) Stejnolehlost s koeficientem -1 je středovou souměrností se stejným středem.
(ix) Každé podobné zobrazení je stejnolehlost složená s nějakým shodným zobrazením.

Příklad. Dokažte, že se těžnice trojúhelníku protínají v jednom bodě.

Řešení. Trojúhelník označíme ABC, středy stran pak S_a, S_b, S_c. Úsečka S_bS_c je obrazem úsečky CB ve stejnolehlosti se středem v A s koeficientem $\frac{1}{2}$, proto je s úsečkou BC rovnoběžná a má poloviční délku. Analogické vlastnosti mají úsečky S_aS_b a S_bS_c, takže trojúhelník $S_aS_bS_c$ je podobný trojúhelníku ABC a má s ním rovnoběžné strany (říká se mu příčkový trojúhelník).

Existuje tedy stejnolehlost, která zobrazí trojúhelník ABC na trojúhelník $S_aS_bS_c$, střed této stejnolehlosti označíme T. Z definice stejnolehlosti plyne, že body A, T, S_a leží v přímce, stejně tak body B, T, S_b a C, T, S_c, takže T je hledaným průsečíkem.



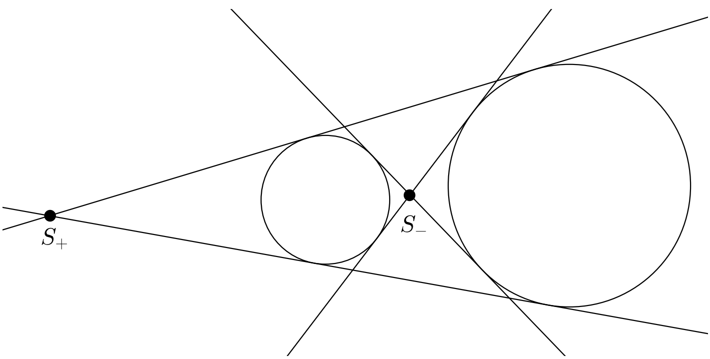
Cvičení. Uvnitř čtverce $ABCD$ zvolíme bod X. Dokažte, že těžiště trojúhelníků ABX, BCX, CDX, DAX tvoří čtverec.

Cvičení. Dokažte, že paty výšek a středy stran jednoho trojúhelníku leží na jedné kružnici.

Návod. Využijte toho, že obrazy průsečíku výšek podle stran a středů stran padnou na kružnici opsanou.

Stejnolehlost a kružnice

Jsou-li dány kružnice k, l s poloměry r_k, r_l, pak existuje právě jedna kladná (ne nutně vlastní) a právě jedna záporná stejnolehlost, která zobrazí kružnici k na kružnici l. Středy těchto stejnolehlostí je možné sestrojit jako (ne nutně vlastní) průsečíky společných vnějších, respektive vnitřních tečen (viz obrázek), ovšem pouze tehdy, když kružnice tyto společné tečny mají. Pokud se kružnice dotýkají, pak bod dotyku je jedním ze středů těchto stejnolehlostí.

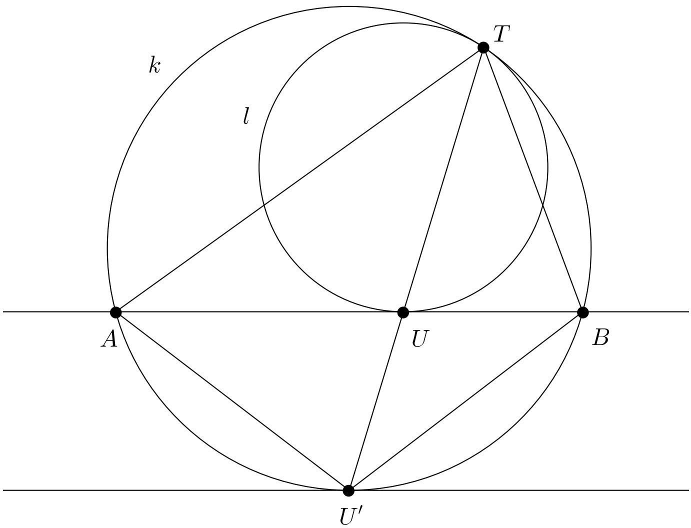


Příklad. Kružnice k, l mají vnitřní dotyk v bodě T. Tětiva AB kružnice k se dotýká kružnice l v bodě U. Dokažte, že přímka UT je osa úhlu ATB.

Řešení. Nakreslíme si obrázek tak, aby bod U byl na kružnici l „dole“, tedy body A, B budou „na stejné úrovni“. Zobrazíme kružnici l na kružnici k stejnolehlostí se středem v T. Tato stejnolehlost má kladný koeficient, a proto i bod U' (obraz bodu U) je na kružnici k „dole“, tedy trojúhelník ABU' je rovnoramenný. Navíc body T, U, U' leží na jedné přímce, takže můžeme psát

$$|\sphericalangle UTA| = |\sphericalangle U'TA| = |\sphericalangle U'BA| = |\sphericalangle U'AB| = |\sphericalangle U'TB| = |\sphericalangle UTB|,$$

což jsme chtěli dokázat.



Cvičení. Kružnice k, l, m se dotýkají přímky p postupně v bodech K, L, M. Navíc se kružnice k a l dotýkají v A a kružnice l a m v B. Dokažte, že přímky KA, MB a kružnice l procházejí jedním bodem.

V příštím díle se můžete těšit na skládání stejnolehlostí a na zbylá podobná zobrazení.

Geometrická zobrazení II

Druhý díl seriálu o geometrických zobrazeních se týká zobrazení podobných. V úvodu si v rychlosti předvedeme, jak se mezi sebou skládají stejnolehlosti, a vyřešíme úlohu, která nebyla (patrně pro svou obtížnost) zadána na IMO. S aparátem, který tou dobou už budeme ovládat, to bude radost. Následně se podíváme, co vznikne složením stejnolehlosti s osovou souměrností, představíme si spirální podobnost a řekneme si, co to znamená, že „chodí po dvou“. Výklad zakončíme zobecněním podobných zobrazení do podoby zobrazení lineárních.

Skládání stejnolehlostí

V této kapitolce si ukážeme, jak se skládají stejnolehlosti. Vystačíme si při tom s následujícím stěžejním tvrzením.

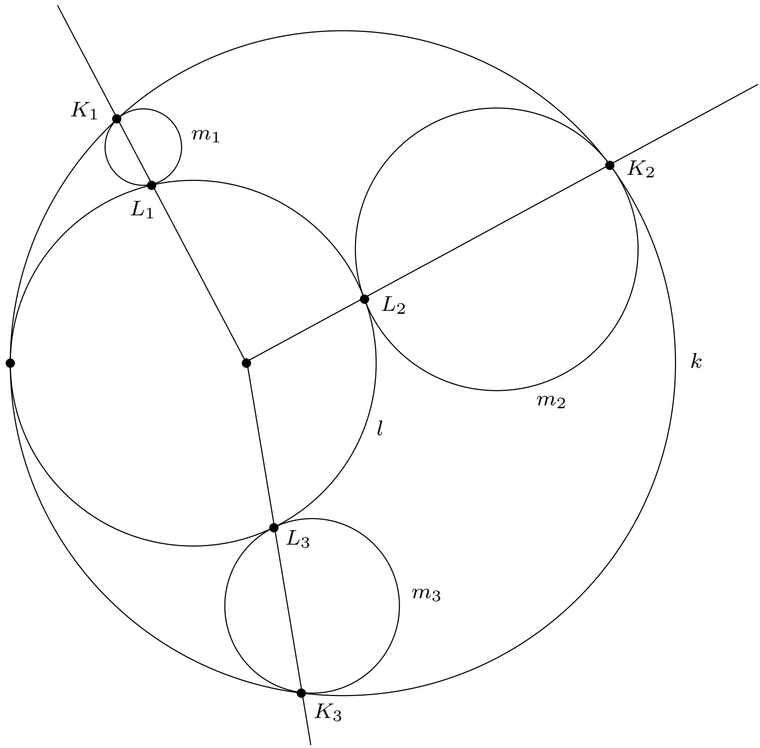
Tvrzení. *Mějme dvě (ne nutně vlastní) stejnolehlosti h_1, h_2 s koeficienty k_1, k_2 a středy S_1, S_2. Jejich složení $h_2 \circ h_1$ označme h. Pak h je opět (ne nutně vlastní) stejnolehlost, a to s koeficientem $k_1 \cdot k_2$. Pokud $S_1 = S_2$, pak středem h je opět ten samý bod (nebo jím alespoň může být – je-li h identita). V opačném případě bude střed h alespoň ležet na přímce S_1S_2.*

Důkaz. Zobrazení h_1 i h_2 jsou podobná a navíc zobrazují přímky na jejich rovnoběžky. Proto bude i $h_2 \circ h_1$ takové zobrazení, tedy stejnolehlost. Pokud orientovanou úsečku nejprve natáhneme k_1-krát a pak k_2-krát, bude celkově natažena $(k_1 \cdot k_2)$-krát, což je koeficient stejnolehlosti h.

Zbývá dokázat tvrzení o středu stejnolehlosti h. Pokud $S_1 = S_2$, je situace zřejmá z definice. V opačném případě se podíváme, kam h zobrazí přímku $p = S_1S_2$. Přímka p zůstane zachována po provedení h_1 (protože prochází S_1) i pak po provedení h_2 (protože prochází S_2). Nyní si stačí vzít vlastní bod X přímky p. Pokud se zobrazí sám na sebe, našli jsme na p střed stejnolehlosti h. V opačném případě musí střed h ležet na přímce XX'. Víme ovšem, že X' leží na p, takže $XX' = p$.

To, že střed stejnolehlosti vzniklé složením dvou dílčích leží na spojnici jejich středů, si zapamatujeme. Pomocí tohoto poznatku lze totiž poměrně pohodlně řešit velmi (ale opravdu velmi) obtížné úlohy. Začneme ovšem zlehka.

Příklad. Kružnice l leží uvnitř kružnice k a zevnitř se jí dotýká. Uvažme libovolnou kružnici m, která má vnitřní dotyk s kružnicí k v bodě K a vnější dotyk s kružnicí l v bodě L. Dokažte, že přímka KL prochází pevným bodem nezávislým na poloze kružnice m.



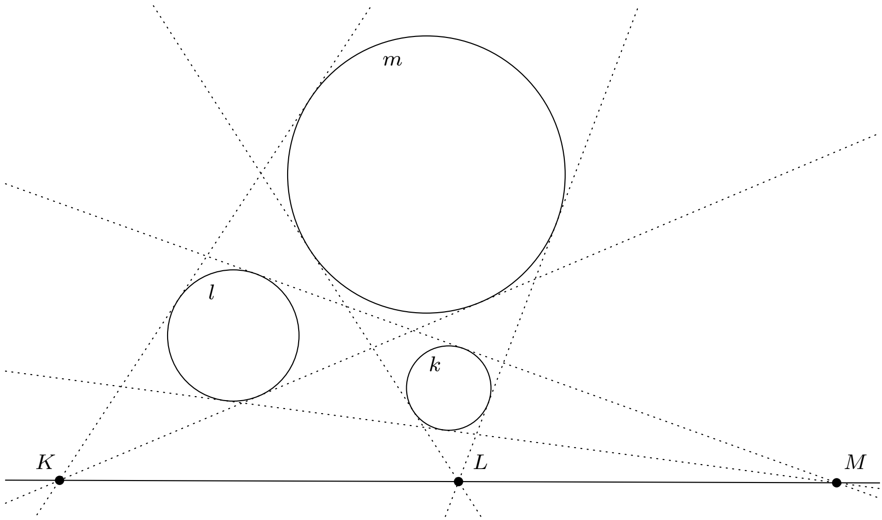
Řešení. Tipneme si, že oním pevným bodem bude střed záporné stejnolehlosti, která převádí kružnici k na kružnici l. A dokážeme to: Zápornou stejnolehlost, která převede k na l získáme tak, že nejprve použijeme kladnou stejnolehlost, která zobrazí kružnici k na m a následně zápornou stejnolehlost, která převede m na l. Přitom první z nich má střed v bodě K a druhá v bodě L. Pro dovršení důkazu tedy stačí použít předešlé tvrzení.

Všimněte si, že dotyk kružnic k a l byl jenom na zmatení – k ničemu jsme ho nepotřebovali. ;)

Nyní už jen předvedeme myšlenku skládání stejnolehlostí na třech cvičeních postupně vzrůstající obtížnosti.

Cvičení. (Mongeho věta) V rovině jsou dány tři neprotínající se kružnice k, l, m. Označme K, L, M po řadě průsečíky vnějších společných tečen kružnic l a m, k a m, k a l. Dokažte, že body K, L, M leží v přímce.

Návod. Interpretujte body M, K jako středy kladných stejnolehlostí zobrazujících k na l, resp. l na m. Uvědomte si, že jejich složením vznikne kladná stejnolehlost zobrazující k na m, která má střed v L, a použijte tvrzení.



