Velká čísla

3. podzimní série Termín odeslání: 5. prosince 2011

Úloha 1. (3 body)
Mirek napsal na papír svoje oblíbené trojciferné číslo dvakrát za sebou. Dokažte, že vzniklé šesticiferné číslo je dělitelné třinácti.

Úloha 2. (3 body)
Viktor a Filip našli dvě různá uzávorkování výrazu $7^{7^{7^{7}}}$, která dávají stejný výsledek. Najděte je také.[1]

Úloha 3. (3 body)
Řekneme, že přirozené číslo je *pěkné*, pokud je součet jeho cifer rovný jejich součinu (tedy např. 213 je pěkné, neboť $2 + 1 + 3 = 2 \cdot 1 \cdot 3$). Dokažte, že existuje nekonečně mnoho pěkných čísel.

Úloha 4. (5 bodů)
Šavlík si z nudy napsal nějaké stociferné číslo. Poté některé jeho cifry různé od devítky zvýšil o jedna, čímž dostal dvojnásobek původního čísla. U kolika stociferných přirozených čísel se mu něco takového mohlo povést?

Úloha 5. (5 bodů)
Ukažte, že existují dvě různé přirozené mocniny dvojky, jejichž rozdíl je dělitelný číslem 2011.

Úloha 6. (5 bodů)
Dokažte, že číslo 2012^n pro přirozené $n > 1$ nikdy nekončí číslicemi 2012.

Úloha 7. (5 bodů)
Ukažte, že neexistují dvě různé přirozené mocniny dvojky, jejichž zápisy[2] by se v desítkové soustavě lišily jen pořadím cifer.

Úloha 8. (5 bodů)
Rozdělte rovnostranný trojúhelník na milion konvexních mnohoúhelníků tak, aby každá přímka měla společný bod s maximálně čtyřiceti z nich.

[1] Dvě uzávorkování považujeme za různá, pokud se při nich mocnění vyhodnocuje v různém pořadí. Tedy například uzávorkování $7^{(7^{(7^{7})})}$ a $(7^{(7^{(7^{7})})})$ různá nejsou.

[2] Zápisy čísel nesmí začínat nulou.

Velká čísla

3. podzimní série Vzorové řešení

Úloha 1. (105; 99; 2,83; 3,0)

Mirek napsal na papír svoje oblíbené trojciferné číslo dvakrát za sebou. Dokažte, že vzniklé šesticiferné číslo je dělitelné třinácti. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Označme Mirkovo oblíbené číslo $\overline{abc}$ (tj. $100a + 10b + c$). Když ho Mirek napsal dvakrát za sebou, vzniklo číslo

$$\overline{abcabc} = \overline{abc000} + \overline{abc} = 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{abc} = 1001 \cdot \overline{abc} = 13 \cdot 77 \cdot \overline{abc}.$$

Odtud již vidíme, že vniklé šesticiferné číslo je dělitelné třinácti.

Poznámky:

Úloha byla jednoduchá a skoro všichni ji bez problémů vyřešili, většinou stejně jako vzorové řešení. Mnoho řešitelů s výhodou použilo také kritérium dělitelnosti třinácti. To funguje následovně: Rozdělme naše číslo odzadu na trojice cifer, na které nahlížíme jako na nejvýše trojciferná čísla. Spočtěme součet lichých trojic (tj. první odzadu, třetí odzadu atd.) a součet sudých trojic. Je-li rozdíl těchto součtů dělitelný třinácti, je i původní číslo dělitelné třinácti. Např. pro 2 625 565 020 máme $(20 + 625) - (565 + 2) = 78 = 13 \cdot 6$, tedy 2 625 565 020 je dělitelné třinácti.

