Geometrická zobrazení

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 5. PROSINCE 2011

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)

Na straně CD čtverce $ABCD$ je dán bod E. Osa úhlu BAE protne stranu BC v bodě F. Dokažte, že $|AE| = |BF| + |DE|$.

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)

V rovině jsou dány body A a B. Uvažme všechny konvexní pětiúhelníky $ABCDE$ v jedné polorovině určené přímkou AB takové, že $ABDE$ je rovnoběžník a BCD je rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu B. Ukažte, že kružnice nad průměrem CE procházejí všechny jedním bodem.

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)

Je dán trojúhelník ABC. Označme T_a bod dotyku kružnice vepsané se stranou BC a E_a střed kružnice k této straně připsané. Obdobně definujeme T_b, E_b a T_c, E_c pro strany CA a AB. Dokažte, že přímky T_aE_a, T_bE_b a T_cE_c procházejí jedním bodem.

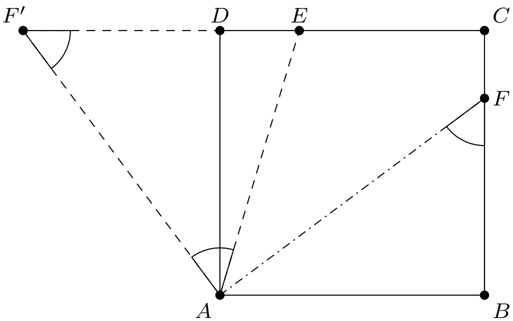
Geometrická zobrazení

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1. (59; 53; 4,49; 5,0)

Na straně CD čtverce $ABCD$ je dán bod E. Osa úhlu BAE protne stranu BC v bodě F. Dokažte, že $|AE| = |BF| + |DE|$. *(Pepa Tkadlec)*

ŘEŠENÍ:



Uvažme otočení trojúhelníka ABF o $90°$ okolo bodu A takové, že $B \mapsto D$ a $F \mapsto F'$. Otočení zachovává úhly, a tak bude bod F' ležet na přímce CD. Protože úhel $\sphericalangle FAF'$ je pravý a ze zadání je $|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle FAE|$, platí

$$|\sphericalangle AF'D| = |\sphericalangle AFB| = 90° - |\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle FAF'| - |\sphericalangle FAE| = |\sphericalangle EAF'|.$$

Odtud vyplývá, že trojúhelník EAF' je rovnoramenný se základnou AF'. Spolu s využitím vlastností otočení lze psát

$$|AE| = |F'E| = |F'D| + |DE| = |FB| + |DE|,$$

což jsme měli dokázat.

POZNÁMKY:

Většina z vás úlohu vyřešila bez problémů a stejně jako ve vzorovém řešení. Častým způsobem bylo také ověření rovnosti pomocí goniometrických funkcí a vzorců. Tato řešení byla sice správná, ale postrádala eleganci a přehlednost pěkného syntetického řešení. *(Petr Ryšavý)*

Úloha 2. (46; 40; 4,30; 5,0)

V rovině jsou dány body A a B. Uvažme všechny konvexní pětiúhelníky $ABCDE$ v jedné polorovině určené přímkou AB takové, že $ABDE$ je rovnoběžník a BCD je rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu B. Ukažte, že kružnice nad průměrem CE procházejí všechny jedním bodem. *(Mirek Olšák & Pepa Tkadlec)*

Řešení:

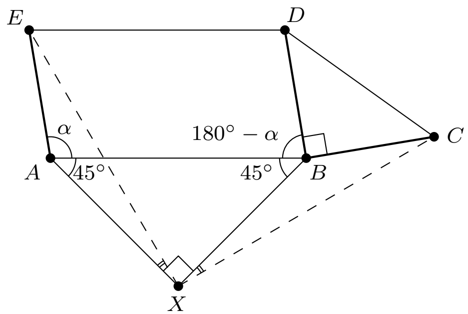
Osa úsečky AB protne kružnici nad průměrem AB ve dvou bodech. Označme písmenem X ten z nich, který leží v opačné polorovině určené přímkou AB než body B, C, D. Ukážeme, že všechny kružnice nad průměry CE procházejí právě tímto bodem X.