Cvičení. Kruh K je čtyřmi přímkami rozdělen na 9 oblastí, z nichž jedna je čtverec $ABCD$. Do oblasti, která má se čtvercem společný pouze bod A, vepíšeme kružnici k_a tak, aby se dotýkala přímek AB a AD a hraniční kružnice k kruhu K v bodě A'. Body B', C' a D' definujeme obdobně. Ukažte, že přímky AA', BB', CC' a DD' procházejí jedním bodem. (Rumunsko TST 2004)

Návod. Ukažte, že všechny čtyři přímky procházejí středem záporné stejnolehlosti zobrazující kružnici k na kružnici vepsanou čtverci $ABCD$.

A na závěr opravdová lahůdka! Pro úsporu místa bude předvedena formou cvičení a návodu doplněného obrázkem.

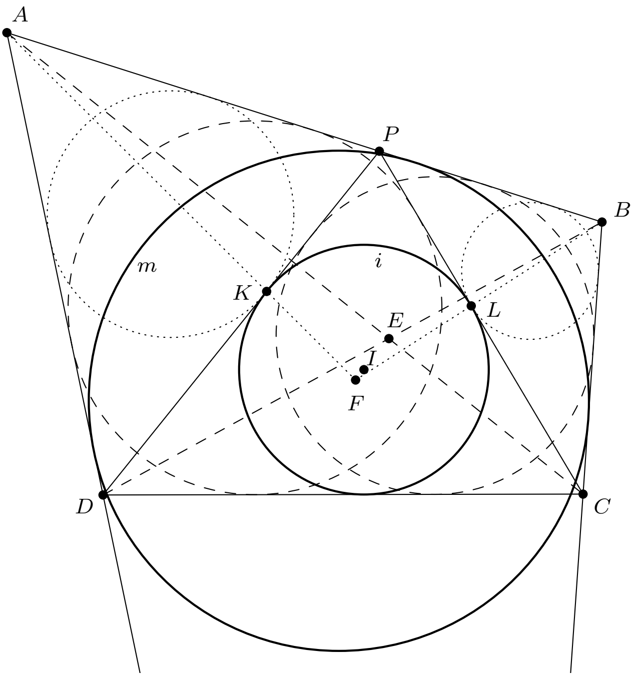
Cvičení. (těžké) Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ a bod P na straně AB takový, že kružnice vepsaná trojúhelníku CPD mající střed v I se dotýká kružnic vepsaných trojúhelníkům APD, PBC postupně v bodech K, L. Označme $E = AC \cap BD$ a $F = AK \cap BL$. Dokažte, že body E, I, F leží v přímce. (IMO Shortlist 2007, G8)

Návod. Označte i kružnici vepsanou trojúhelníku CPD a dokreslete ještě kružnici m, která se dotýká stran DA, AB, BC (trik!).

Interpretuje body A a K (resp. B a L) jako středy vhodných stejnolehlostí a pomocí tvrzení odvoďte, že F je středem záporné stejnolehlosti zobrazující i na m.

Vzpomeňte si (nebo dokažte), že když se kružnice vepsané trojúhelníkům CPD a APD dotýkají, existuje kružnice vepsaná čtyřúhelníku $APCD$ (přeneste vhodné délky a odvoďte $|AP| + |CD| = |PC| + |AD|$).

Podobně jako výše interpretujte E jako střed kladné stejnolehlosti zobrazující i na m a úlohu dokončete.

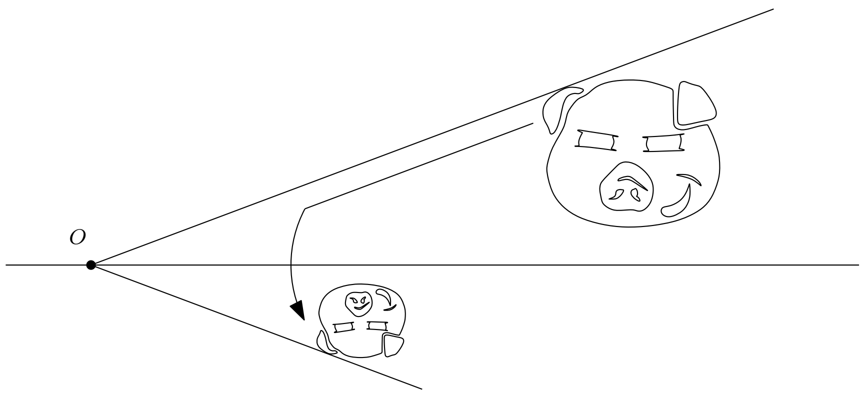


Tímto zanechme kapitolu pojednávající o skládání stejnolehlostí za sebou a zaměřme se na to, jak se stejnolehlost skládá se shodnými zobrazeními. Začneme případem, kdy za ono shodné zobrazení volíme osovou souměrnost.

Osová stejnolehlost

Osová stejnolehlost je zobrazení určené přímkou o, bodem O na této přímce a koeficientem $k > 0$. Bodu A přiřadí bod A' splňující

(i) o je osa úhlu AOA',
(ii) $|OA'| = k \cdot |OA|$.



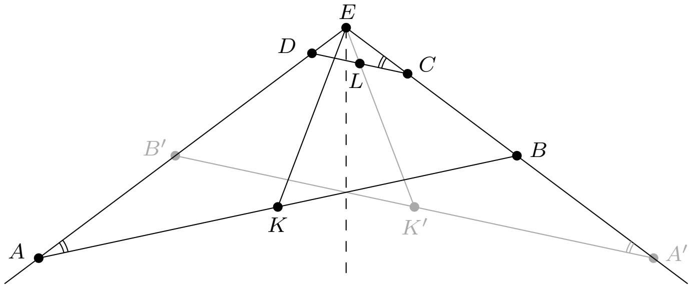
Osová stejnolehlost je tedy složením osové souměrnosti podle přímky o a stejnolehlosti se středem O a koeficientem k v libovolném pořadí. Je-li $k = 1$, je osová stejnolehlost zároveň osovou souměrností (případně osovým posunutím, je-li bod O současně nevlastní).

Cvičení. Ukažte, že osová stejnolehlost určená koeficientem $k < 0$, bodem O a přímkou o je totožná s osovou stejnolehlostí určenou koeficientem $l = -k$, bodem O a přímkou p kolmou na o a procházející bodem O.

Uveďme si nejdříve jednu přímočarou aplikaci osové stejnolehlosti.

Příklad. Označme písmeny K, L středy stran AB, CD tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ a E průsečík polopřímek AD a BC. Dokažte, že osa úhlu AEB protíná úsečku KL.

Řešení. Jelikož $|\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle ECD|$, osová souměrnost podle osy úhlu AEB následovaná stejnolehlostí s koeficientem $|EC| : |EA|$ zobrazí úsečku AB na úsečku CD. Zejména tedy zobrazí střed K úsečky AB na střed L úsečky CD. Body K a L proto leží v opačných polorovinách určených osou úhlu AED, což jsme měli dokázat.



Na tomto místě poznamenejme, že osová stejnolehlost úzce souvisí s konceptem antirovnoběžnosti. Je-li dán úhel AVB, pak o přímkách p a q řekneme, že jsou *antirovnoběžné* vzhledem k úhlu AVB, jestliže obraz přímky p v osové souměrnosti podle osy úhlu AVB je rovnoběžný s přímkou q. Jak jsme viděli v předchozím příkladu, na tětivové čtyřúhelníky lze často s výhodou nahlížet jako na dvojici antirovnoběžných přímek.

Přímkám, které jsou antirovnoběžné vzhledem k úhlu AVB a procházejí jeho vrcholem, říkáme *isogonální*[7]. S isogonálními přímkami se ještě setkáme v kapitole o kruhové inverzi. Nyní jen poznamenejme, že příkladem isogonální dvojice přímek vzhledem k libovolnému úhlu obecného trojúhelníku je spojnice vrcholu s ortocentrem a se středem kružnice opsané.

Cvičení. Označme písmeny M, N středy úhlopříček AC, BD tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ a E průsečík polopřímek BA a CD. Dokažte, že osa úhlu AED protíná úsečku MN.

Cvičení. V trojúhelníku ABC označme O střed kružnice opsané a H průsečík výšek. Dokažte, že $|\sphericalangle BAH| = |\sphericalangle OAC|$ (tj. dokažte, že přímky AH a AO jsou isogonální vzhledem k úhlu BAC).

Návod. Vyúhlete, že oba dotyčné úhly jsou rovny $90° - \beta$.

Cvičení. (těžší) Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod P. Ukažte že obrazy polopřímek AP, BP, CP podle příslušných os úhlů se protínají v jednom bodě. Tento bod se nazývá *isogonal conjugate*[8] bodu P.

Návod. Použijte goniometrický tvar Cevovy věty.

---

[7]Isogonální byly tedy v předchozím příkladu přímky EK a EL.

[8]V češtině zatím pro tento termín neexistuje překlad.

Na závěr ještě uveďme jednu obtížnější úlohu, ve které lze zajímavě uplatnit osovou souměrnost a podobnost.

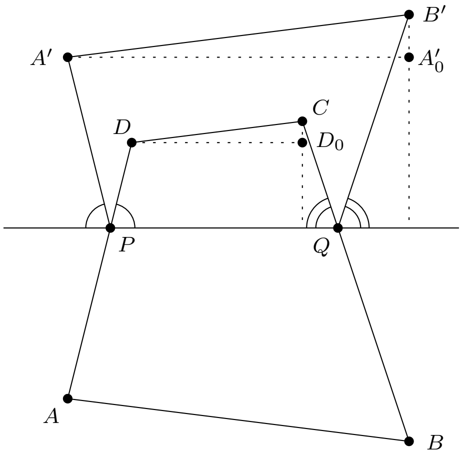
Příklad. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Předpokládejme, že body P, Q leží po řadě na stranách AD, BC tak, že

$$\frac{|AP|}{|PD|} = \frac{|BQ|}{|QC|} = \frac{|AB|}{|CD|}.$$

Dokažte, že přímka PQ svírá s přímkou AB stejný úhel jako s přímkou CD.

(IberoAmerican Olympiad 1987)

Řešení. Zobrazme čtyřúhelník $ABCD$ osově podle přímky PQ a označme jeho obraz $A'B'C'D'$. Stačí dokázat, že $A'B' \parallel CD$. Pro přehlednost položme PQ vodorovně a označme společnou hodnotu tří zlomků písmenem k.



Jelikož úsečky PD a PA' svírají s PQ stejný úhel, je bod A' od přímky PQ přesně k-krát dál než bod D a totéž platí pro body B' a C. Teď už by měl být výsledek zřejmý.

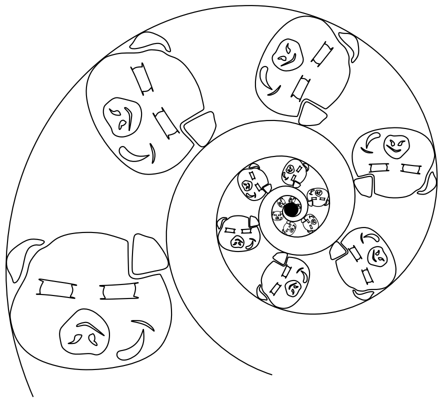
Skutečně, pokud označíme D_0 resp. A'_0 kolmé průměty bodů D, A' na kolmice k PQ vedené body C, B', dostaneme $|B'A'_0| = k \cdot |CD_0|$, což spolu s $|A'B'| = k \cdot |DC|$ znamená, že pravoúhlé trojúhelníky $A'B'A'_0$ a DCD_0 jsou podobné, a jelikož $CD_0 \parallel B'A'_0$, tak i $CD \parallel A'B'$.

Skutečným skvostem mezi podobnými zobrazeními je ovšem zobrazení, které vznikne složením stejnolehlosti a otočení. Říká se mu spirální podobnost.

Spirální podobnost

Spirální podobnost S je zobrazení určené středem S, úhlem otočení $\varphi \in \langle 0°, 360°)$ a koeficientem $k > 0$. Bodu A v rovině přiřadí takový bod A', že

(i) $|\sphericalangle A'SA| = \varphi$,
(ii) $\frac{|SA'|}{|SA|} = k$.

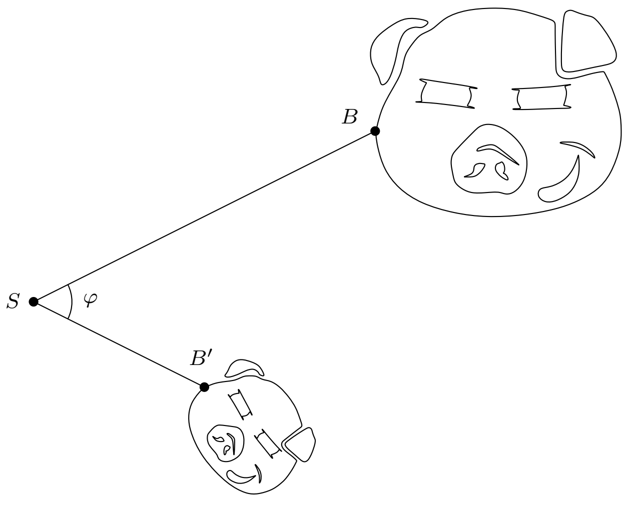


Pojďme si spirální podobnost trochu osahat. Upozorněme ještě, že při studiu spirální podobnosti nebudeme pracovat s nevlastními body.