(Háňa Bendová)

Úloha 2. (77; 45; 1,81; 3,0)

Viktor a Filip našli dvě různá uzávorkování výrazu $7^{7^{7^{7}}}$, která dávají stejný výsledek. Najděte je také.[3] *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

K řešení úlohy budeme potřebovat vztah $(x^a)^b = x^{(a\cdot b)}$. Díky němu platí

$$(7^7)^{(7^7)} = 7^{(7\cdot 7^7)} = 7^{(7^7\cdot 7)} = (7^{(7^7)})^7.$$

Zadání tedy vyhovují například uzávorkování $(7^7)^{(7^7)}$ a $(7^{(7^7)})^7$, která lze zapsat i jako $(7^7)^{7^7}$ a $(7^{7^7})^7$.

[3] Dvě uzávorkování považujeme za různá, pokud se při nich mocnění vyhodnocuje v různém pořadí. Tedy například uzávorkování $7^{(7^{(7^7)})}$ a $(7^{(7^{(7^7)})})$ různá nejsou.

Poznámky:
Úloha dopadla katastrofálně. Tolik nul jsem ještě nikdy nedala. Zamotali jste se do pravidel úpravy mocnin. Asi nejčastěji jste psali, že $7^{7^7} = 7^{(7\cdot 7)}$, což neplatí. Platí $(7^7)^7 = 7^{(7\cdot 7)}$ a ta závorka tam opravdu má svůj význam (mocniny totiž obecně vyhodnocujeme „odshora“). Nebo jste našli řešení pro dvojku a řekli, že to platí i pro sedmičku, což nemusí. Znovu připomínáme, že zaslání výsledku nám nestačí, součástí řešení je i důkaz! Taky raději vidíme 7^7 než 823543 ;). A teď pozitivně. Líbilo se mi řešení *Zuzky Ontkovičové*, která (svým způsobem trikově) využila logaritmy.

(Monča Pospíšilová)

Úloha 3.

(93; 87; 2,73; 3,0)

Řekneme, že přirozené číslo je pěkné, pokud je součet jeho cifer rovný jejich součinu (tedy např. 213 je pěkné, neboť $2 + 1 + 3 = 2 \cdot 1 \cdot 3$). Dokažte, že existuje nekonečně mnoho pěkných čísel.

(Pepa Tkadlec)

Řešení:
Pre $n \geq 3$ uvažujme $(2^n - n)$-ciferné číslo, ktoré má na prvých n pozíciách samé dvojky a na ďalších $2^n - 2n$ pozíciách samé jednotky. Ciferný súčin tohto čísla je $2^n \cdot 1^{2^n - 2n} = 2^n$, ciferný súčet je $2 \cdot n + 1 \cdot (2^n - 2n) = 2^n$. Číslo je teda pekné pre ľubovoľné prirodzené číslo n.

Keďže $2^n \geq 2n$, tak dosadením všetkých možných hodnôt za n dostávame nekonečne veľa rôznych pekných čísiel, lebo každé z nich obsahuje rozdielny počet dvojok.

Poznámky:
Úloha bola ľahká a skoro všetci ste ju zvládli správne vyriešiť. Mnohí z vás vyriešili úlohu podobne ako Lukáš. Našli ste si systém, ktorým ste ukázali ako vytvoríte nekonečno veľa pekných čísiel. Najmä sa mi páčili riešenia sporom. Strhával som 1-2 body, ak ste vo svojom riešení tvrdili niečo, čo nemuselo platiť.

Veľká väčšina z vás považovala za zrejmé, že čísiel, ktorých ciferný súčin je väčší ako ciferný súčet, je nekonečne veľa. Na prvý pohľad je to jasné, ale treba to aj zdvôvodniť. Tentokrát som bol na vás mierny a nestrhával som za to body, ale nabudúce už budem nemilosrdný :-P.

(Viktor Szabados)

Úloha 4.

(102; 92; 3,48; 4,0)

Šavlík si z nudy napsal nějaké stociferné číslo. Poté některé jeho cifry různé od devítky zvýšil o jedna, čímž dostal dvojnásobek původního čísla. U kolika stociferných přirozených čísel se mu něco takového mohlo povést?