Díky konstrukci bodu X platí $|XA| = |XB|$. Zároveň ze zadání $|AE| = |BD| = |BC|$. Navíc označíme-li $|\sphericalangle BAE| = \alpha$, můžeme psát $|\sphericalangle XAE| = 45^\circ + \alpha$ a $|\sphericalangle XBC| = 360^\circ - 45^\circ - (180^\circ - \alpha) - 90^\circ = 45^\circ + \alpha$. Podle věty *sus* jsou proto trojúhelníky XAE a XBC shodné.

To ovšem znamená, že $|\sphericalangle EXA| = |\sphericalangle CXB|$, takže

$$|\sphericalangle CXE| = |\sphericalangle CXB| + |\sphericalangle BXA| - |\sphericalangle EXA| = |\sphericalangle BXA| = 90^\circ$$

a X skutečně leží na kružnici s průměrem CE.



Druhé řešení (podle Ondry Cífky):

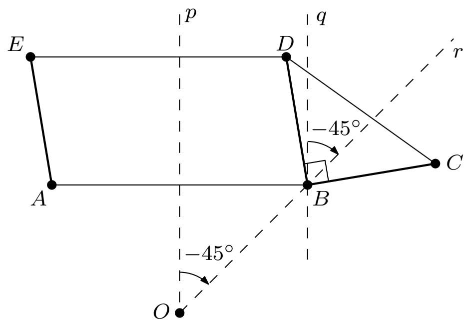
V posunutí $T_{\overrightarrow{AB}}$ přejde bod E do bodu D. V otočení $R_{(B,-90^\circ)}$ přejde bod D do bodu C. Složením získáme zobrazení $Z = R_{(B,-90^\circ)} \circ T_{\overrightarrow{BA}}$, které zobrazí bod E do bodu C.

Označme p osu úsečky AB, q kolmici na AB vedenou bodem B a r přímku procházející bodem B, která s q svírá (orientovaný) úhel -45°. Pak

$$Z = R_{(B,-90^\circ)} \circ T_{\overrightarrow{BA}} = (r \circ q) \circ (q \circ p) = r \circ p,$$

takže zobrazení Z je otočení podle průsečíku přímek r a p (označme ho O) o dvojnásobek úhlu, který svírají. Jelikož $p \parallel q$, je tento roven -45° a Z je tak otočení o -90°. Platí proto $|\sphericalangle COE| = 90^\circ$.

Zbývá si uvědomit, že poloha bodu O závisí pouze na poloze bodů A a B, takže všechny kružnice nad průměry CE opravdu procházejí jedním bodem.



Poznámky:

Téměř všichni odhalili, kterým že bodem budou všechny zmíněné kružnice procházet, a drtivé většině se to i (všelijakými způsoby) podařilo dokázat. Mým největším snem je totálně vymýtit nešvar spočívající v používání bodů, které nejsou v zadání, aniž by člověk řekl, co jsou zač. Uvidíme, jestli se mi to někdy podaří :).

Jinak úloha šla velmi přímočaře řešit analyticky (nejlépe s počátkem v bodě B), schválně si to zkuste! *(Pepa Tkadlec)*

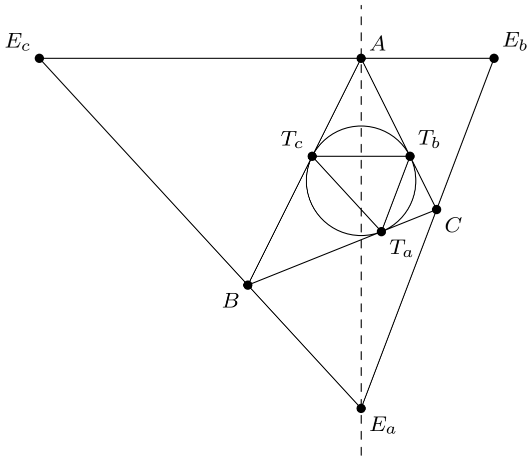
Úloha 3. (27; 23; 4,15; 5,0)

Je dán trojúhelník ABC. Označme T_a bod dotyku kružnice vepsané se stranou BC a E_a střed kružnice k této straně připsané. Obdobně definujeme T_b, E_b a T_c, E_c pro strany CA a AB. Dokažte, že přímky T_aE_a, T_bE_b a T_cE_c procházejí jedním bodem. *(Mirek Olšák)*

Řešení:

Středy kružnic připsaných E_b, E_c leží na vnější ose úhlu u vrcholu A, která je kolmá na osu vnitřního úhlu u vrcholu A. Dále úsečky AT_b, AT_c jsou stejně dlouhé, protože jsou tečnami k vepsané kružnici. Trojúhelník AT_bT_c je tak rovnoramenný a osa úhlu T_bAT_c splývá s výškou z bodu A.