Pro $\varphi = 0°$, resp. $\varphi = 180°$ se ze spirální podobnosti zřejmě stává stejnolehlost s kladným, resp. záporným koeficientem, a pro $k = 1$ otočení. Celé zobrazení si tedy lze představovat jako otočení následované stejnolehlostí se stejným středem nebo naopak (na pořadí skládání v tomto případě zřejmě nezáleží).

Jakožto složení shodného a podobného zobrazení je spirální podobnost pochopitelně též podobným zobrazením. Zejména se tedy zachovají velikosti úhlů, přímky se zobrazí na přímky, kružnice na kružnice a libovolný rovinný útvar na útvar sobě podobný.

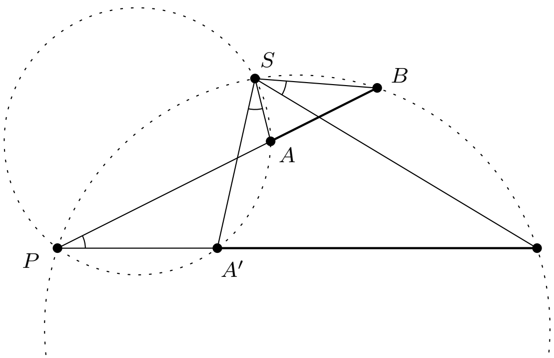
Na závěr si ještě povšimněme, že spirální podobnost „vyrábí“ podobné trojúhelníky. Skutečně, trojúhelníky mající za vrcholy střed spirální podobnosti, bod a jeho obraz se totiž všechny shodují ve velikosti jednoho úhlu (φ) a poměru stran, které ho svírají (k), a jsou si tak díky větě *sus* podobné.



Konstrukce středu spirální podobnosti

Nyní ukážeme, že pro libovolnou dvojici vzorů A, B a jejich obrazů A', B' splňující $AB \nparallel A'B'$ existuje unikátní spirální podobnost, která zobrazí A na A' a B na B', a tedy i celou (orientovanou) úsečku AB na $A'B'$.

Označme P průsečík přímek AB a $A'B'$ a pro jednoduchost ať je vzájemná poloha bodů jako na obrázku (ostatní případy se dokáží obdobně).



Je-li S střed spirální podobnosti zobrazující AB na $A'B'$, musí být úhel svíraný přímkami AB a $A'B'$ roven úhlu otočení, tedy

$$|\sphericalangle A'PA| = \varphi = |\sphericalangle A'SA| = |\sphericalangle B'SB|.$$

To znamená, že má-li střed spirální podobnosti existovat, musí to být druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům PAA' a PBB'. Na druhou stranu se snadno přesvědčíme, že tento bod středem hledané spirální podobnosti opravdu je.

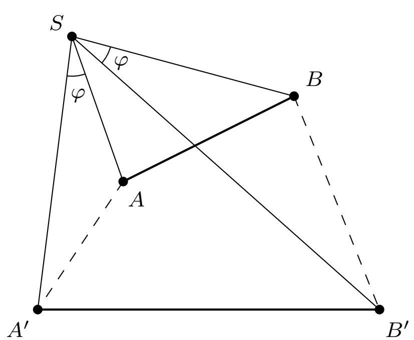
Spirální podobnost chodí po dvou

Tou nejdůležitější vlastností spirální podobnosti je bezesporu to, že vytváří velké množství podobných trojúhelníků. Slogan, který tento fakt vystihuje nejlépe, zní

Spirální podobnost chodí po dvou!

Přesnější formulaci pak dává následující lemma.

Lemma. *Předpokládejme, že S je střed spirální podobnosti, která zobrazuje A na A' a B na B'. Pak nejen $\triangle SAA' \sim \triangle SBB'$, ale i $\triangle SAB \sim \triangle SA'B'$ a spirální podobnost, která zobrazuje A na B a A' na B', má za svůj střed rovněž bod S.*



Důkaz. Jelikož $|SA'| : |SA| = k = |SB'| : |SB|$ a $|\sphericalangle A'SA| = \varphi = |\sphericalangle B'SB|$, můžeme psát

$$|SA'| : |SB'| = |SA| : |SB| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle A'SB'| = \varphi + |\sphericalangle ASB'| = |\sphericalangle ASB|,$$

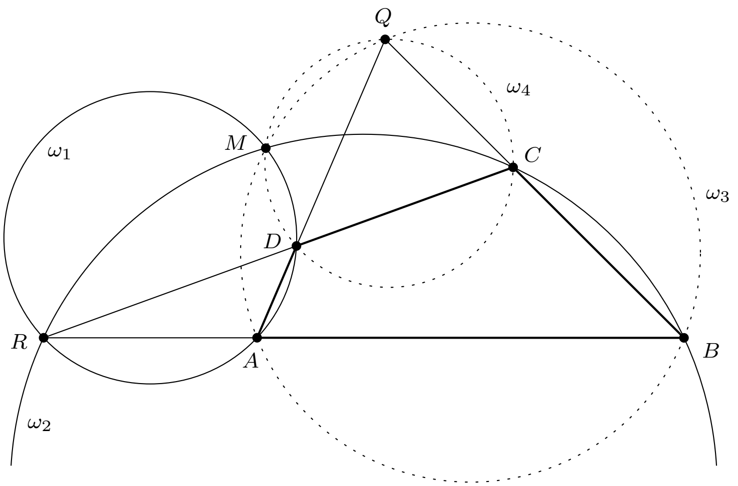
takže skutečně $\triangle SAB \sim \triangle SA'B'$.

Z toho už okamžitě plyne, že podobnost, která zobrazuje A na B a A' na B', má střed v S.

Na tomto místě musíme zdůraznit, že ačkoliv se zmíněné dvě spirální podobnosti shodují ve středu, jsou různé – liší se obecně jak úhlem otočení, tak koeficientem. I tak je ale předchozí lemma nesmírně užitečné. Kdykoliv narazíte na dva podobné trojúhelníky, které sdílejí vrchol, můžete si být jisti, že v obrázku je ještě jedna taková dvojice.

Předchozí lemma trivializuje následující (jinak snadno vyúhlitelný) příklad.

Příklad. Je dán čtyřúhelník $ABCD$. Označme $R = AB \cap CD$ a $Q = AD \cap BC$. Ukažte, že kružnice opsané trojúhelníkům RAD, RBC, QAB a QCD procházejí všechny jedním bodem.



Řešení. Označme M druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům RAD a RBC. Pak M je střed spirální podobnosti zobrazující AB na DC, a tedy je i středem (jiné) spirální podobnosti zobrazující AD na BC. Jako takový je druhým průsečíkem kružnic opsaných trojúhelníkům QAB a QCD.

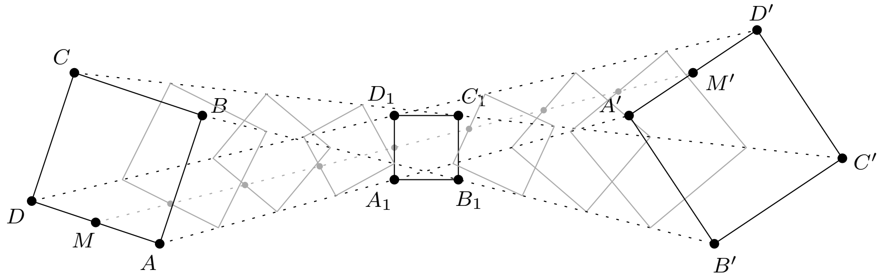
Bod M z předchozí úlohy má své jméno; říká se mu (vnější) *Miquelův bod* čtyřúhelníku $ABCD$. Kromě něj existují ještě v každém čtyřúhelníku dva (vnitřní) Miquelovy body. Jeden z nich je středem spirální podobnosti zobrazující AB na CD, a tedy i (jiné!) podobnosti zobrazující AC na BD, druhý z nich je středem spirálních podobností zobrazujících BC na DA, potažmo BD na CA.

Cvičení. Jsou dány body A, B, C, D, Q, R a M jako v předchozím příkladu. Najděte šest (!) dvojic podobných trojúhelníků s vrcholy v těchto sedmi bodech.

Klouzání

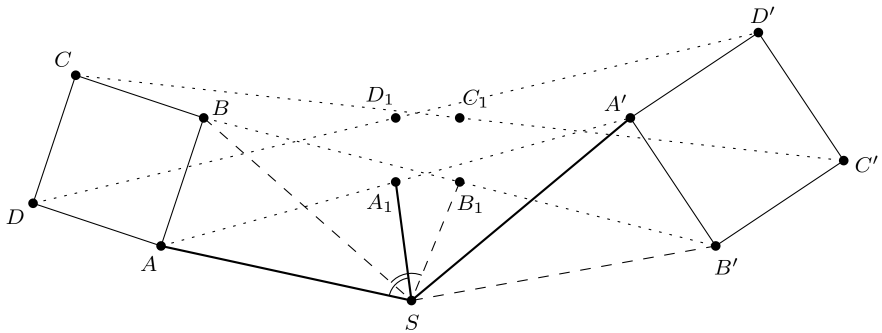
Začněme příkladem.

Příklad. V rovině jsou dány čtverce $ABCD$ a $A'B'C'D'$ značené proti směru chodu hodinových ručiček. Označme A_1 střed úsečky AA' a body B_1, C_1, D_1 obdobně. Ukažte, že $A_1B_1C_1D_1$ je čtverec.



Než si ukážeme řešení příkladu, zamysleme se, co vlastně říká. Představme si v rovině dva podobné obrazce (v našem případě jsou to čtverce) a spojme jejich odpovídající si body úsečkami. Po těchto úsečkách nyní nechme „klouzat“ body konstantní rychlostí tak, aby po předem daném čase dospěly všechny klouzající body z prvního čtverce do druhého. Úloha pak tvrdí, že obrazce vzniklé z klouzajících bodů budou stále podobné tomu počátečnímu a koncovému.

Řešení. Označme S střed spirální podobnosti zobrazující AB na $A'B'$. Obraz čtverce $ABCD$ v této podobnosti bude zřejmě opět čtverec. Jelikož čtverec je určený dvěma sousedními vrcholy a svou orientací, bude tímto obrazem přímo $A'B'C'D'$.



Zaměřme se na trojúhelník ASA' s těžnicí SA_1. Označme $|\sphericalangle ASA_1| = \varphi$ a $|SA_1| : |SA| = k$.

Bod A_1 je obrazem bodu A ve spirální podobnosti $S(S, \varphi, k)$. Jelikož trojúhelníky ASA_1, BSB_1, CSC_1 a DSD_1 jsou všechny podobné (jsou určené parametry spirální podobnosti zobrazující $ABCD$ na $A'B'C'D'$), zobrazí $S(S, \varphi, k)$ zároveň B na B_1, C na C_1 a D na D_1. Čtyřúhelník $A_1B_1C_1D_1$ je obrazem čtverce ve spirální podobnosti, a je proto sám čtvercem.

Cvičení. Je dán trojúhelník ABC. Označme D druhý průsečík kružnice, která se dotýká strany AB v bodě A a prochází bodem C, a kružnice, která se dotýká strany AC v bodě A a prochází bodem B. Označme E ten bod polopřímky AB, pro nějž $|AE| = 2|AB|$ a F ten bod polopřímky

CA, pro nějž $|CF| = 2|CA|$. Dokažte, že body A, D, E a F leží na jedné kružnici.

(Turecko 1998)

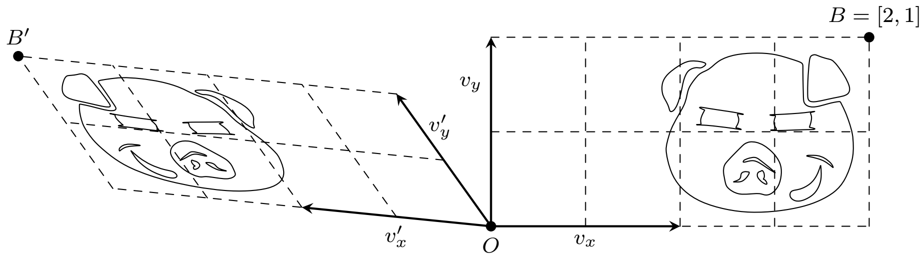
Návod. Z úsekových úhlů odvoďte $\triangle DBA \sim \triangle DAC$. Uvědomte si, že spirální podobnost se středem D zobrazující BA na AC zobrazí i E na F a odvoďte, že $\triangle DEA \sim \triangle DFC$.

