Mřížky a tabulky

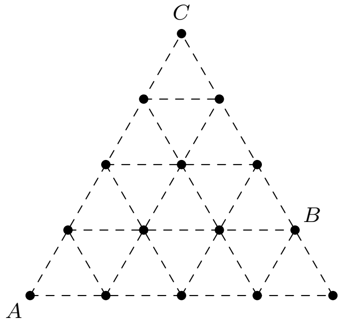
1. jarní série | Termín odeslání: 13. února 2012

Úloha 1. (3 body)

Do deseti políček tabulky 4×4 nakreslete smajlíky tak, aby byl počet smajlíků v každém řádku lichý a v každém sloupci sudý. Do jednoho políčka se vejde nejvýše jeden smajlík.

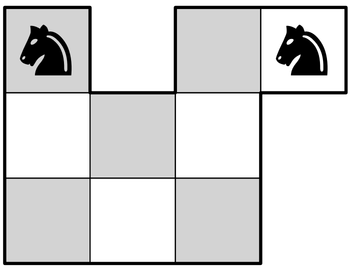
Úloha 2. (3 body)

Trojúhelníková mřížka tvaru pyramidy sestává z 15 bodů. Každý bod je obarven jednou ze tří barev – červenou, modrou nebo žlutou. Dále víme, že žádné dva sousední[1] body nemají stejnou barvu, bod A je červený a bod B je modrý. Jakou barvu může mít bod C? Najděte všechny možnosti.



Úloha 3. (3 body)

Na úlomku, který zbyl z Pepovy šachovnice, živoří dva šachoví jezdci (viz obrázek). Rozhodněte, zda Pepa může po několika tazích[2] dosáhnout toho, aby si jezdci navzájem vyměnili místa.



[1] V obrázku naznačeno čárkovaně.

[2] V jednom tahu smí Pepa táhnout jedním jezdcem na volné pole podle šachových pravidel. Koně se nemusejí ve svých tazích střídat.

Úloha 4. (5 bodů)

Najděte všechna přirozená N taková, že do tabulky 10×10 lze umístit N žetonů tak, že na každém políčku je nejvýše jeden žeton, ve všech řádcích je počet žetonů stejný a v každých dvou sloupcích různý.

Úloha 5. (5 bodů)

Mirek vepsal do obdélníkové tabulky navzájem různá čísla tak, že byla v rámci každého řádku uspořádána vzestupně (zleva doprava). Poté přeuspořádal každý sloupec tak, aby v něm byla čísla uspořádána vzestupně (shora dolů). Dokažte, že čísla jsou stále uspořádána vzestupně i v každém řádku.

Úloha 6. (5 bodů)

Na 2012 políčkách nekonečné šachovnice rostou stromy. Olin má dvě figurky (Jeníčka a Mařenku), které se mohou jedním tahem pohnout na jedno ze čtyř políček sousedících hranou s tím, na němž právě stojí. Dokažte, že Olin může Jeníčka a Mařenku postavit na dvě různá políčka šachovnice tak, aby měl ke každému konkrétnímu stromu Jeníček stejně daleko[3] jako Mařenka (pro různé stromy může být tato vzdálenost různá).

Úloha 7. (5 bodů)

V každém políčku tabulky 111×111 je napsáno liché celé číslo. Označme A součin všech řádkových součtů a B součin všech sloupcových součtů čísel v tabulce. Dokažte, že $A + B \neq 0$.

Úloha 8. (5 bodů)

Miško obarvil některé mřížové body roviny[4] červeně a zbylé modře. Poté posadil do jednoho mřížového bodu nesmrtelného komára, otočil ho sosákem na sever a dal mu následující instrukce: „Vždy, když jsi v nějakém bodě, přebarvi ho na tu druhou barvu. Potom se podívej, jakou má barvu, a když je modrý, otoč se o devadesát stupňů doleva, jinak se otoč doprava. Nakonec poskoč na další bod směrem, kterým jsi otočený, a celý postup opakuj.“ Dokažte, že ať už Miško na začátku obarvil mřížku jakkoliv a komára postavil kamkoliv, komár za svůj život navštíví nekonečně mnoho různých políček.

[3] Vzdáleností figurky od nějakého políčka šachovnice rozumíme nejmenší možný počet tahů, na který se může figurka na toto políčko dostat. Figurka smí chodit i přes políčka, na kterých roste strom.