Jak přímka E_bE_c, tak přímka T_bT_c je kolmá na osu úhlu BAC, tedy tyto dvě přímky jsou rovnoběžné. Analogicky je rovnoběžná i E_cE_a s T_cT_a a taky E_aE_b s T_aT_b. Trojúhelníky $T_aT_bT_c$ a $E_aE_bE_c$ mají rovnoběžné odpovídající si strany a navíc jsou si podobné, protože z rovnoběžnosti automaticky plyne shodnost úhlů (například posunutím).



Existuje tedy stejnolehlost, která zobrazí trojúhelník $T_aT_bT_c$ na $E_aE_bE_c$. Její střed označíme S. Víme, že S je vlastní, protože $T_aT_bT_c$ je celý uvnitř $E_aE_bE_c$ a z definice stejnolehlosti jím prochází přímky E_aT_a, E_bT_b, E_cT_c.

Poznámky:

Nejvíc mě naštval jeden řešitel, který se rozhodl úlohu řešit analyticky. Za večer strávený kontrolou jeho výpočtů byl náležitě imaginárně potrestán. Naproti tomu jsem i-čko udělil řešitelům, jejichž řešení se příliš nelišilo od vzorového a dále *Martinu Töpferovi*, který našel trochu jiné stejnolehlé trojúhelníky. Někteří zbytečně dokazovali „dvakrát“ podobnost $E_aE_bE_c$ a $T_aT_bT_c$, poprvé přes úhly a až podruhé dokázali rovnoběžnost. Možná jsme vás zmátli potřebou podobnosti v textu k seriálu (třetí vlastnost stejnolehlosti). Ta je totiž potřeba ověřit až u čtyř- a víceúhelníků, například neexistuje stejnolehlost mezi obdélníkem a čtvercem. *(Mirek Olšák)*

Geometrická zobrazení

2. seriálová série — Termín odeslání: 13. února 2012

Úloha 1. (5 bodů)

V trojúhelníku jsou dány tři kružnice k_a, k_b, k_c tak, že každé dvě mají vnější dotyk, k_a se dotýká stran AB, AC, k_b stran BC, BA a k_c stran CA, CB. Bod dotyku k_b s k_c označíme A_1, bod dotyku k_c s k_a označíme B_1. Dokažte, že přímky AB_1, BA_1 a osa úhlu u vrcholu C procházejí jedním bodem.

Úloha 2. (5 bodů)

Na stranách AD, BC čtyřúhelníku, který má protější strany různoběžné, jsou dány body E a F tak, že $\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|BF|}{|FC|}$. Polopřímka FE protne polopřímky BA, CD po řadě v bodech S, T. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům SAE, SBF, TCF a TDE procházejí jedním bodem.

Úloha 3. (5 bodů)

Elipsa vepsaná obdélníku $ABCD$ se dotýká jeho stran AB, BC, CD, DA postupně v bodech X, V, W, Y. Dokažte, že

$$|AY| \cdot |BX| = |AX| \cdot |DY|.$$

Geometrická zobrazení

2. seriálová série — Vzorové řešení

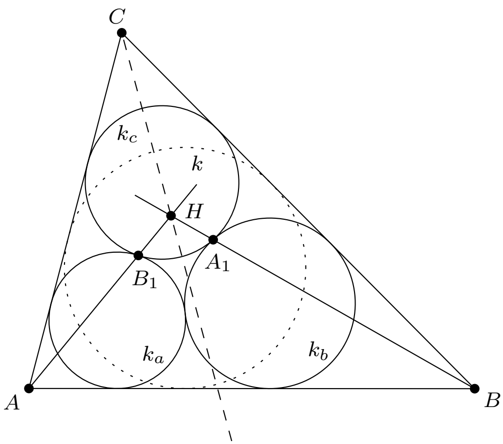
Úloha 1.

(23; 19; 4,13; 5,0)

V trojúhelníku jsou dány tři kružnice k_a, k_b, k_c tak, že každé dvě mají vnější dotyk, k_a se dotýká stran AB, AC, k_b stran BC, BA a k_c stran CA, CB. Bod dotyku k_b s k_c označíme A_1, bod dotyku k_c s k_a označíme B_1. Dokažte, že přímky AB_1, BA_1 a osa úhlu u vrcholu C procházejí jedním bodem. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Označme k kružnici vepsanou trojúhelníku ABC a H střed (unikátní) vnitřní stejnolehlosti zobrazující kružnici k_c na kružnici k. Bod H jistě leží na spojnici středů kružnic k_c a k, což je osa úhlu u vrcholu C.