Lineární zobrazení

Za účelem dalšího zobecnění nahlédneme do analytické geometrie, respektive lineární algebry. Zavedeme soustavu souřadnic, tedy stanovíme jeden bod O, kterému budeme říkat počátek, a dva *bázové* vektory v_x a v_y, přičemž oba mají jednotkovou velikost a jsou na sebe kolmé.

Že bod B má souřadnice $[x, y]$, pak znamená, že vznikne posunutím bodu O o vektor v_x „x-krát“ a o vektor v_y „y-krát“. Formálně zapsáno $B = O + xv_x + yv_y$.

Lineárním zobrazením pak budeme rozumět zobrazení, které nějak „šoupne“ vektory v_x, v_y. Přesněji je lineární zobrazení dáno libovolnými dvěma vektory v'_x, v'_y a je definováno tak, že bodu $B = O + xv_x + yv_y$ přiřadí bod $B' = O + xv'_x + yv'_y$.



Hned si všimneme, že když budou vektory v'_x a v'_y ležet v jedné přímce (speciálně bude-li jeden z nich nulový), nebude příslušné lineární zobrazení bijekcí. V opačných případech ale bijektivní bude a inverzní zobrazení bude opět lineární.

Máme-li vícedimenzionální prostor, je lineární zobrazení definováno stejně, pomocí obrazů bázových vektorů. Jen s tím rozdílem, že je bázových vektorů více – tolik, kolik je dimenze příslušného prostoru.

Cvičení. (těžší) Existuje lineární zobrazení l z prostoru do prostoru (3D), pro které platí $l \circ l \neq 0$, ale $l \circ l \circ l = 0$? Nulou značíme zobrazení, které všechny prvky pošle na bod o souřadnicích [0, 0, 0].

Lineární zobrazení se často vyskytuje v počítačové grafice. Tam je reprezentováno čtvercovou maticí[9] $n \times n$. V k-tém sloupci této matice jsou postupně napsané souřadnice obrazu k-tého bázového vektoru, tedy například matice zobrazení na obrázku je:

$$\begin{pmatrix} -1{,}0 & -0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Cvičení. Jak z matice a souřadnic bodu B spočítáme x-ovou souřadnici bodu B'?

Cvičení. Složení dvou lineárních zobrazení $l_1 \circ l_2$ je opět lineární. Jak vypadá jeho matice v závislosti na maticích l_1 a l_2?

Lineárním zobrazením je například stejnolehlost s koeficientem k a středem v O nebo otočení o α podle O. Příslušné matice budou

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

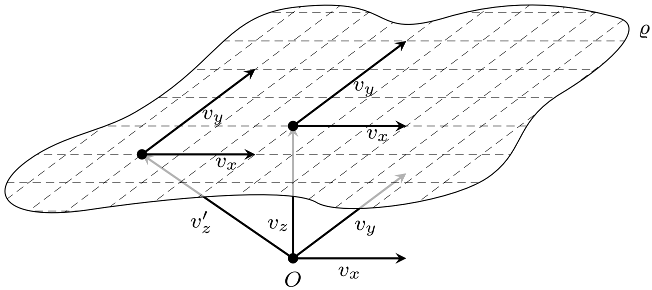
[9]Matice je jen odborný pojem pro tabulku čísel, která se ohraničuje závorkami.

Jako příklady nepodobných lineárních zobrazení uvedeme například nerovnoměrnou změnu měřítka a zkosení:

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Afinní zobrazení

Pomocí lineárního zobrazení ale neumíme vytvořit posunutí ani otočení či stejnolehlost podle jiného středu než počátku. Abychom toho dosáhli, přeneseme se o dimenzi výš.



Označíme ϱ rovinu danou rovnicí $z = 1$. Nyní použijeme nějaké lineární zobrazení na celý prostor, které zobrazí všechny body roviny ϱ do roviny ϱ. Chápeme-li toto zobrazení pouze v rámci ϱ, nejsme limitovaní žádným pevným bodem O, jako v případě lineárního zobrazení. Takové zobrazení budeme nazývat *afinní*.

Když si rozmyslíme, jakou úlohu v něm hraje třetí vektor, zjišťujeme, že poslední řádek matice příslušného lineárního zobrazení musí být 0, 0, 1 a že afinní zobrazení se dá chápat jako složení lineárního zobrazení s posunutím (nejprve provádíme lineární, pak posunutí).

Uveďme nyní základní vlastnosti afinního zobrazení v rovině:

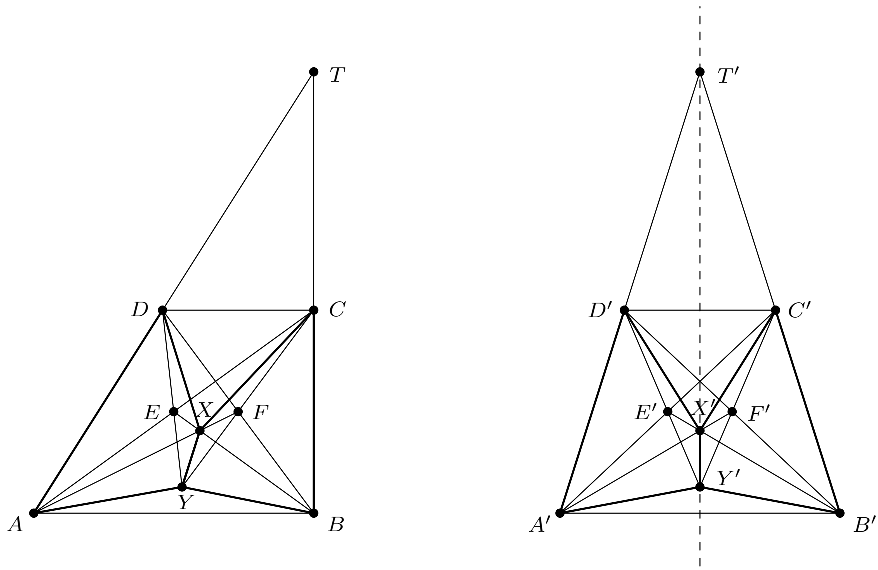
(i) Zobrazení je afinní, právě když každou trojici bodů na přímce zobrazí na trojici bodů na přímce ve stejném poměru (nebo do jednoho bodu).
(ii) Inverzní zobrazení k prostému afinnímu zobrazení je afinní.
(iii) Složení dvou afinních zobrazení je afinní.
(iv) Je-li dán trojúhelník ABC a trojice bodů A', B', C', existuje právě jedno afinní zobrazení které zobrazí příslušné body na jejich předepsané obrazy. Toto zobrazení bude prosté právě tehdy, když bude $A'B'C'$ opět trojúhelník.
(v) Afinní zobrazení obecně nezachovává úhly, kolmost ani kružnice (ty mění na elipsy).
(vi) Pro danou nedegenerovanou elipsu existuje afinní zobrazení, které ji zobrazí na kružnici.

Z první vlastnosti plyne, že afinní zobrazení zachovává středy úseček neboli obraz středu dvou bodů je střed obrazu těchto bodů. Prosté afinní zobrazení dále zachovává například

(i) přímky,
(ii) rovnoběžky,
(iii) poměry obsahů,
(iv) elipsy,
(v) tečny k elipsám.

Příklad. Je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD, s pravým úhlem u ramena BC, splňující $|AB| > |CD| > \frac{|AB|}{3}$. Středy úhlopříček AC, BD označíme postupně E, F. Nakonec průsečíky $AF \cap BE$ a $CF \cap DE$ označíme postupně X, Y. Který z čtyřúhelníků $ADXY$, $BCXY$ má větší obsah?

Řešení. Označíme T průsečík AD a BC, dále si zvolíme nějaký rovnoramenný trojúhelník $A'B'T'$. Víme, že existuje afinní zobrazení, ve kterém bude trojúhelník $A'B'T'$ obrazem trojúhelníka ABT (vlastnost (iv)).



Toto zobrazení nám zachová celou konstrukci až na pravoúhlost lichoběžníka a přitom obsahy čtyřúhelníků $A'D'X'Y'$ a $B'C'X'Y'$ jsou stejné, protože jsou jen vzájemným osovým obrazem podle výšky z T'. Jelikož afinní zobrazení zachovává poměry obsahů, dostáváme, že obsahy ze zadání jsou stejné.

Cvičení. Je dána elipsa e se středem S a na ní bod X. Tečnu k e v bodě X označíme t. Rovnoběžka k t vedená bodem S protne e v bodech A, B. Dokažte, že tečna k e v bodě A je rovnoběžná s XS.

Cvičení. Uvnitř trojúhelníku ABC je dán bod S. Dokažte, že středy stran BC, CA, AB, středy úseček AS, BS, CS a průsečíky $AS \cap BC$, $BS \cap CA$, $CS \cap AB$ leží všechny na jedné elipse.

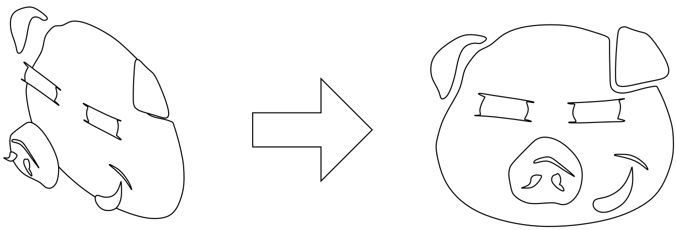
Úloha s lichoběžníkem byla vystavena na afinních pojmech (těch, které afinní zobrazení zachovává), takže jsme si mohli udělat lichoběžník BÚNO rovnoramenný. Úlohy postavené na afinních pojmech bohužel nebývají v olympiádě příliš časté, protože se často dají dobře řešit analyticky.

Dokonce rozhodnete-li se už umlátit úlohu postavenou na afinních pojmech analyticky, můžete si zvolit souřadnice tří bodů jako dané (a ne jen dvou jako obvykle). Když ji budete řešit pro změnu elementárně, je dobré si uvědomit, že nemá smysl ji úhlit a hledat tětivové čtyřúhelníky.

Geometrická zobrazení III

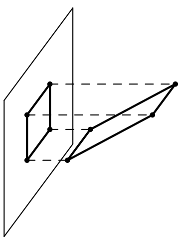
V posledním dílu seriálu více zapojíme do hry prostor. Ukážeme si projekci a kolineaci a v samotném závěru i kruhovou inverzi.

Projekce



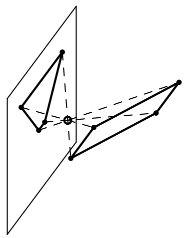
Projekce je obecný a široce využívaný způsob, jak zanést trojrozměrný objekt do roviny. Jedná se o zobrazení dané středem – bodem S (může být i nevlastní) v prostoru a rovinou projekce ρ, ve které neleží S. Projekce zobrazuje všechny body prostoru různé od S (i nevlastní) na všechny body roviny ρ a je definovaná tak, že bodu X přiřadí průsečík přímky SX s ρ.

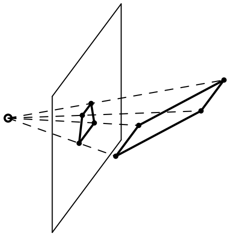
Jak projekce funguje, si ukážeme na následujících příkladech, kde zobrazujeme „šikmý" obdélník na svislou rovinu:



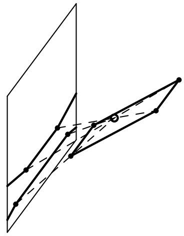
Nejjednodušším typem projekce je takzvaná ortogonální projekce, to je taková, kde S je nevlastním bodem kolmým na ρ. V takovém případě se každému bodu přiřadí nejbližší bod roviny ρ. Tato projekce, stejně jako všechny projekce se středem v nevlastním bodě, zachovává (stejně jako afinní zobrazení) rovnoběžnost a poměry na přímce. Projekce se středem ve vlastním bodě už ovšem tuto vlastnost nemají.

Ve skutečném světě se můžeme s projekcí setkat v souvislosti s fotografováním. Střed projekce je malým otvorem, tím musí projít světlo, které následně dopadá na fotocitlivou vrstvu (rovina projekce). V takové situaci leží střed projekce mezi rovinou projekce a fotografovaným objektem, což má za následek, že vyfocený objekt je „obráceně". Na rozdíl od ortogonální projekce již funguje klasický poznatek, že „co je dál, je menší".