[4] Bodu roviny říkáme *mřížový*, pokud má obě souřadnice celočíselné.

Mřížky a tabulky

1. jarní série Vzorové řešení

Úloha 1.

(73; 67; 2,84; 3,0)

Do deseti políček tabulky 4 × 4 nakreslete smajlíky tak, aby byl počet smajlíků v každém řádku lichý a v každém sloupci sudý. Do jednoho políčka se vejde nejvýše jeden smajlík.

(Michal „Kenny“ Rolínek)

Řešení:
Jedno z možných rozmístění, které vyhovuje zadání, je toto:

	☺	☺	☺	3
☺		☺	☺	3
☺	☺		☺	3
			☺	1
2	2	2	4	10

Poznámky:
Jediným důvodem strhávání bodů bylo to, že jste omylem použili jiný počet smajlíků, než bylo v zadání.

Řešením tohoto typu úlohy je nalezení alespoň jednoho vyhovujícího rozmístění smajlíků (viz vzorové řešení). Jsme nicméně radši, když nám napíšete i postup, jakým jste na něj přišli, nebo nějaký další komentář (například fakt, že se jedná pouze o jedno z možných řešení). Většina z vás to tak udělala, tak v tom pokračujte.

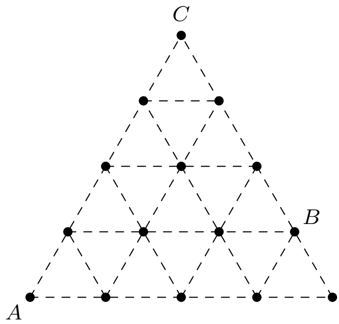
Při hledání požadovaného rozmístění nám pomohlo uvědomit si, že deset smajlíků lze dle zadání rozdělit do řádků pouze jako 3+3+3+1 (bez ohledu na pořadí). *(Monča Pospíšilová)*

Úloha 2.

(73; 70; 2,82; 3,0)

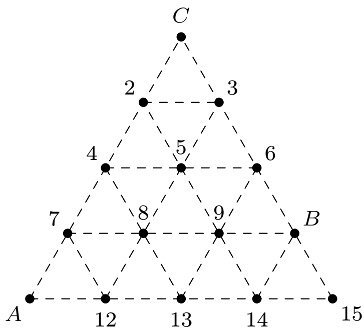
Trojúhelníková mřížka tvaru pyramidy sestává z 15 bodů. Každý bod je obarven jednou ze tří barev – červenou, modrou nebo žlutou. Dále víme, že žádné dva sousední[5] body nemají stejnou barvu, bod A je červený a bod B je modrý. Jakou barvu může mít bod C? Najděte všechny možnosti.

[5] V obrázku naznačeno čárkovaně.



(Pepa Tkadlec)

Řešení:
Na začiatok si všetky vrcholy očíslujme ako na obrázku.



Pretože body 6 a 9 susedia s modrým bodom B, ani jeden z nich nemôže byť modrý. Zároveň ale susedia aj navzájom, preto jeden z nich bude červený a druhý žltý. Z toho dostávame, že bod 5 nemôže byť ani červený ani žltý, preto musí byť modrý. Pomocou tejto úvahy tiež zistíme, že body 2 a 3 nie sú modré a zároveň sú rôzne, preto pre bod C ostáva iba modrá farba.

Tu by sme mohli skončiť, pretože zadanie nám existenciu ofarbenia zaručuje, inak by sme ju ešte museli overiť doplnením celej mriežky – body C, 5, 7, B a 13 budú modré, body 2, 6, 8, A a 14 červené a body 3, 4, 9, 12 a 15 žlté.

Poznámky:
Väčšina z riešení bola správna, viacerí ste sa ale snažili rozoberať možnosti ofarbenia bodov 7 a 12, prípadne susedov B a z dvoch variant jednu vylúčiť. Body ste strácali za nedostatočný popis farbenia alebo ak ste mriežku správne nafarbili, ale už ste nedokazovali, že iné nafarbenie neexistuje.

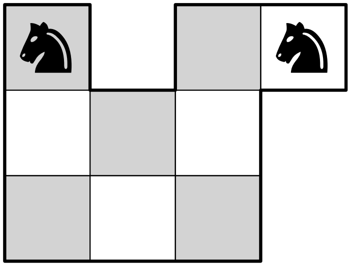
Niekoľkí ste určili farbu bodu C podobne ako vo vzorovom riešení, ale zafarbenie bodu A ste vôbec nebrali do úvahy. Pri inej formulácii zadania by ste získali maximálne dva body, pretože správne ofarbenie mriežky by nemuselo existovať žiadne a vaša odpoveď by teda nebola správna.