Nyní uvažujme vnitřní stejnolehlost, která má střed v bodě B_1 a zobrazí kružnici k_c na kružnici k_a, a vnější stejnolehlost, která má střed v bodě A a zobrazí kružnici k_a na kružnici k (první stejnolehlost existuje, protože v bodě B_1 se k_c a k_a dotýkají, a ta druhá, protože přímky AB a AC jsou společné tečny kružnic k_a a k). Složením těchto stejnolehlostí vznikne vnitřní stejnolehlost zobrazující kružnici k_c na kružnici k, takže díky tvrzení o skládání stejnolehlostí ze seriálu leží bod H na přímce AB_1.

Analogicky se ukáže, že H leží také na přímce BA_1. Tímto jsme dokázali, že dané tři přímky procházejí jedním bodem.

Poznámky:

Všimněte si, že jsme v řešení nikde nepoužili dotyk kružnic k_a, k_b a tvrzení skutečně platí i pokud se nedotýkají. Téměř všechna došlá řešení byla správně, jenom občas trochu scházelo odůvodnění, že jsou oba středy stejnolehlostí zobrazující kružnici k_c na kružnici k skutečně stejné. Takové drobné nedostatky jsem odpouštěl. *(Filip Hlásek)*

Úloha 2.

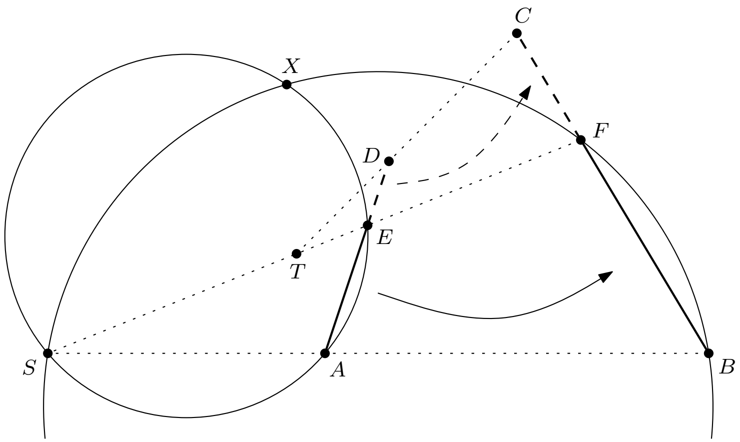
(18; 18; 5,00; 5,0)

Na stranách AD, BC čtyřúhelníku, který má protější strany různoběžné, jsou dány body E a F tak, že $\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|BF|}{|FC|}$. Polopřímka FE protne polopřímky BA, CD po řadě v bodech S, T. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům SAE, SBF, TCF a TDE procházejí jedním bodem.

(Pepa Tkadlec)

Řešení (podle Adama Láfa):

Označme X druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům SAE a SBF různý od S (ten existuje, neboť AE a BF jsou různoběžné).



Podle popisu konstrukce středu spirální podobnosti je X středem spirální podobnosti $\mathcal{S}$, která zobrazuje AE na BF.

Jelikož $|AE|/|ED| = |BF|/|FC|$ a body A, E, D a B, F, C leží v tomto pořadí na přímkách, zobrazí se v $\mathcal{S}$ bod D do bodu C. Podobnost $\mathcal{S}$ proto také zobrazuje úsečku ED na úsečku FC a bodem X (jakožto jejím středem) podle popisu konstrukce středu procházejí i kružnice opsané trojúhelníkům TDE a TCF. Jsme hotovi.

Poznámky:

Až na výjimky byla všechna došlá řešení v podstatě stejná. Velmi mile jste mě potěšili tím, jak byla řešení sepsaná! Nikdo nelhal, všichni jste řadili myšlenky za sebe ve správném pořadí, no zkrátka radost opravovat :-).

Na závěr mám pro ty z vás, kdo úlohu vyřešili, ještě jeden povzbuzovač sebevědomí. Věřte nebo nevěřte, ale pokořili jste nejtěžší úlohu amerického celostátka z roku 2006! *(Pepa Tkadlec)*

Úloha 3.