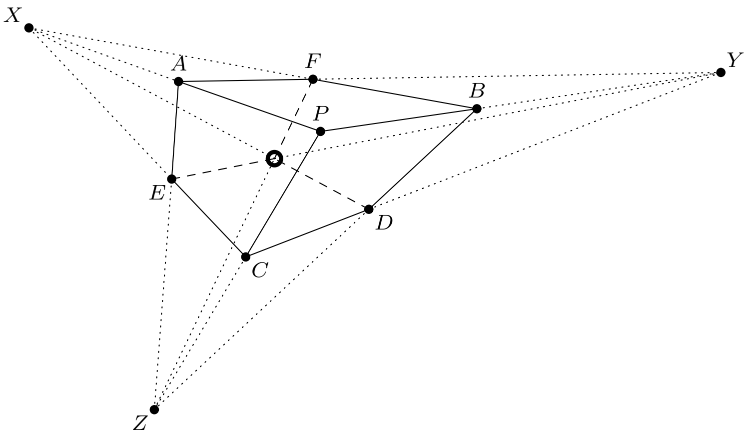
Naštěstí reálným světem omezováni nejsme, takže není problém umístit střed za rovinu projekce. Tím docílíme stejného efektu jako v předchozím případě s tím rozdílem, že obraz převrácený nebude. Ostatně na umístění roviny příliš nezáleží, můžeme ji beze změny výsledku „posouvat“ pomocí stejnolehlosti se středem v S.



Výsledek projekce ale nemusí být tak intuitivní jako v předchozích třech příkladech. To za situace, kdy je střed projekce „v centru dění“. V našem obrázku se boční strany obdélníku zobrazily nikoli na úsečky, ale na doplňky úsečky do přímky.

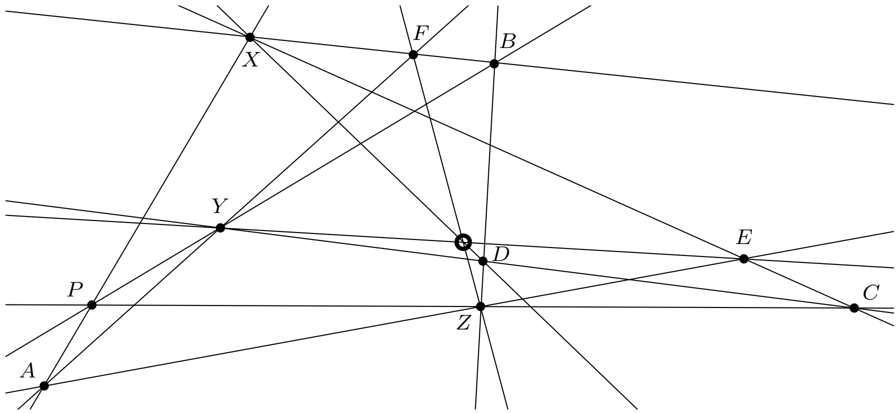
Řešíme 2D úlohy 3D vhledem

Příklad. V rovině jsou dány body P, X, Y, Z v obecné poloze.[10] Na přímkách PX, PY, PZ leží po řadě body A, B, C různé od dříve jmenovaných bodů. Průsečíky dvojic přímek BZ a CY, CX a AZ, AY a BX označme postupně D, E, F. Dokažte, že přímky DX, EY, FZ se protínají v jednom (ne nutně vlastním) bodě.



Vidíte správně, to je přece zadní vrchol kvádru. Jenže proč se v placaté úloze můžeme odvolávat na prostor? A je kvádr „vidět“ i v následujícím obrázku?

[10]Říkáme, že body jsou *v obecné poloze*, jestliže žádné tři neleží v přímce.



Ukažme, že onen placatý obrázek je opravdu obrazem kvádru v jisté projekci.

Určíme střed této projekce a ještě v prostoru body P_0, X_0, Y_0, Z_0, A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, F_0 tak, aby splňovaly požadavky zadání a jejich obrazem v projekci byly příslušné neonulované body.

Střed projekce S můžeme zvolit jako jakýkoli vlastní bod mimo naši rovinu ze zadání. Body X_0, Y_0, Z_0 zvolíme nevlastní (samozřejmě tak, aby ležely na přímkách SX, SY, SZ), bod P_0 zvolíme jako P.

Bod A_0 je již jednoznačně určen – musí být průsečíkem P_0X_0 (aby splňoval zadání) a AS (aby jeho obraz byl A). Přitom tento průsečík existuje díky tomu, že body S, P, X, X_0, A leží v jedné rovině. Obdobně jsou jednoznačně určeny i body B_0 a C_0.

Průsečík D_0 existuje, protože body P_0, B_0, Y_0, C_0, Z_0 leží v jedné rovině, stejně tak existují průsečíky E_0, F_0.

Zbývá už jen říci, že přímky A_0D_0, B_0E_0, C_0F_0 se protínají v jednom bodě, jeho obraz bude hledaný průsečík v úloze. Ty se ale přece protnou v zadním vrcholu rovnoběžnostěnu neboli v průsečíku rovin $A_0E_0F_0$, $B_0F_0D_0$, $C_0D_0E_0$. Úloha je tak dokázaná.

Abychom získali přímo kvádr, bylo by třeba volit S tak, aby přímky SX, SY, SZ byly navzájem kolmé, což je možné jen tehdy, je-li trojúhelník XYZ ostroúhlý. Jinak byla celá úvaha obecná, a tedy i ve druhém placatém obrázku je nakreslený rovnoběžnostěn. Jen se jedná o onen zvláštní případ projekce.

Za povšimnutí stojí, že jsme vlastně nepotřebovali, aby vznikl rovnoběžnostěn (závěrečný argument by fungoval, i kdybychom body X_0, Y_0, Z_0 neposlali do nekonečna). Ovšem když už jsme projekci použili, tak proč si ji neudělat co nejintuitivnější, že?

Příklad. (Desarguesova věta) Jsou dány trojúhelníky ABC a DEF. Označme X, Y, Z po řadě (ne nutně vlastní) průsečíky dvojic přímek AB s DE, BC s EF a CA s FD. Dokažte, že přímky AD, BE, CF se protínají v jednom (ne nutně vlastním) bodě právě tehdy, když body X, Y, Z leží v jedné přímce.

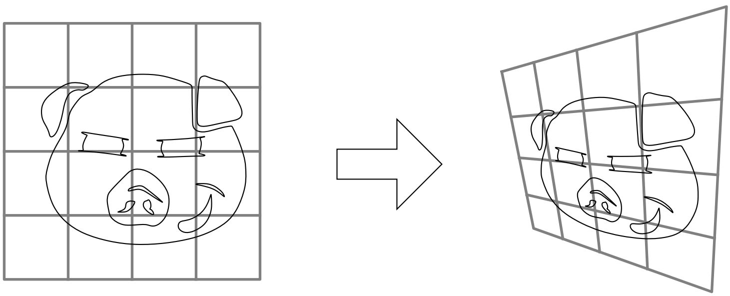
Řešení. Klíčovou myšlenkou je představit si trojúhelníky ABC, DEF v různých rovinách neboli ve smyslu řešení předchozí úlohy trojúhelníky $A_0B_0C_0$, $D_0E_0F_0$ v různých rovinách zvolit. Dokazujeme ekvivalenci, tedy postupně dokážeme obě implikace:

1) Předpokládáme, že se AD, BE, CF protnou v bodě P. Dokážeme, že X, Y, Z leží v přímce. Body A_0, B_0, C_0 a P_0 zvolíme tak, aby neležely v jedné rovině. Body D_0, E_0, F_0 jsou pak jednoznačně určeny (podobně jako A, B, C v předchozí úloze), průsečík X_0 přímek A_0B_0 a D_0E_0 existuje, protože body P_0, A_0, D_0, B_0, E_0 leží v jedné rovině, obdobně body Y_0 a Z_0. Všechny tři

pak musí ležet v jedné přímce, a to v průsečíku rovin $A_0B_0C_0$ a $D_0E_0F_0$, a proto i samotné X, Y, Z leží v jedné přímce.

2) Předpokládejme, že X_0, Y_0, Z_0 leží v jedné přímce. Zvolme body A_0, D_0 tak, aby neležely spolu s přímkou $X_0Y_0Z_0$ v jedné rovině. Z toho už jednoznačně vzniknou body B_0, C_0 v rovině $A_0X_0Y_0Z_0$ a body E_0, F_0 v rovině $D_0X_0Y_0Z_0$. Přímky A_0D_0, B_0E_0 a C_0F_0 se potom protnou – v průsečíku rovin $A_0B_0D_0E_0$, $B_0C_0E_0F_0$ a $C_0A_0F_0D_0$.

Kolineace – přitáhneme si body z nekonečna



V definici afinního zobrazení jsme prohlásili naši rovinu ρ za rovinu danou rovnicí $z = 1$ a po lineárním zobrazení jsme následně vyžadovali, aby tuto rovinu nechalo na místě. Neměli jsme totiž jak naložit s body, které se zobrazí mimo ni. Nyní však již víme, co s nimi – použijeme projekci se středem v počátku O.

Kolineace je bijektivní zobrazení z roviny ρ s nevlastními body do sebe. Je určena bijektivním lineárním zobrazením prostoru do sebe a je definována jako složení tohoto lineárního zobrazení a projekce se středem v počátku. Následuje několik poznatků.

Složení dvou kolineací je kolineace, která je určena složením příslušných lineárních zobrazení. Stejně tak inverzní zobrazení ke kolineaci je kolineace určená inverzním lineárním zobrazením. Lineární zobrazení ovšem není určeno kolineací jednoznačně – identita vznikne z libovolné stejnolehlosti se středem v počátku.

Lineární zobrazení i projekce zobrazuje přímky na přímky, takže má tuto vlastnost i kolineace.

Jelikož je kolineace zobecněním afinních zobrazení, může zobrazit kružnici na elipsu, kromě ní mohou být obrazem kružnice ještě zbylé kuželosečky, tedy parabola (včetně nevlastního bodu ve směru osy) a hyperbola (včetně dvou nevlastních bodů ve směrech asymptot). Kolineace samozřejmě stejně jako afinní zobrazení zachovává tečny ke kuželosečkám, ty se ovšem mohou dotýkat i v nevlastním bodu – nevlastní přímka u paraboly a asymptoty u hyperboly.

Je-li obraz některého nevlastního bodu přímky p opět nevlastní, znamená to, že obraz přímky p v lineárním zobrazení je rovnoběžný s ρ, a zobrazíme-li pak tento obraz projekcí, získáme to samé, jako bychom ho zobrazili nějakou stejnolehlostí. Jak lineární zobrazení, tak stejnolehlost zachovávají poměry na přímce, tedy taková kolineace zachová poměry na přímce p.

Je-li obraz nevlastní přímky opět nevlastní přímkou, jedná se o bijektivní afinní zobrazení. Jsou-li dokonce všechny nevlastní body pevné, je to stejnolehlost.

Co si můžeme zvolit?

Afinní zobrazení nám dovolovalo si zvolit obraz tří bodů, kolineace jde dál:

Věta. *Mějme čtverec $ABCD$ postupně se souřadnicemi vrcholů* $[0,0]$, $[1,0]$, $[1,1]$, $[0,1]$. *Dále mějme libovolnou čtveřici bodů A'', B'', C'', D'' v obecné poloze. Pak existuje kolineace, která přiřadí bodům A, B, C, D po řadě body A'', B'', C'', D''.*

Důkaz. Chceme nalézt rovnoběžník $A'B'C'D'$ v prostoru tak, aby projekce se středem v O zobrazila jeho vrcholy na A'', B'', C'', D''. Jakmile to budeme mít, zvolíme pro lineární zobrazení vektor z' jako OA', vektor x' jako $A'B'$ a vektor y' jako $A'D'$ a máme kýženou kolineaci.

Pro konstrukci $A'B'C'D'$ nejprve zvolíme bod M (střed rovnoběžníku) kdekoli v průniku rovin $OA''C''$ a $OB''D''$ mimo bod O. Nyní stačí najít body A', C' v rovině $OA''C''$ tak, aby M byl středem úsečky $A'C'$, a analogicky body B', D' v rovině $OB''D''$ tak, aby M byl středem $B'D'$. Tím získáme čtyřúhelník $A'B'C'D'$, ve kterém se úhlopříčky půlí, tedy rovnoběžník.

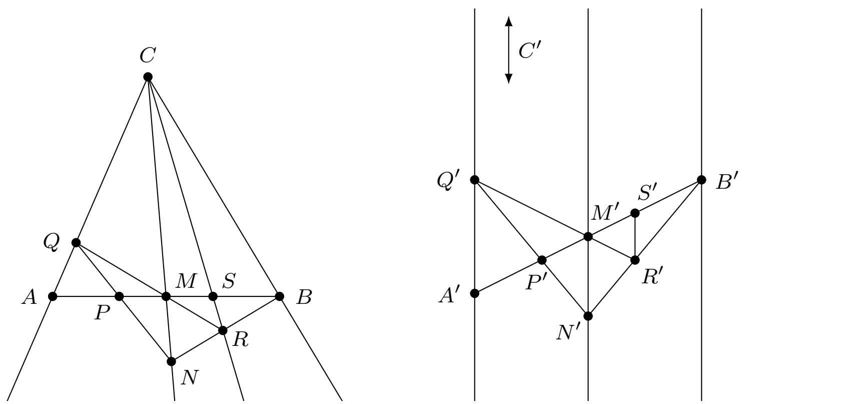
Konstrukce takových bodů je již jednoduché cvičení na středovou souměrnost. Bod A' například najdeme jako průsečík OA'' a středového obrazu přímky OC'' podle M.