(Peter „πtr“ Korcsok)

Úloha 3.

(68; 64; 2,82; 3,0)

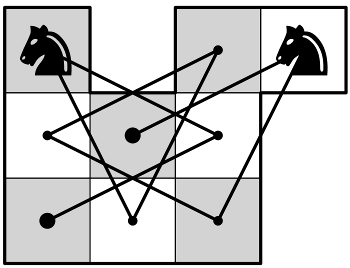
Na úlomku, který zbyl z Pepovy šachovnice, živoří dva šachoví jezdci (viz obrázek). Rozhodněte, zda Pepa může po několika tazích[6] dosáhnout toho, aby si jezdci navzájem vyměnili místa.



(Pepa Tkadlec)

Řešení:

Všimněme si, že spojíme-li (jako na obrázku) úsečkami středy těch dvojic políček, mezi kterými může skočit jezdec, vznikne lomená čára, která se nikde nevětví. Mezi libovolnými dvěma políčky proto existuje právě jedna cesta. Protože se koně na této cestě nemají jak vyhnout a nesmějí stát oba zároveň na témže políčku, nikdy si místa vyměnit nemohou.



Poznámky:

Snad všechna řešení si zasloužila plný počet bodů, jen za řešení typu „Nevejdou se, jsem zvědavý, kolik mi za to opravovatel dá bodů.“ jsem dával krásnou kulatou nulu. *(Lukáš Zavřel)*

Úloha 4.

(69; 69; 4,57; 5,0)

Najděte všechna přirozená N taková, že do tabulky 10×10 lze umístit N žetonů tak, že na každém políčku je nejvýše jeden žeton, ve všech řádcích je počet žetonů stejný a v každých dvou sloupcích různý. *(Michal „Kenny“ Rolínek)*

Řešení:

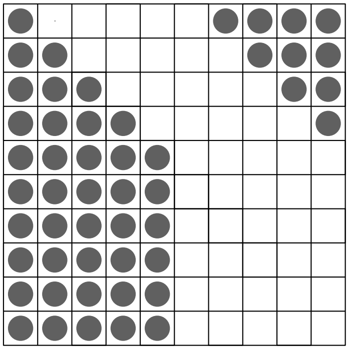
V každém sloupci může být nejméně 0 a nejvýše 10 žetonů, navíc ve všech sloupcích jsou jejich počty navzájem různé, tedy z jedenácti možností (0, 1, ... , 10 žetonů) použijeme všechny až na jednu. Označme $k \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ počet žetonů, který v žádném sloupci nepoužijeme. Potom máme

$$N = 0 + 1 + \cdots + 10 - k = 55 - k.$$

[6] V jednom tahu smí Pepa táhnout jedním jezdcem na volné pole podle šachových pravidel. Koně se nemusejí ve svých tazích střídat.

Jelikož je ve všech řádcích žetonů stejně, musí být N dělitelné deseti beze zbytku. To dává jedinou možnost $k = 5$ a $N = 50$.

Pro padesát žetonů řešení vskutku existuje – jedno z možných je na obrázku.



Úloha má jediné řešení, a tím je $N = 50$.

Poznámky:
Až na výjimky jste neměli problém s dokázáním, že jediným možným řešením je $N = 50$. Tím ale řešení nemůže skončit! Nedílnou součástí je i rozhodnutí, zda pro padesát žetonů nějaké vyhovující rozmístění opravdu existuje.

Pokud nemáš úplně jasno v tom, proč je vlastně třeba to ověřovat, třeba Ti to pomůže osvětlit následující odstavec.

Úloha se ptá na všechna možná řešení. Takovýto typ úloh se většinou řeší následující úvahou: Na začátku jsou kandidáty na řešení všechna celá čísla N od 0 do 100 (zde už jsme použili jednoduchou úvahu, že více než 100 žetonů se do tabulky 10×10 nevejde). Postupnými úvahami zjistíme, která čísla určitě řešením být nemohou (pro nás všechna čísla menší než 45, resp. větší než 55, nebo čísla, která nejsou násobky deseti), až nám zbyde jen pár kandidátů (v tomto případě nám zbyl pouze jeden – číslo 50). O těchto kandidátech ale ještě nemůžeme říci, že jsou řešením. Pouze se nám nepodařilo prokázat, že řešením nejsou. Zbývá tedy oněch pár kandidátů jednoho po druhém probrat a rozhodnout, zda jsou skutečně řešením, nebo ne (tedy buď nalézt pro padesát žetonů nějaké vhodné rozmístění, nebo ukázat, že takové rozmístění nemůže existovat). Až potom je úloha vyřešená.