(24; 20; 4,04; 5,0)

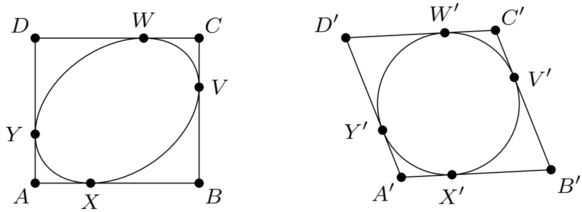
Elipsa vepsaná obdélníku $ABCD$ se dotýká jeho stran AB, BC, CD, DA postupně v bodech X, V, W, Y. Dokažte, že

$$|AY| \cdot |BX| = |AX| \cdot |DY|.$$

(Mirek Olšák)

Řešení:

Zobrazíme celý obrázek afinním zobrazením, které zobrazí vepsanou elipsu na kružnici. Afinní zobrazení zachovává rovnoběžnost i tečny k elipse, tedy $A'B'C'D'$ bude rovnoběžník s vepsanou kružnicí, tedy kosočtverec.



Úsečky $A'X'$ a $A'Y'$ jsou stejně dlouhé, protože se jedná o tečny z jednoho bodu ke kružnici. Úsečky $B'X'$ a $D'X'$ jsou rovněž stejně dlouhé, protože jde o doplňky těch předchozích do strany kosočtverce (kosočtverec má všechny strany stejně dlouhé). Tím máme

$$\frac{|A'X'|}{|A'Y'|} = \frac{|B'X'|}{|B'Y'|}.$$

Afinní zobrazení zachovává poměry na přímce, takže

$$\frac{|AX|}{|AY|} = \frac{|A'X'|}{|A'Y'|} = \frac{|B'X'|}{|B'Y'|} = \frac{|BX|}{|BY|},$$

což po úpravě dává

$$|AY| \cdot |BX| = |AX| \cdot |DY|.$$

Poznámky:

Pár řešitelů se domnívalo, že elipsa musí být v obdélníku „rovně“, tím si ale úlohu značně zjednodušili a dostali jediný bod. Jinak byla úloha jednoduchá a většina řešitelů ji hravě zvládla.

(Mirek Olšák)

Geometrická zobrazení

3. seriálová série Termín odeslání: 10. dubna 2012

Úloha 1. (5 bodů)

Na stranách AC, BC trojúhelníka ABC jsou dány body K, L. Průsečík AL a BK označme P. Na přímce AB najdeme body X, Y tak, aby součty $KX + LX$ a $CY + PY$ byly minimální možné. Ukažte, že $X = Y$.

Úloha 2. (5 bodů)

Jsou dány pevné kružnice k a l protínající se v bodech A, B. Uvažme nějaké dvě kružnice m, n, které mají obě vnější dotyk s k, vnitřní dotyk s l a navíc se samy dotýkají v bodě X. Ukažte, že bod X leží na pevné kružnici nezávislé na volbě m a n.

Úloha 3. (5 bodů)

Rovnoběžka se stranou BC ostroúhlého trojúhelníka ABC vepsaného do kružnice ω protne jeho strany AB, AC postupně v bodech D, E a kratší oblouky AB, AC kružnice ω v bodech K, L. Kružnice k se dotýká úseček BD a DK a kružnice ω, kružnice ℓ se dotýká úseček CE, EL a kružnice ω. Ukažte, že průsečík vnitřních tečen kružnic k a ℓ leží na ose úhlu u vrcholu A.

Geometrická zobrazení

3. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

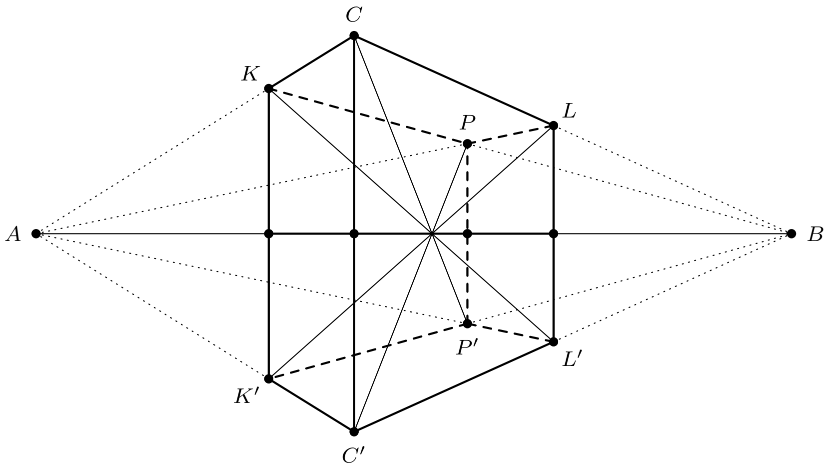
Úloha 1.