Pokud použijeme jednotkový čtverec jen jako mezivýsledek, dostáváme obecnější tvrzení.

Důsledek. *Mějme čtveřici bodů $ABCD$ v obecné poloze a dále čtveřici bodů $A'B'C'D'$ v obecné poloze. Pak existuje kolineace, ve které se body A, B, C, D zobrazí na A', B', C', D'.*

Příklad. (výběrové soustředění před IMO 2010) Bod M je středem strany AB trojúhelníka ABC. Na polopřímce opačné k MC zvolíme bod N a uvnitř úsečky AM zvolíme bod P. Označíme Q průsečík přímek AC a NP, dále R průsečík QM a NB a nakonec S průsečík AB a RC. Dokažte $|PM| = |SM|$.

Řešení.



Na obrázek provedeme kolineaci. Zvolíme přitom obrazy bodů Q, B, C a nevlastního bodu ve směru přímky AB.

Přímku $Q'B'$ umístíme „vodorovně“, C' bude nevlastní bod ve směru kolmém na $Q'B'$ a obraz nevlastního bodu přímky AB bude opět nevlastní. Díky volbě obrazu nevlastního bodu ve směru AB budou na této přímce zachovány poměry, tedy M' bude středem $A'B'$ a stačí nám ukázat, že $|P'M'| = |S'M'|$.

Přímky $A'C'$ a $B'C'$ jsou rovnoběžné a $M'C'$ je osou osové souměrnosti, která převádí jednu přímku na druhou. Díky kolmosti $Q'B'$ na $C'M'$ je Q' obrazem B' v této osové souměrnosti. Proto jsou i přímky $B'M'$, $B'N'$ osově symetrické s přímkami $Q'M'$, $Q'N'$ a bod P' tak je osově symetrický s bodem R'. Tedy bod P' je stejně daleko od přímky $M'C'$ jako bod R' a ten je od ní stejně daleko jako S', protože přímky $M'C'$ a $R'S'$ jsou rovnoběžné. Z toho již dostáváme $P'M' = S'M'$.

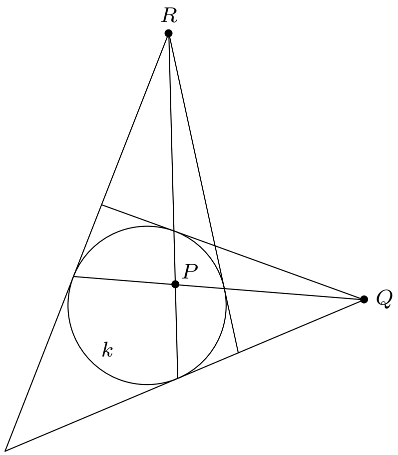
Cvičení. (konstrukce čtyřúhelníku z PQR) Je dána čtveřice bodů $PQRA$ v obecné poloze. Sestrojte body B, C, D, aby bod P byl průsečíkem AC a BD, bod Q byl průsečíkem AB a CD a bod R byl průsečíkem BC a DA.

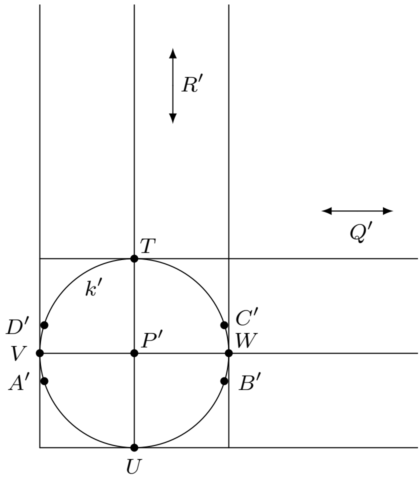
Návod. Představte si čtverec o velikosti strany 2 s protějšími vrcholy A a P, jehož strany budou ve směrech bodů Q, R. Snažte se pomocí pravítka nakreslit jednotkovou mřížku.

Příklad. (konstrukce tětivového čtyřúhelníku z PQR) Je dán trojúhelník PQR, kružnice k taková, že tečny vedené ke k z bodu Q se dotýkají k na přímce PR a tečny vedené ke k z bodu R se dotýkají k na přímce PQ. Dokažte, že existuje čtyřúhelník $ABCD$ vepsaný kružnici k takový, že P je průsečíkem jeho úhlopříček, Q je průsečíkem AB a CD a R je průsečíkem BC a DA.

Řešení. Pro začátek si uvědomíme, že přímka QR neprotíná kružnici k. To proto, že bod Q leží na přímce PQ až za tečnou procházející bodem R.

Zobrazíme si konstrukci nějakou kolineací, která posílá body P a Q na nevlastní body. V takové kolineaci je vzorem nevlastní přímky právě přímka QR. Protože ji kružnice k neprotíná, nezobrazila se ani na hyperbolu, ani na parabolu, ale „pouze“ na elipsu. Toho můžeme rovnou využít a složit tuto kolineaci ještě s nějakým afinním zobrazením, které nám elipsu narovná zpátky na kružnici. Obrazy bodů Q a R přitom zůstanou nevlastní.





Označme body dotyku kružnice k' s přímkami vedenými bodem Q' jako T, U a body dotyku kružnice k' s přímkami vedenými bodem R' jako V, W. Protože jsou tečny v bodech T, U rovnoběžné, je TU průměrem kružnice k', stejně tak VW. Jejich průsečík P' je tedy středem kružnice a díky rovnoběžnosti TU s tečnami v bodech V, W je dokonce VW kolmé na TU. Tedy TU a VW jsou kolmé osy kružnice k' a body B, C, D stačí volit tak, aby jejich obrazy v kolineaci byly obrazy bodu A postupně v osové symetrii podle TU, středové symetrii podle P' a osové symetrii podle VW.

Konstrukce obrazu, dvojpoměr

Máme kolineaci, která zobrazí danou čtveřici bodů $ABCD$ v obecné poloze na čtveřici bodů $A'B'C'D'$. Dále máme bod X a rádi bychom určili jeho obraz v dané kolineaci za použití bodů $ABCD$ a jejich obrazů.

Označíme opět Q průsečík AB s CD a R průsečík BC s DA, jsme schopni sestrojit jejich obrazy Q', R'. Dále označíme průsečík RX a AB jako Y a průsečík QX a AD jako Z. Pokud budeme schopni najít obrazy bodů Y a Z, budeme z nich schopni zpětně rekonstruovat obraz bodu X.

Projektivní zobrazení sice nezachovává poměry, ale na přímce ABQ již víme, „jak je nezachovává“, tedy jak se změní poměr $|AB| : |BQ|$. Z tohoto bychom již přece mohli určit, co se stane s bodem Y. Jinými slovy chceme najít pro čtyři body na přímce jistou neměnku – číslo, které bude zachováno jak projekcí, tak lineárním zobrazením. Tím je následující výraz.

Definice. *Dvojpoměrem* čtyř různých vlastních bodů A, B, C, D na přímce (pořadí je důležité) rozumíme výraz

$$(A, B; C, D) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD},$$

kde XY značí orientovanou vzdálenost na přímce bodů X a Y.

Definice. *Dvojpoměrem* čtyř různých přímek a, b, c, d v rovině procházejících jedním bodem rozumíme výraz

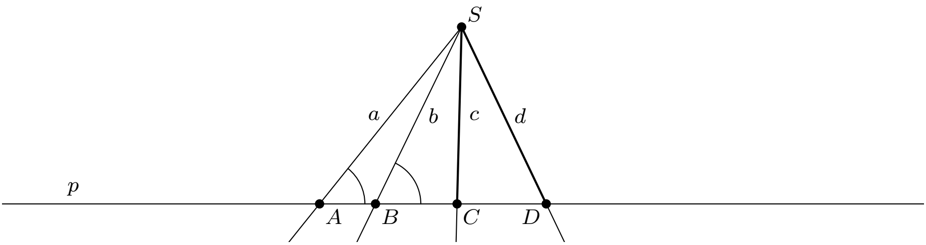
$$(a, b; c, d) = \frac{\sin(ac) \cdot \sin(bd)}{\sin(bc) \cdot \sin(ad)},$$

kde xy značí orientovaný úhel přímek x, y, tedy o kolik musíme pootočit x proti směru hodinových ručiček, abychom dostali y. Abychom mohli počítat orientované úhly, tak si všechny čtyři přímky před výpočtem čtyřpoměru nějak orientujeme.

Je jasné, že lineární zobrazení zachovává dvojpoměr bodů na přímce, když zachovává i obyčejný poměr. Z následující věty plyne, že dvojpoměr se zachová i v projekci (stačí uvážit kromě přímky p ještě další přímku q).

Věta. *Mějme v rovině čtyři různé přímky a, b, c, d procházející bodem S a přímku p, která bodem S neprochází. Vlastní průsečíky přímky p s přímkami a, b, c, d po řadě označíme A, B, C, D. Pak*

$$(A, B; C, D) = (a, b; c, d).$$



Důkaz. Nějak si orientujeme přímky a, b, c, d, p. Ze sinové věty pro trojúhelníky SAC, SAD dostáváme

$$\frac{\sin(ap)}{SC} = \frac{\sin(ac)}{AC}, \quad \frac{\sin(ap)}{SD} = \frac{\sin(ad)}{AD}.$$

Tyto vztahy podělíme

$$\frac{AC}{AD} = \frac{\sin(ac)}{\sin(ad)} \cdot \frac{CS}{SD}.$$

Analogický vzorec můžeme dostat, když namísto a, A zvolíme b, B.

$$\frac{BC}{BD} = \frac{\sin(bc)}{\sin(bd)} \cdot \frac{CS}{SD}.$$

Opětovným podělením dostáváme

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BD}{BC} = \frac{\sin(ac)}{\sin(ad)} \cdot \frac{\sin(bc)}{\sin(bd)} = (a, b; c, d)$$

Aby projekce fungovala i pro nevlastní body, můžeme dvojpoměr zobecnit:

(i) Je-li mezi body A, B, C, D právě jeden nevlastní bod N, definujeme pro potřeby vzorečku $NX = 1$ pro libovolné X.
(ii) Leží-li body A, B, C, D na nevlastní přímce, definujeme jejich dvojpoměr přes siny jako v případě dvojpoměru přímek procházejících vlastním bodem.
(iii) Prochází-li přímky a, b, c, d nevlastním bodem, definujeme jejich dvojpoměr pomocí orientované vzdálenosti rovnoběžek, podobně jako v případě dvojpoměru vlastních bodů.

Nyní však opustíme rovný svět přímek a kolineací a vrhneme se na něco oblejšího.

Místo přímek kružnice

Systém nevlastních bodů, se kterým jsme dosud pracovali, se nazývá projektivní rozšíření roviny. Zavedli jsme ho proto, aby se dobře manipulovalo s přímkami. Pro práci s kružnicemi se však nehodí – například jednou ze základních vlastností kružnic je, že třemi body je možné jednoznačně proložit kružnici. Jenže jak by měla vypadat kružnice, která prochází dvěma vlastními a jedním nevlastním bodem daného směru?

Zavedeme tedy jiný systém nevlastních bodů, takzvanou *invertivní rovinu*. V tomto systému se nebudeme vůbec starat o přímky, ale pouze o kružnice. Nevlastní body tentokrát nebudou v každém směru, ale bude pouze jeden nevlastní bod „všemi směry“. Přímky budeme považovat za kružnice, které prochází nevlastním bodem. V terminologii kružnic pak jsou rovnoběžky vlastně dvě kružnice, které se dotýkají v nevlastním bodě, a různoběžky dvě kružnice, které se protínají – v jednom vlastním bodě a jednom nevlastním.

Vedle roviny s jedním nevlastním bodem máme ještě jeden přirozený model s kružnicemi, kde libovolnými třemi různými body proložíme kružnici – je jím povrch koule neboli sféra. Vezmeme-li tři body na sféře, určuje tato trojice jednoznačně rovinu a průnik této roviny s naší sférou je hledanou kružnicí. Nabízí se otázka, jestli není sféra a invertivní rovina v jistém smyslu to samé, tedy zda existuje bijekce mezi sférou a invertivní rovinou, která zachovává kružnice.