Pokud chybělo ověření, že pro padesát žetonů dobré rozmístění vskutku existuje, strhla jsem jeden bod. *(Alča Skálová)*

Úloha 5.

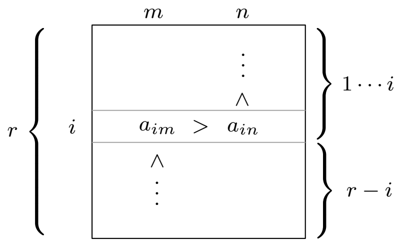
(59; 51; 3,78; 5,0)

Mirek vepsal do obdélníkové tabulky navzájem různá čísla tak, že byla v rámci každého řádku uspořádána vzestupně (zleva doprava). Poté přeuspořádal každý sloupec tak, aby v něm byla čísla uspořádána vzestupně (shora dolů). Dokažte, že čísla jsou stále uspořádána vzestupně i v každém řádku. *(Mirek Olšák)*

Řešení (podle Anh Dung Le):
Označme r počet riadkov tabuľky a a_{ij} číslo na políčku v i-tom riadku a j-tom stĺpci[7]. Pre spor predpokladajme, že po usporiadaní existujú dve políčka a_{im}, a_{in} také, že $m < n$ a $a_{im} > a_{in}$.

[7] Toto je bežný systém súradníc v tabuľkách čísel (odborne povedané: v maticiach). Tip pre zapamätanie poradia súradníc: pri hľadaní políčka prejdeme tvar písmena L ako Lineárna algebra.

Čiže pre každé prirodzené j od 1 do i platí $a_{im} > a_{jn}$. Z toho dostávame, že v stĺpci n existuje maximálne $r - i$ čísel väčších ako a_{im}.



Ďalej platí, že v stĺpci m existuje $r - i + 1$ čísel vrátane a_{im}, ktoré sú väčšie alebo rovné a_{im}. Pred usporiadaním ku každému tomuto číslu prislúchalo jedno väčšie číslo v stĺpci n. Čiže v stĺpci n musí byť minimálne $r-i+1$ čísel väčších ako a_{im}, čo je spor. Z toho vyplýva, že sme mali chybný predpoklad a tým pádom dostávame, že pre každé $m < n$ po usporiadaní platí $a_{im} < a_{in}$, čo sme chceli dokázať.

Poznámky:

Veľká väčšina z 0 – 2 bodových riešení robila chybu v tom, že to dokázali pre dajakú konkrétnu tabuľku a potom prehlásili, že podobne to bude fungovať aj v ostatných tabuľkách. Toto je zlý prístup, lebo zatiaľ ste dokázali iba, že to platí len pre vašu konkrétnu tabuľku. Skúste to nabudúce naopak. Dokážte to pre všeobecnú tabuľku, a potom prehláste, že to platí aj pre tabuľku o rozmeroch 3×4. Potom vám už nebudem mať čo vyčítať :-P.

Celkovo ste ma ale potešili so svojimi riešeniami, lebo som si nemyslel, že sa to dá dokázať viac ako tromi rôznymi cestami, ale vy ste ma dokázali presvedčiť z môjho omylu :-).

(Viktor Szabados)

Úloha 6.

(32; 30; 4,63; 5,0)

Na 2012 políčkách nekonečné šachovnice rostou stromy. Olin má dvě figurky (Jeníčka a Mařenku), které se mohou jedním tahem pohnout na jedno ze čtyř políček sousedících hranou s tím, na němž právě stojí. Dokažte, že Olin může Jeníčka a Mařenku postavit na dvě různá políčka šachovnice tak, aby měl ke každému konkrétnímu stromu Jeníček stejně daleko[8] *jako Mařenka (pro různé stromy může být tato vzdálenost různá).* *(Alexander „Olin“ Slávik)*

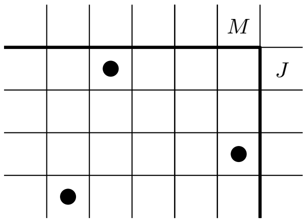
Řešení:

Zavedeme si kartézský systém souřadnic tak, že všechny stromy budou mít celočíselné souřadnice.