(Pepa Tkadlec)

Řešení:
Nejprve ukážeme, že všechna čísla se skládají pouze z cifer 0 a 1. K tomu si stačí uvědomit, že když Šavlík některé cifry zvýšil o jedna, v podstatě jen ke svému číslu přičetl nějaké číslo složené z nul a jedniček. Protože se hodnota zdvojnásobila, musel přičíst číslo samotné. Takže všechna Šavlíkova čísla se skládají z 0 a 1.

Teď ukážeme, že všechna čísla z 0 a 1 jsou také Šavlíkova čísla. Pokud každou jednotku zvětšíme o jedna a nuly ponecháme, vznikne vskutku dvojásobek původního čísla. Šavlíkova čísla jsou tedy právě ta, která jsou složená pouze z 0 a 1. Na první pozici musí být jednotka, jinak by nešlo o stociferné číslo, na ostatních 99 místech máme 2 možnosti (0 nebo 1). Celkem tedy podle pravidla součinu máme 2^{99} čísel.

Poznámky:
Moc lidí zapomnělo na obrácenou implikaci, jak už to tak u ekvivalencí bývá. Bodoval jsem následovně: bod za poznatek, že čísla z úlohy jsou jen z 0 a 1, 2 body za důkaz tohoto tvrzení, bod za správný výsledek a nakonec bod za opačnou implikaci. Na závěr bych chtěl pochválit *Janču Novotnou*, *Vladimíra Sedláčka* a *Radovana Švarce*, protože úlohu vyřešili nápaditě jako ve vzorovém řešení.

(Michael „Majkl“ Bílý)

Úloha 5.

(74; 58; 3,76; 5,0)

Ukažte, že existují dvě různé přirozené mocniny dvojky, jejichž rozdíl je dělitelný číslem 2011.

(Michal „Kenny“ Rolínek)

Řešení:

Vezmime si prvých 2012 mocnín dvojky, teda $2^1, \dots, 2^{2012}$, a pozrime sa na ich zvyšky po delení číslom 2011: môžeme dostať maximálne 2011 rôznych hodnôt, preto z Dirichletovho princípu sa niektorá z nich musí opakovať – nech sú to mocniny 2^a, 2^b, BÚNO $a > b$. Pretože 2^a a 2^b dávajú rovnaký zvyšok po delení 2011, ich rozdiel $2^a - 2^b$ musí byť týmto číslom deliteľný.

Druhé řešení:

Malá Fermatova veta nám hovorí, že pre každé prvočíslo p a číslo a s ním nesúdeliteľné platí:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Pretože 2011 je prvočíslo a $\mathrm{NSD}(2011, 2) = 1$, dosadením $p = 2011$, $a = 2$ dostávame

$$\begin{aligned} 2^{2010} &\equiv 1 \pmod{2011} \qquad / \cdot 2^n,\ n \in \mathbb{N} \\ 2^{2010+n} &\equiv 2^n \pmod{2011}, \end{aligned}$$

a teda $2^{2010+n} - 2^n$ je deliteľné číslom 2011 pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$.

Poznámky:

Väčšina z riešení využívala jednu z týchto dvoch metód, v tých ostatných ste sa snažili nájsť priamo nejakú vyhovujúcu dvojicu mocnín dvojky. Bohužiaľ to bolo najčastejšie aj miesto, kde ste stroskotali. Viacerí ste sa snažili použiť k samotnému hľadaniu nejaký program, v tom prípade si ale treba dať pozor, či váš program zvláda pracovať s dostatočnou presnosťou aj pri veľkých číslach a výsledok je určite ešte potrebné aj matematicky odôvodniť. Pri druhom spôsobe riešenia ste viacerí zabudli uviesť a overiť splnenie predpokladov, čo vás stálo 1 bod.

Imaginárny bod som sa rozhodol udeliť *Danielovi Saskovi*, ktorý uviedol naozaj originálny dôkaz Malej Fermatovej vety (ktorý som inak nevyžadoval), a všetkým, ktorí dokázali silnejšie tvrdenie: Pre každú prirodzenú mocninu dvojky existuje iná prirodzená mocnina dvojky, že ich rozdiel je deliteľný číslom 2011. *(Peter „πtr“ Korcsok)*

Úloha 6.