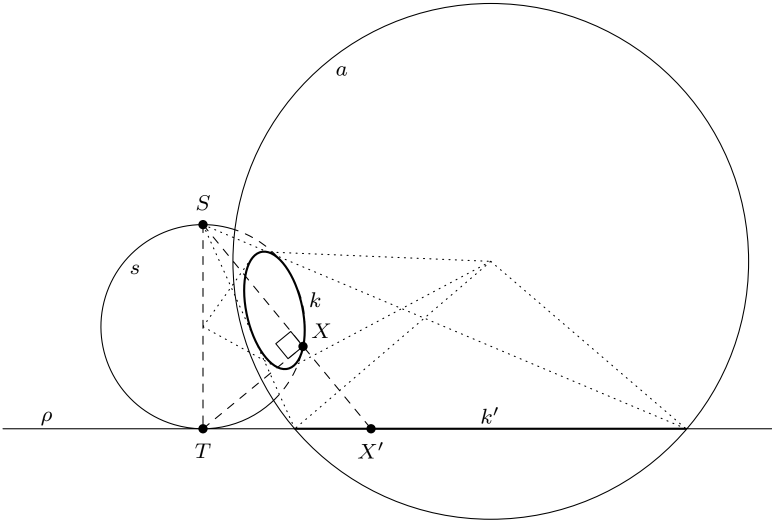
Zatím jsme si předvedli jedno zobrazení mezi prostorem a rovinou – projekci – a ta vskutku bude fungovat.

Jako střed S naší projekce zvolíme jeden bod sféry s. Rovinu projekce ρ zvolíme rovnoběžně s tečnou rovinou k s v bodě S. Libovolnému bodu $X \neq S$ sféry s přiřadíme průsečík přímky SX s rovinou ρ a obraz bodu S dodefinujeme jako nevlastní bod.

Takto definované zobrazení je zřejmě bijekce mezi sférou s a rovinou ρ (včetně jejího nevlastního bodu).

Obrazem kružnice na sféře procházející bodem S je jistě přímka v rovině ρ – jde vždy o nějakou rovinu procházející bodem S, kterou jednou pronikneme se sférou s a podruhé s rovinou ρ.

Ještě chceme ukázat, že si odpovídají kružnice na sféře neprocházející bodem S s kružnicemi v rovině neprocházejícími nevlastním bodem. Pro jednoduchost umístíme rovinu ρ tak, aby se dotýkala sféry s v opačném bodě od S, který označíme T. Nyní vezmeme nějaký bod X sféry s a zobrazíme ho projekcí. Úsečka ST je průměrem sféry s, tedy TX je výškou pravoúhlého trojúhelníku STX' a z Eukleidovy věty o odvěsně máme $|SX| \cdot |SX'| = |ST|^2$, čili součin $|SX| \cdot |SX'|$ je pro všechna X konstantní.

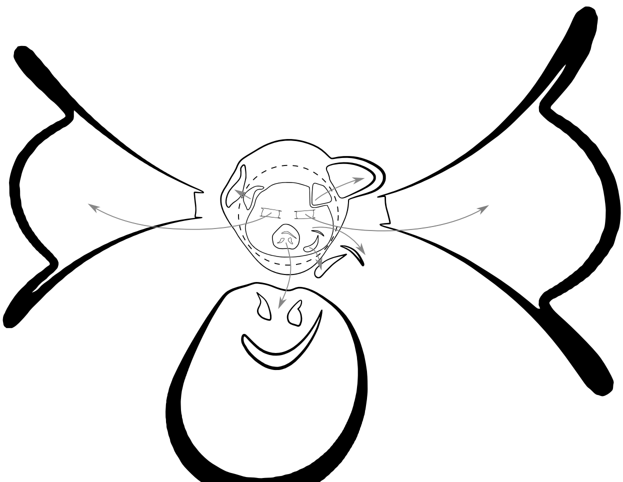


Pohled z roviny ρ. Kružnice k' se jeví jako úsečka.

Mějme tedy kružnici k na sféře a zvolme sféru a procházející k takovou, aby mocnost bodu S k a byla rovna $|ST|^2$ (můžeme ji najít třeba tak, že najdeme obraz X' jednoho bodu X kružnice k a sféru opíšeme k a X'). Nyní kdykoli vezmeme obraz X' bodu X, bude díky mocnosti ležet na sféře a. Tedy všechny obrazy bodů kružnice k leží na jedné kružnici – průniku ρ a a.

Opačně, kdykoli vezmeme kružnici k' v rovině ρ, najdeme opět sféru a s mocností $|ST|^2$ procházející k' a všechny vzory tak leží na kružnici dané průnikem sfér s, a.

Kruhová inverze



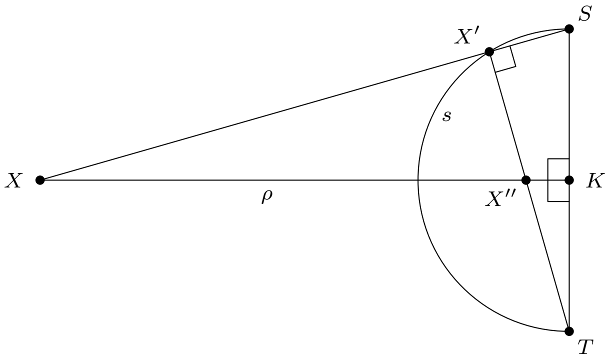
Podobně jako kolineace je zobrazení z projektivní roviny do projektivní roviny, které zachovává přímky a přitom může některé nevlastní body zobrazit na vlastní a obráceně, ukážeme si zobrazení z invertivní roviny do invertivní roviny, které zachovává kružnice a přitom hýbe s nevlastním bodem. Nebudeme tak obecní jako v případě kolineace, ukážeme si „jen“ ten nejjednodušší příklad – kruhovou inverzi.

V invertivní rovině ρ je dána vlastní kružnice k se středem K a poloměrem r („rovník“). Na sféře s se středem K a poloměrem r najdeme různé body S, T, ve kterých je tečná rovina k s rovnoběžná s ρ („severní a jižní pól“). *Kruhovou inverzi* podle kružnice k definujeme jako složení projekce z ρ na s podle bodu S a následně z s na ρ podle bodu T.

Snadno nahlédneme, že:

(i) Obrazem středu S je nevlastní bod, obrazem nevlastního bodu je S.
(ii) Body kružnice k jsou pevné.
(iii) Přímky procházející středem K se zobrazují samy na sebe.
(iv) Kružnice procházející středem K se zobrazují na přímky neprocházející středem a naopak.
(v) Kružnice neprocházející středem se zobrazují na kružnice neprocházející středem.
(vi) Dvojím složením téže kruhové inverze získáme identitu.

Pro vlastní bod X různý od K označme X' obraz v projekci podle bodu S z ρ na s a následně X'' obraz bodu X' v projekci podle bodu T z s na ρ. Pak trojúhelník XKS je podobný trojúhelníku $TX'S$ (pravý úhel a úhel u vrcholu S), který je zase podobný trojúhelníku TKX (pravý úhel a úhel u vrcholu T). Tím dostáváme vztah $\frac{|XK|}{|KS|} = \frac{|TK|}{|KX'|}$ a po úpravě dostaneme alternativní (neprostorovou) definici kruhové inverze: Kruhová inverze je takové zobrazení, které bodu X přiřadí bod X' na polopřímce KX splňující $|KX| \cdot |KX'| = r^2$.



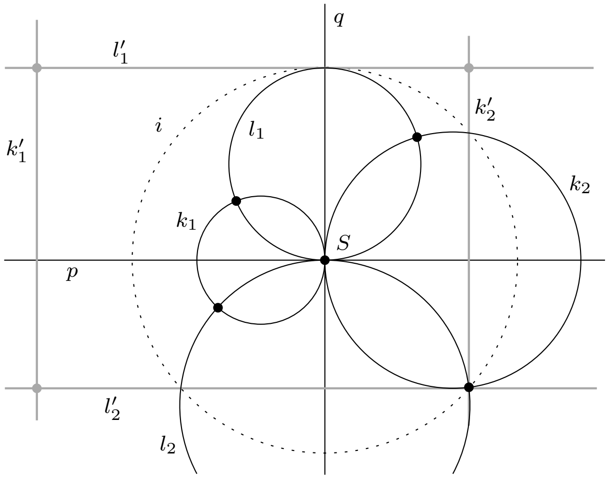
Cvičení. Mějme invertivní rovinu ρ, na nějaké sféře s najdeme různé body S, T, ve kterých je tečná rovina k s rovnoběžná s ρ. Pro které sféry s je složení projekcí podle bodu S a T kruhovou inverzí podle nějaké kružnice? A o jaké zobrazení se jedná, když kruhovou inverzí není?

Jak inverzi použít?

Na následujícím příkladu důkladně předvedeme, jak se zpravidla kruhová inverze při řešení geometrických úloh používá. Volně řečeno jde o to, že místo zadané úlohy budeme řešit jinou úlohu v jiném obrázku, která však bude té původní ekvivalentní.

Příklad. Kolmé přímky p, q se protínají v bodě S. Kružnice k_1, k_2 se středy na přímce p, které mají vnější dotyk v S, protínají kružnice l_1, l_2 se středy na přímce q mající rovněž vnější dotyk v S podruhé ve čtyřech různých bodech. Ukažte, že tyto čtyři body leží na jedné kružnici.

Řešení. Invertujme celý obrázek podle kružnice i se středem S a libovolným poloměrem. Tvrzení bude dokázáno, pokud se nám podaří ukázat, že *obrazy* zmíněných čtyř průsečíků leží na kružnici neprocházející bodem S, protože původní čtyři druhé průsečíky budou potom muset ležet na obrazu této kružnice v inverzi podle i, což je (jak již víme) rovněž kružnice.



Přímky p, q se v inverzi podle i zobrazí samy na sebe. Kružnice k_1, k_2 procházejí středem inverze, takže se zobrazí na nějaké přímky k_1', k_2'.

Jelikož mají k_1 a k_2 jediný společný bod (totiž S), musí mít jejich obrazy také jediný společný bod, a to obraz bodu S, tj. nevlastní bod „∞“. Přímky k_1' a k_2' tedy budou rovnoběžné. Navíc ze symetrie budou obě kolmé na p.

Obdobně se kružnice l_1, l_2 zobrazí na přímky l_1', l_2' kolmé na q. Obrazy zmíněných čtyř druhých průsečíků jsou proto vrcholy obdélníka.

Jelikož vrcholy obdélníka leží na jedné kružnici a tato kružnice neprochází bodem S, leží na kružnici i obrazy těchto vrcholů v inverzi podle i, což jsou přesně původní čtyři průsečíky.

Při řešení předchozího příkladu jsme měli štěstí, že jsme dokázali „přeložit“ všechny prvky zadání (kolmost přímek, dotyk kružnic) a rovněž dokazovanou vlastnost (4 body leží na jedné kružnici) do situace po inverzi. Díky tomu jsme byli schopni vytvořit zinvertovaný obrázek a vědět, co v něm máme dokázat.

Poněkud překvapivě se ukázalo, že tvrzení, které jsme měli dokázat v tomto novém obrázku, bylo podstatně snazší než odpovídající tvrzení v původním obrázku. Tak tomu bývá často, je však potřeba šikovně zvolit střed inverze.

Jak jste si jistě všimli, výše se nám osvědčilo invertovat podle bodu, jímž procházelo hodně kružnic, protože z kružnic se staly přímky a s přímkami se pracuje přece jen snáze. Obecně se vyplácí volit za střed inverze tzv. „přetížený bod“. Na poloměru inverze přitom zpravidla nezáleží. Místo o inverzi podle kružnice budeme proto většinou mluvit o inverzi podle bodu (jejího středu).

Cvičení. Do pásu mezi rovnoběžkami p a q jsou vepsány kružnice k a l. Pak čtyři body dotyku kružnic s přímkami leží na jedné kružnici.

(i) Uvědomte si, že tvrzení je zřejmé.
(ii) Zinvertujte tvrzení podle jednoho ze čtyř bodů dotyku. Je stále zřejmé?
(iii) Zinvertujte ho podle obecného bodu na přímce p. A co teď?

Cvičení. (Středy kružnic) Předpokládejme, že v inverzi podle bodu I se kružnice k zobrazí na kružnici k'. Označme S střed k a T střed k'.

(i) Ukažte, že ačkoliv body I, S, T leží na jedné přímce, bod T **není** obecně obrazem bodu S, tj. kruhová inverze na sebe nezobrazuje středy kružnic.

(ii) Ukažte, že bod T není obrazem bodu S dokonce nikdy.

Návod. (ii) Ukažte, že součin $|IS|\cdot|IT|$ je větší než součin vzdáleností bodu I od dvou bodů, které si v inverzi odpovídají.

Přepočítávací lemma

Jak jsme již viděli, pro užití inverze je naprosto stěžejní umět překládat vlastnosti zadaného obrázku do toho invertovaného. Pojďme si tedy ukázat, jak se přepočítávají délky úseček a velikosti úhlů.

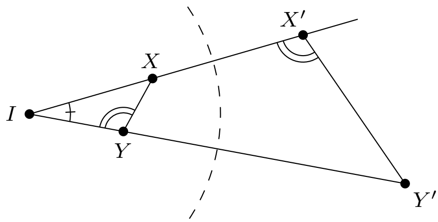
Lemma. (Přepočítávací lemma) *Je dána kružnice $k(I,r)$ a body X, Y. Označme X', Y' obrazy bodů X, Y v inverzi podle kružnice k. Pak*

(i) $|\sphericalangle IX'Y'| = |\sphericalangle XYI|$,
(ii) $|X'Y'| = |XY| \cdot \frac{r^2}{|IX|\cdot|IY|}$ a $|XY| = |X'Y'| \cdot \frac{r^2}{|IX'|\cdot|IY'|}$.