Nejdříve si všimneme, že vzdálenost políček o souřadnicích $[a, b]$ a $[c, d]$ je $|a-c|+|b-d|$. Musíme totiž udělat minimálně $|a - c|$ kroků ve směru osy x a $|b - d|$ kroků ve směru y (a naopak přesně tolik kroků na cestu z políčka $[a, b]$ na $[c, d]$ stačí).

Protože je stromů konečně mnoho, existuje strom s největší x-ovou souřadnicí, tu si označíme a. Existuje i strom s největší y-ovou souřadnicí, tu si označíme b. Jeníčka postavíme na souřadnice $[a + 1, b]$, Mařenku na $[a, b + 1]$.

[8] Vzdáleností figurky od nějakého políčka šachovnice rozumíme nejmenší možný počet tahů, na který se může figurka na toto políčko dostat. Figurka smí chodit i přes políčka, na kterých roste strom.



Vezměme libovolný strom se souřadnicemi $[x, y]$. Vzdálenost Jeníčka od tohoto stromu je $|a + 1 - x| + |b - y|$. Protože máme $a \geq x$ a $b \geq y$, je

$$|a + 1 - x| + |b - y| = a + 1 - x + b - y = |a - x| + |b + 1 - y|,$$

což je přesně vzdálenost Mařenky od tohoto stromu, a tedy naše postavení Jeníčka a Mařenky vyhovuje.

Poznámky:
Drtivá většina si s úlohou poradila jako ve vzoráku. Našlo se i pár řešitelů, co vyšetřovali v této speciální metrice vlastnosti bodů s konstantní vzdáleností od určitého bodu (tedy kružnice) a nakonec úlohu vyřešili (pokud se do toho nezamotali). Myšlenka dát Jeníčka a Mařenku až někam za konečnou oblast stromů se ale vyskytla i v tomto řešení. Dedukce „konečná = omezená“ tak nebyl až tak těžký trik, jak se organizátoři báli, že bude :). *(Michael „Majkl“ Bílý)*

Úloha 7.

(17; 9; 2,47; 2,0)

V každém políčku tabulky 111×111 je napsáno liché celé číslo. Označme A součin všech řádkových součtů a B součin všech sloupcových součtů čísel v tabulce. Dokažte, že $A + B \neq 0$.

(Lenka Slavíková)

Řešení:
Řádkové i sloupcové součty lichého počtu lichých čísel jsou opět liché, proto jsou liché i jejich součiny A, B. Dokážeme, že $A \equiv B \pmod 4$. Pak totiž bude $A + B \equiv 2 \pmod 4$, a tedy speciálně $A + B \neq 0$.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že v tabulce jsou jen čísla 1 a -1, neboť přičtením násobku čtyř k libovolnému číslu tabulky se zbytek po dělení čtyřmi čísel A, B nezmění. Důkaz teď provedeme indukcí podle počtu čísel -1.

Pokud jsou v tabulce samé jedničky, jsou všechny řádkové i sloupcové součty rovny 111 a $A \equiv B \equiv 111^{111} \pmod 4$.

Nyní mějme obecnou tabulku, která obsahuje na políčku p číslo -1. Pokud ho přepíšeme na jedničku, snížíme počet čísel -1 a s odvoláním na indukční předpoklad máme $A \equiv B \pmod 4$. Chceme dokázat, že tento vztah zůstane zachován, když do p napíšeme zpátky číslo -1.

Jelikož $-1 - 1 \equiv 2 \pmod 4$, změní se zpětným nahrazením součet řádku obsahujícího políčko p o dva modulo 4. Protože je lichý, tak se změní z čísla kongruentního -1 na číslo kongruentní 1 nebo naopak. Tuto změnu můžeme vnímat i tak, že se změní na číslo opačné modulo 4, takže i součin A se změní na číslo opačné modulo 4. Obdobně můžeme ukázat, že i B se změní na číslo opačné modulo 4, takže kongruence $A \equiv B \pmod 4$ zůstane zachována.