(84; 77; 4,32; 5,0)

Dokažte, že číslo 2012^n *pro přirozené* $n > 1$ *nikdy nekončí číslicemi 2012.* *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Číslo je dělitelné osmi právě tehdy, když je osmi dělitelné jeho poslední trojčíslí, takže čísla končící na 2012 osmi dělitelná nejsou. Mocniny 2012^n pro $n \geq 2$ jsou ale dělitelné dokonce šestnácti, neboť $2012^n = 4^n \cdot 503^n$. Proto poslední cifry nikdy nemohou být 2012.

Poznámky:

Víc než polovina z vás se s úlohou vypořádala stejně jako vzorové řešení. Druhá část se pustila do rozebírání, jaké cifry mohou být na konci mocniny 2012^{n-1}, čímž se také (většinou) dobrala ke správnému výsledku, ale cestou delší a náchylnější na numerické chyby. Pokud si chceš s čísly hrát dál, zkus přijít na nějaké čtyřciferné číslo, pro které naopak existuje mocnina, která má na posledních čtyřech cifrách právě ono mocněné číslo. *(Alča Skálová)*

Úloha 7.

(46; 42; 4,50; 5,0)

Ukažte, že neexistují dvě různé přirozené mocniny dvojky, jejichž zápisy[4] by se v desítkové soustavě lišily jen pořadím cifer. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Nejprve si uvědomíme, že dvě čísla, která se liší pouze pořadím cifer, mají zřejmě stejný počet cifer. Změní-li se toto pořadí, ciferný součet zůstane zachován. Vzhledem k tomu, že číslo dává po dělení devíti stejný zbytek jako jeho ciferný součet, podíváme se na mocniny dvojky modulo devíti.

Nechť existují dvě různé mocniny dvojky, které dávají po dělení devíti stejný zbytek – označme je 2^k a 2^l, $k, l \in \mathbb{N}$, $k > l$. Pak číslo $2^k - 2^l = 2^l(2^{k-l} - 1)$ je dělitelné devíti. Musí tedy platit $9 \mid 2^l$ nebo $9 \mid 2^{k-l} - 1$. Číslo 2^l je ovšem přirozená mocnina dvojky, tedy $9 \nmid 2^l$. V důsledku toho $9 \mid 2^{k-l} - 1$, neboli číslo 2^{k-l} dává po dělení devíti zbytek 1. Nejmenší přirozená mocnina dvojky, pro kterou toto platí, je 2^6. To znamená, že exponenty k a l se musí lišit alespoň o šest. Avšak pak musí být 2^k alespoň 2^6-krát větší než 2^l, tedy tato dvě čísla nemohou mít stejný počet cifer.

Dokázali jsme, že neexistují dvě mocniny dvojky se stejným počtem cifer, které by dávaly stejný zbytek po dělení devíti. To však znamená, že určitě nemají stejný ciferný součet, takže se od sebe nejméně jednou cifrou liší.

Poznámky:

Skoro všichni přišli na to, že mocnin dvojky se stejným počtem cifer nemůže být moc (1 bod) a že je potřeba je zkoumat modulo devíti, případně třemi a devíti (3 a více bodů). Řešitelům, kteří měli ve svém řešení nějakou pěknou myšlenku, jsem dala kladný imaginární bod. Naproti tomu zbytečně složité a nepřehledné řešení si vysloužilo imaginární bod záporný. V mnohých řešeních se objevil důkaz faktu, že číslo dává stejný zbytek po dělení devíti jako jeho ciferný součet. Myslím, že toto tvrzení je natolik používané a zřejmé, že jej není potřeba dokazovat. *(Martina Vaváčková)*

Úloha 8.