(15; 7; 2,87; 1,0)

Na stranách AC, BC trojúhelníka ABC jsou dány body K, L. Průsečík AL a BK označme P. Na přímce AB najdeme body X, Y tak, aby součty $KX + LX$ a $CY + PY$ byly minimální možné. Ukažte, že $X = Y$. *(Radek Marciňa)*

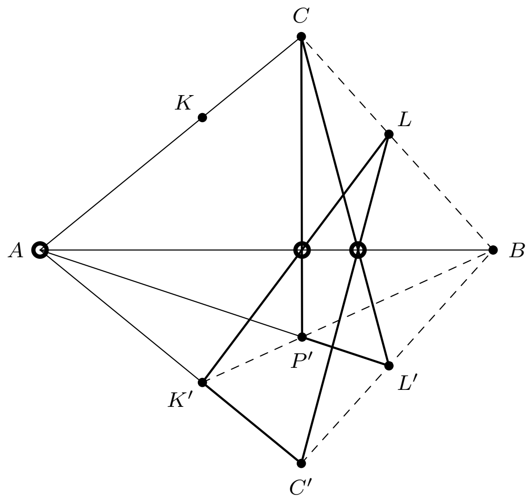
ŘEŠENÍ:
Podle prvního dílu seriálu najdeme bod X jako průsečík přímek AB, KL' a $K'L$, kde K', L' jsou obrazy bodů K, L v osové souměrnosti podle přímky AB. Stejně tak Y je průsečík přímek CP', $C'P$, AB. Zbývá dokázat, že všech těchto pět přímek prochází jedním bodem.

ŘEŠENÍ 3D VHLEDEM (PODLE MICHALA BURÁNĚ):



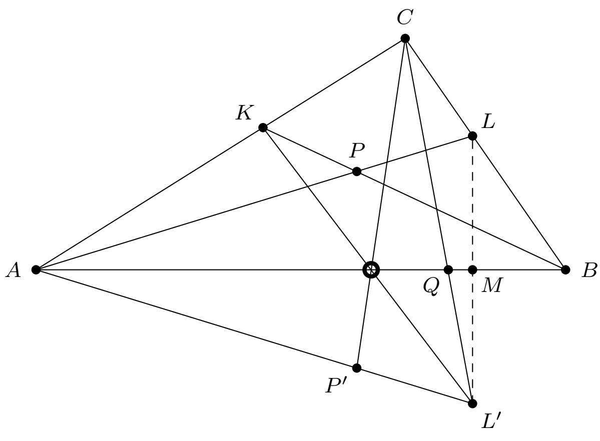
Body $K, C, L, P, K', C', L', P'$ jsou obrazy vrcholů jistého rovnoběžnostěnu $K_0C_0L_0P_0K_0'C_0'L_0'P_0'$ v nějaké projekci. Přímky K_0L_0', $K_0'L_0$, C_0P_0', $C_0'P_0$ jsou tělesové úhlopříčky tohoto rovnoběžnostěnu a protínají se v jeho středu. Tento střed leží v rovině M_K, M_L, M_P, P_C, kde bodem M_Z značíme střed úsečky Z_0Z_0'. Jelikož se v naší projekci zobrazí nevlastní bod ve směru přímek K_0K_0', L_0L_0', P_0P_0', C_0C_0' opět na nevlastní bod, budou na těchto přímkách zachovány poměry stran, a obrazy bodů M_Z budou proto ležet ve středech úseček ZZ'. Ty ale vždy leží na přímce AB. Proto je obrazem roviny $M_CM_LM_PM_K$ přímka AB, tedy obraz průsečíku tělesových úhlopříček leží na přímce AB. Tím jsme ukázali, že všech 5 přímek KL', $K'L$, CP', $C'P$, AB prochází jedním bodem.

Řešení Desarguesovou větou (podle Aničky Doležalové):



Chceme dokázat, že průsečík přímek CP' a LK' leží na přímce AB. Podívejme se na trojúhelníky $CP'L'$ a $LK'C'$. Jelikož přímky CL, $K'P'$, $C'L'$ prochází jedním bodem B, tak podle Desarguesovy věty průsečíky $P'L' \cap K'C'$, $L'C \cap C'L$ a $CP' \cap LK'$ leží na jedné přímce. První dva průsečíky leží na AB – totiž $P'L' \cap K'C' = A$ a $L'C \cap C'L$ leží na AB, jelikož jsou si tyto přímky vzájemnými obrazy v osové symetrii. Proto na přímce AB leží i třetí průsečík $CP' \cap LK'$.