Poznámky:
Řešitelé této úlohy se rozdělili na dvě skupiny – na ty, kteří úlohu bez problémů vyřešili, a na ty, kteří s ní ani nehli. Opravování tedy bylo celkem snadné. *(Háňa Bendová)*

Úloha 8. (11; 3; 1,27; 1,0)

Miško obarvil některé mřížové body roviny[9] *červeně a zbylé modře. Poté posadil do jednoho mřížového bodu nesmrtelného komára, otočil ho sosákem na sever a dal mu následující instrukce: „Vždy, když jsi v nějakém bodě, přebarvi ho na tu druhou barvu. Potom se podívej, jakou má barvu, a když je modrý, otoč se o devadesát stupňů doleva, jinak se otoč doprava. Nakonec poskoč na další bod směrem, kterým jsi otočený, a celý postup opakuj.“ Dokažte, že ať už Miško na začátku obarvil mřížku jakkoliv a komára postavil kamkoliv, komár za svůj život navštíví nekonečně mnoho různých políček.* *(Miško Szabados)*

Riešenie:

Úlohu budeme riešiť sporom v troch krokoch: ukážeme, že by sa komár musel zacykliť, všimneme si, že do každého bodu môže prísť iba z dvoch smerov a spor dostaneme skúmaním rohového políčka komárovej trasy.

Pre spor predpokladajme, že komár navštívi iba konečne veľa bodov. Počas pohybu komára po rovine sa teda mení iba ofarbenie týchto bodov, poloha komára a jeho natočenie. Avšak všetkých možných kombinácií tohoto ofarbenia, polohy a orientácie komára je iba konečne veľa, takže niekedy sa dve rovnaké situácie musia zopakovať (pretože komár žije nekonečne). Od toho momentu bude komár robiť rovnaké kroky ako prvýkrát, a preto sa musí pohybovať po nejakej trase stále dokola.[10]

Teraz si na chvíľu predstavme, že body mriežky sú ofarbené bielou a čiernou farbou šachovnicovo a nech počiatočný bod je biely. Všimneme si, že do čiernych bodov sa dá prísť iba zo zvislého smeru (zo severu alebo z juhu) a do bielych iba z vodorovného (zo západu alebo východu). To dokážeme jednoducho indukciou – na začiatku smeruje komár zvislo do čierneho a pri každej návšteve bodu zmení smer zo zvislého na vodorovný alebo naopak.

Skúmajme najvýchodnejší z najsevernejších bodov, ktoré komár navštívi. Ak je tento bod v našom šachovnicovom ofarbení čierny, komár musí do neho vždy prísť z juhu a odísť na západ. Tento bod teda musí mať červenú farbu. Vieme však, že komár sa na políčko vráti. Vtedy ale bude jeho farba modrá a po prefarbení komár zatočí na východ, čo je hľadaný spor.

Ak by bol tento bod v šachovnicovom ofarbení biely, spor sa dosiahne analogicky.

Poznámky:

Bol som sklamaný z toho, ako málo riešení prišlo, a že z nich bolo iba jediné správne od *Tadeáša Kučery*. Úloha totiž neobsahovala žiadne zložité kroky. V podstate všetci sa správne pokúšali odvodiť spor z toho, že sa komár zacyklí. Neuvedomili ste si však, že komár sa zacyklí, keď sa zopakuje celé ofarbenie mriežky, nielen jeho pozícia.

Druhý krok – úvaha o dvoch druhoch bodov – je pomerne bežná vec v kombinatorických úlohách. Dalo sa dokonca očakávať, že by nejaké obmedzenie pri navštevovaní bodov mohlo platiť, pretože komár sa nemohol pohybovať úplne ľubovoľne, vždy musel zatočiť. Napokon je tiež prirodzené skúmať krajné body komárovej trasy, keď chceme ukázať, že nemôže byť uzavretá. Dúfam teda, že sa nabudúce poučíte a úlohy tohoto typu vyrieši päťkrát viac ľudí.

Úloha je ináč známa ako Langtonov mravec[11] (presnejšie ako Cohen-Kungova veta). Mravec je v podstate robot riadený akýmsi programom a tento príklad ukazuje, že aj jednoduchý program sa môže správať nečakane zložito. *(Miško Szabados)*

---

[9] Bodu roviny říkáme *mřížový*, pokud má obě souřadnice celočíselné.

[10] Pozor! V rámci jedného cyklu môže komár navštíviť ten istý bod viackrát aj z tej istej strany! Cyklus skončí až vtedy, keď sa zopakuje celá situácia.

[11] *http://en.wikipedia.org/wiki/Langton's_ant*