(18; 7; 2,00; 0,0)

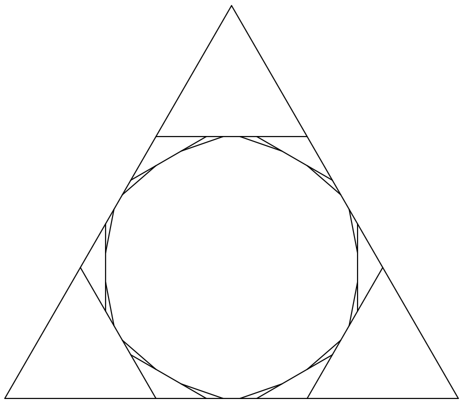
Rozdělte rovnostranný trojúhelník na milion konvexních mnohoúhelníků tak, aby každá přímka měla společný bod s maximálně čtyřiceti z nich. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Zvolme na každé straně ve třetině a ve dvou třetinách bod. Spojme je tak, abychom dostali konvexní šestiúhelník a u každého vrcholu trojúhelník. Každá přímka nyní může procházet maximálně dvěma trojúhelníky na okraji. Šestiúhelník tedy můžeme dále rozdělovat tak, aby každá přímka procházela uvnitř něj maximálně 38 mnohoúhelníky.

Rozdělme ho opět stejným algoritmem. Tedy každou stranu rozdělme na třetinu a vytvořme konvexní 12-ti úhelník. Opět může přímka procházet maximálně dvěma trojúhelníky u vrcholů. Takto můžeme pokračovat, dokud se nedostaneme ke konvexnímu mnohoúhelníku s $3 \cdot 2^{19}$ vrcholy. Pak se bude každá přímka moci dotýkat maximálně dvou trojúhelníků u vrcholů původního trojúhelníka, maximálně dvou trojúhelníků u vrcholu šestiúhelníka, ..., a nakonec zbylého mnohoúhelníku kolem středu. Celkem se tedy bude moci dotýkat maximálně $2 \cdot 19 + 1 = 39$ mnohoúhelníků, což je v pořádku.

[4] Zápisy čísel nesmí začínat nulou.



A kolik máme v trojúhelníku oblastí? Nejdříve tři u každého vrcholu trojúhelníka, pak dalších šest, dvanáct, ... a nakonec ještě jeden mnohoúhelník uprostřed. To je

$$3 + 6 + 9 + \cdots + 3 \cdot 2^{18} + 1 = 3 \cdot 2^{19} - 2 = 1572862,$$

což je číslo větší než milion. Stačí se tedy v našem algoritmu vrátit o několik posledních kroků tak, aby bylo mnohoúhelníků právě milion (vytvářeli jsme je po jednom přidáváním u jednotlivých vrcholů mnohoúhelníka). Tímto zpětným postupem se zjevně žádná z podmínek (přímka se dotýká maximálně 40 mnohoúhelníků, konvexnost) nepokazí.

Povedlo se nám tedy rozdělit trojúhelník na milion konvexních mnohoúhelníků tak, aby byly splněny zadané podmínky.

Poznámky:

Tuto úlohu jsme považovali spíše za lehčí osmičku, ale na počtu řešitelů se to moc neprojevilo. Chtěl bych vás proto vyzvat, abyste se příště čísla osm nezalekli a zkusili osmičku vyřešit ;-). Vzhledem k malému počtu řešitelů této osmé úlohy se vyskytly pouze drobné nuance mezi řešeními těch, kteří to měli správně na pět bodů. Mezi nejčastější chybné úvahy patřilo to, že si řešitelé špatně přečetli zadání a počítali s tím, že sami trojúhelník děli pomocí přímek, a pak o těchto přímkách nejčastěji tvrdili, že prochází maximálně dvěma mnohoúhelníky (všech 999 999 přímek bylo rovnoběžných), nebo si původní trojúhelník rozdělili trojúhelníkovou sítí na milion malých trojúhelníčků, ale pak jich na posledním řádku bylo 1000, což samozřejmě nesplňuje zadání. *(Lukáš Zavřel)*