Lehce počítací řešení (podle Anh Dung „Tondy“ Le):



Dokážeme, že přímky AB, CP', KL' prochází jedním bodem.

Označme Q průsečík přímek CL' a AB a dále M průsečík LL' a AB. Podle Menelaovy věty pro přímku QB a trojúhelník $CL'L$ platí

$$1 = \frac{|CQ||L'M||LB|}{|QL'||ML||BC|} = \frac{|CQ||LB|}{|QL'||BC|},$$

takže

$$\frac{|LB|}{|BC|} = \frac{|L'Q|}{|QC|}.$$

Dále podle Menelaovy věty pro přímku BK a trojúhelník ACL platí

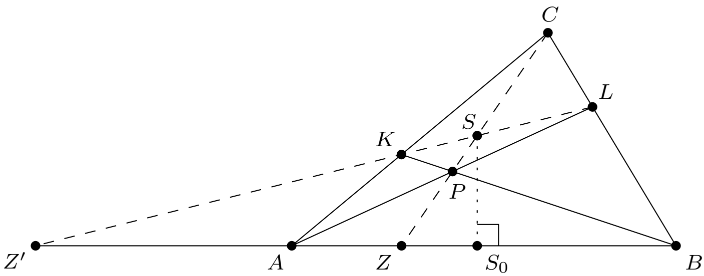
$$\frac{|LB||CK||AP|}{|BC||KA||PL|} = 1,$$

což za využití dříve odvozené rovnosti a vztahů $|P'A| = |PA|$, $|P'L'| = |PL|$ upravíme do tvaru

$$\frac{|L'Q||CK||AP'|}{|QC||KA||P'L'|} = 1.$$

To je ovšem Cevova podmínka pro trojúhelník ACL' a body K, Q, P' na jeho stranách. Tedy přímky AQ, CP', KL' prochází jedním bodem, což jsme chtěli dokázat.

Náznak ještě jiného řešení (podle Pepy Tkadlece):
Označme Z, Z' průsečíky přímek CP, KL s přímkou AB. Dále označme S průsečík přímek CP a KL, a konečně S_0 patu výšky z bodu S na přímku AB.



Jelikož body $(K, L; S, Z')$ tvoří harmonickou čtveřici[1] a $|\sphericalangle SS_0Z'| = 90°$, je S_0S osou úhlu KS_0L. Podobně body $(C, P; S, Z)$ tvoří harmonickou čtveřici a opět $|\sphericalangle SS_0Z| = 90°$, takže S_0S je i osou úhlu CS_0P. Tedy oba body X, Y splývají s bodem S_0.

Poznámky:
Imaginární bod jsem udělil řešitelům, kteří s úspěchem využili teorii probíranou v seriálu, a předvedli tak pěkné jednoduché řešení. Vedle prvních dvou výše uvedených řešitelů jde ještě o *Pepu Svobodu*, který podobně jako *Anička Doležalová* využil Desarguesovu větu, ale trochu jiným způsobem (použil opačnou implikaci). Jak ukazuje třetí, *Tondovo* řešení, na úlohu šlo jít i pomocí nástrojů na počítání délek. Kromě něj takové řešení poslal *Štěpán Šimsa* (pomocí sinových vět). Zbylá dvě úspěšná řešení byla analytická. Ano, při počítání přímek není takové řešení obzvlášť hrozné, ale přesto jsem za ně strhával i-čko.

Většina došlých řešení ovšem bohužel úspěšná nebyla. Častý špatný postup spočíval v poslání C do nekonečna pomocí kolineace. To sice je možné, ale nestačí dokázat úlohu pro tento případ. Jednoduše proto, že nemáme kontrolu nad tím, co se při takové kolineaci stalo se vzdáleností PX ani kam se zobrazily body P', C', K', L'. Ale říkám si, že je lepší, když vás vytrestá tato úloha, než kdybyste narazili až u nějaké úlohy na olympiádě. *(Mirek Olšák)*

[1] Pro stručné obeznámení s tím, co to je harmonická čtveřice, si můžeš přečíst například článek *http://mks.mff.cuni.cz/library/Harmonicky4PomerTP/Harmonicky4PomerTP.pdf*.