Důkaz. Podle definice inverze je

$$\frac{|IX'|}{|IY'|} = \frac{\frac{r^2}{|IX|}}{\frac{r^2}{|IY|}} = \frac{|IY|}{|IX|}.$$

Jelikož $|\sphericalangle X'IY'| = |\sphericalangle XIY|$, jsou si trojúhelníky $X'IY'$ a YIX podobné. Speciálně se tedy shodují i v úhlech $|\sphericalangle IX'Y'| = |\sphericalangle XYI|$.



Zbývá určit poměr podobnosti. Ten je roven

$$\left(\frac{|X'Y'|}{|XY|} =\right) \frac{|IX'|}{|IY|} = \frac{r^2}{|IX|\cdot|IY|},$$

z čehož plyne druhý dokazovaný vztah. Přeznačením X' za X a Y' za Y dostáváme i poslední vztah.

Vybaveni přepočítávacím lemmatem už se můžeme směle vrhnout na příklady IMO obtížnosti. Použití inverze tentokrát indikují „divné podmínky“ o úhlech (a jak se ukáže záhy i o délkách stran).

Příklad. Bod P uvnitř trojúhelníka ABC splňuje

$$|\sphericalangle APB| - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle APC| - |\sphericalangle ABC|.$$

Označme D, E středy kružnic vepsaných trojúhelníkům APB, APC. Dokažte, že přímky AP, BD a CE procházejí jedním bodem. (IMO 1996)

Řešení. V úloze zřejmě nejde o středy vepsaných kružnic, ale o to, zda osy úhlů ABP a ACP protnou úsečku AP ve stejném bodě. Jelikož osa úhlu dělí protější stranu v poměru délek přilehlých stran[11], stačí místo toho, že tři přímky procházejí jedním bodem, dokázat

$$\frac{|BA|}{|BP|} = \frac{|CA|}{|CP|}.$$

Majíce přepočítávací lemma na paměti, invertujme podle (pro jednoduchost jednotkové) kružnice se středem v A a značme obrazy bodů čárkovaně. Aniž bychom si museli kreslit obrázek, jsme díky přepočítávacímu lemmatu schopni přeložit jak podmínku pro úhly, tak požadované tvrzení o rovnosti poměrů. Pojďme na to.

Podmínka se přepíše jako

$$|\sphericalangle P'B'A| - |\sphericalangle C'B'A| = |\sphericalangle P'C'A| - |\sphericalangle B'C'A|,$$

což dá po úpravě $|\sphericalangle P'B'C'| = |\sphericalangle P'C'B'|$. Z hrůzostrašně působícího vztahu v obrázku před inverzí se tedy stala podmínka velmi pohodlná – obrazy bodů P, B, C tvoří rovnoramenný trojúhelník se základnou $B'C'$.

Zbývá zjistit, jaký je v novém obrázku ekvivalent dokazovaného vztahu pro délky úseček. Jelikož

$$\frac{|BA|}{|BP|} = \frac{\frac{1}{|B'A|}}{|B'P'|\frac{1}{|AB'|\cdot|AP'|}} = \frac{|AP'|}{|B'P'|} \quad \text{a} \quad \frac{|CA|}{|CP|} = \frac{\frac{1}{|C'A|}}{|C'P'|\frac{1}{|AC'|\cdot|AP'|}} = \frac{|AP'|}{|C'P'|},$$

stačí ukázat, že $|B'P'| = |C'P'|$. To ovšem z rovnoramennosti plyne bezprostředně.

Cvičení. Je dána půlkružnice t nad průměrem AB. Přímka p kolmá na AB protíná úsečku AB v bodě C a půlkružnici t v bodě D. Kružnice k se dotýká úsečky AC v bodě E, půlkružnice t v bodě T a přímky p v bodě F. Dokažte, že DE je osa úhlu ADC. (Izrael 1995)

Návod. Zinvertujte podle E a chtějte ukázat $|\sphericalangle EA'D'| = |\sphericalangle EC'D'|$.

$\sqrt{bc}$-inverze

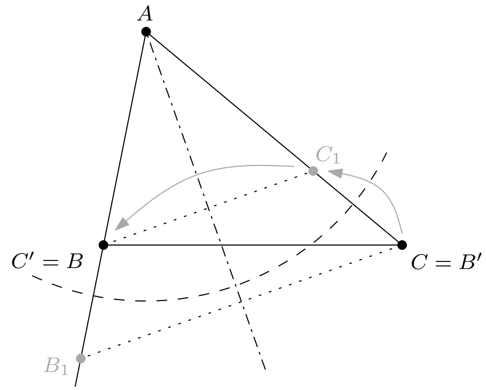
Na samotný závěr si ještě ukážeme, jaké pozoruhodné zobrazení vznikne složením jedné velmi konkrétní inverze s jednou velmi konkrétní osovou souměrností. Ačkoliv se nebude jednat o inverzi, ale o inverzi následovanou osovou souměrností, budeme výslednému zobrazení říkat $\sqrt{bc}$*-inverze.*

Pro daný trojúhelník ABC uvažme inverzi se středem v A a poloměrem $\sqrt{bc}$, kde b, c jsou délky stran AC, AB. V této inverzi se body B, C zobrazí na body B_1, C_1 na polopřímkách AB, AC splňující

$$|AB_1| = \frac{(\sqrt{bc})^2}{|AB|} = b \quad \text{a} \quad |AC_1| = \frac{(\sqrt{bc})^2}{|AC|} = c.$$

Pokud tedy označíme B', C' obrazy bodů B_1, C_1 v osové souměrnosti podle osy úhlu u vrcholu A, dostaneme $B' = C$ a $C' = B$.

[11] Pokud je pro tebe toto tvrzení novinkou, najdi si *Angle Bisector Theorem*, použij sinovou větu pro dva sousední trojúhelníky nebo jen porovnej, jak jsou body A a P „nad“ či „pod“ osou úhlu, dáš-li si ji vodorovně.



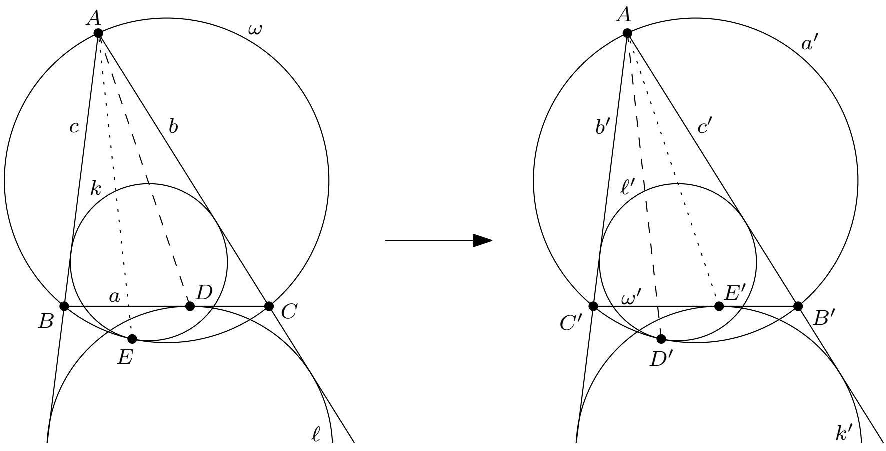
Již víme, že $\sqrt{bc}$-inverze prohazuje body B a C. Není nijak šokující, že prohazuje i přímky AB a AC (skutečně, obrazem přímky AB je přímka AB', neboli AC). Zajímavější ovšem je, co je obrazem přímky BC. Díky vlastnostem inverze to musí být kružnice $B'C'A$, což je ale přesně kružnice ω opsaná trojúhelníku ABC.

Toto tvrzení nám pomáhá nacházet důležité dvojice bodů, které si odpovídají v $\sqrt{bc}$-inverzi. Zajímá-li nás například, kam se v této inverzi zobrazí pata výšky A_0 z vrcholu A, stačí si vzpomenout, že výška AA_0 je v úhlu BAC isogonální se spojnicí vrcholu A se středem O kružnice opsané, a jelikož přímka BC se zobrazí na kružnici ω, musí být $(A_0)'$ bod „naproti" A na kružnici ω.

Další dvojici bodů, které si odpovídají v $\sqrt{bc}$-inverzi, popisuje následující příklad.

Příklad. Je dán trojúhelník ABC. Uvažme kružnici k, která se dotýká stran AB, AC a navíc jeho kružnice opsané v bodě E. Označme ještě D bod dotyku kružnice l připsané trojúhelníku ABC vzhledem k vrcholu A se stranou BC. Ukažte, že $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CAE|$.

Řešení. Označme ω kružnici opsanou trojúhelníku ABC a a, b, c postupně přímky BC, CA, AB.



V $\sqrt{bc}$-inverzi se zobrazí b na c, c na b a ω na a, takže kružnice k (která se dotýká přímek b a c a kružnice ω zevnitř) se zobrazí na kružnici l (která se dotýká přímek c, b a a zvenčí). Speciálně si tedy v $\sqrt{bc}$-inverzi odpovídají body dotyku E a D, což (krom toho, že $|AD| \cdot |AE| = (\sqrt{bc})^2 = bc$) znamená, že D a E leží na přímkách, které si odpovídají v osové souměrnosti podle osy úhlu u vrcholu A. Jsme hotovi.

Z předchozího příkladu mimo jiné vyplývá, že Gergonnův bod (průsečík spojnic vrcholů trojúhelníka s body dotyků připsaných kružnic s protějšími stranami) je isogonal conjugate středu H^+ kladné stejnolehlosti zobrazující kružnici opsanou trojúhelníku ABC na kružnici jemu vepsanou (ta totiž díky tvrzení o skládání stejnolehlostí leží na AE). Tento fakt patří už do poměrně pokročilých partií geometrie trojúhelníka.

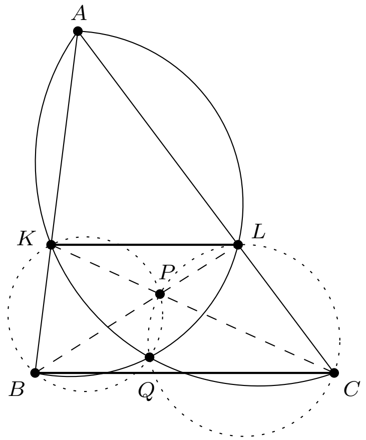
Cvičení. Uvědomte si, že v $\sqrt{bc}$-inverzi se prohodí střed $\check{S}$ kratšího oblouku BC a průsečík D osy úhlu se stranou BC. Dále ukažte, že střed I kružnice vepsané se prohodí se středem E kružnice připsané.

Návod. Ve druhé části přeložte dokazované $|AI| \cdot |AE| = bc$ do řeči podobných trojúhelníků.

Výklad ukončíme úlohou, v níž bude potřeba před užitím $\sqrt{bc}$-inverze provést ještě jedno pozorování.

Příklad. Na stranách AB, AC trojúhelníka ABC zvolme body K, L tak, aby $KL \parallel BC$, a buď $P = BL \cap CK$. Označme Q druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům BPK a CPL. Dokažte, že $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle CAQ|$. (Balkan MO 2009)

Řešení. Protější strany čtyřúhelníku $KPLA$ se protínají v bodech B, C. Bod Q jakožto druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům BPK a CPL je proto Miquelovým bodem čtyřúhelníku $KPLA$ a jako takový leží i na kružnicích opsaných trojúhelníkům ABL a ACK.



Bod A je rázem zřetelně přetížený, takže určitě budeme invertovat podle něj. Jaký ale zvolit poloměr?

Z $KL \parallel BC$ plyne

$$\frac{|AK|}{|AB|} = \frac{|AL|}{|AC|} \quad \text{neboli} \quad |AK| \cdot |AC| = |AB| \cdot |AL|.$$

Poloměr inverze tedy položíme roven $\sqrt{|AK| \cdot |AC|} = \sqrt{|AB| \cdot |AL|}$ a rovnou vzniklou inverzi složíme s osovou souměrností podle osy úhlu BAC.

Díky volbě poloměru se ve vzniklém zobrazení prohodí body B a L a body C a K. Přímka BL (neprocházející bodem A) proto přejde na kružnici ABL a podobně se přímka CK zobrazí na kružnici ACK. Bod P se tak zobrazí na bod Q a řešení je u konce.

U konce je i třetí (a poslední) díl letošního seriálu. Doufáme, že se vám exkurz do světa planimetrie a geometrických zobrazení líbil, přejeme vám mnoho zdaru nejen při řešení PraSátka a loučíme se s vámi.

Mirek Olšák, Pepa Tkadlec