Úloha 2.

(16; 16; 5,00; 5,0)

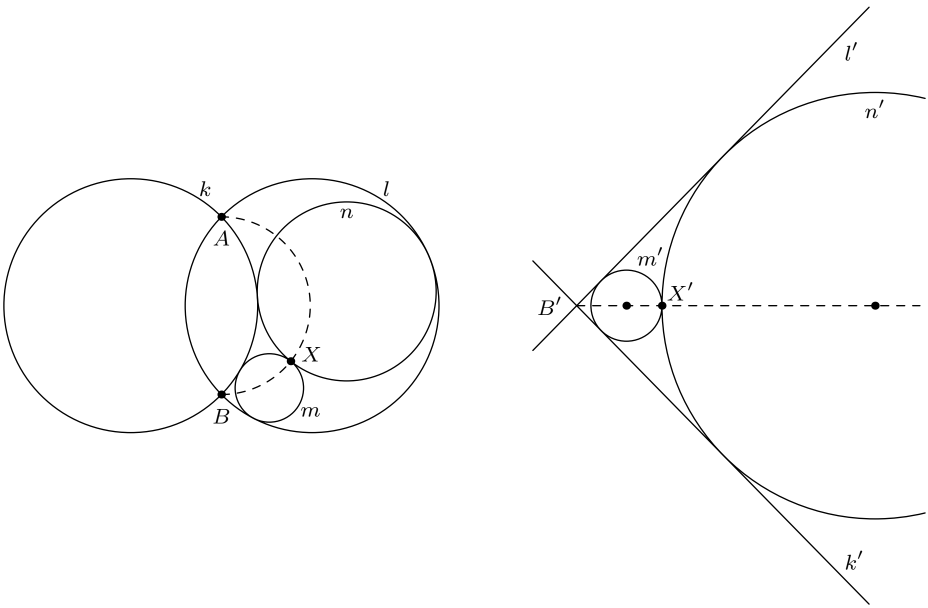
Jsou dány pevné kružnice k a l protínající se v bodech A, B. Uvažme nějaké dvě kružnice m, n, které mají obě vnější dotyk s k, vnitřní dotyk s l a navíc se samy dotýkají v bodě X. Ukažte, že bod X leží na pevné kružnici nezávislé na volbě m a n. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Proveďme inverzi v bodě A s libovolným poloměrem. Invertované objekty označme čárkovaně.

Protože kružnice k a l procházejí bodem A, jsou k' a l' různoběžné přímky s průsečíkem v bodě B'. Obrazy kružnic m a n jsou zřejmě kružnice. Jelikož m i n leží vně k, resp. uvnitř l, leží obě v téže polorovině vyťaté přímkou k', resp. l'. Tedy m' i n' leží obě v tomtéž úhlu určeném přímkami l' a k'.

Kružnice m', n' mají pochopitelně stále vnější dotyk a obě se dotýkají obou přímek k' a l', které jsou tak jejich společnými tečnami. Bod X' leží na úsečce spojující středy obou kružnic m' a n', kterážto je částí osy kružnicemi obývaného úhlu. Jeho vzor X proto leží na obrazu této osy, což je nějaká pevná kružnice procházející body A a B.



Poznámky:

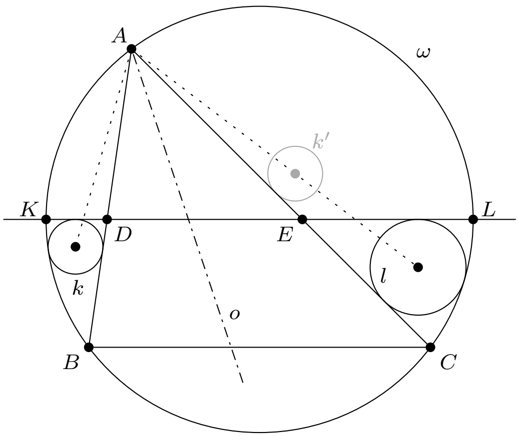
Těžiště úlohy spočívalo v použití inverze v bodě A nebo B, zbytek byl snadným cvičením. Vzorově postupovali všichni řešitelé úlohy až na *Štěpána Šimsu*, kterýžto v řešení používal stejnolehlost, mocnost, výpočty, a i na inverzi nakonec došlo. Polehčující okolností budiž fakt, že takto ukázal, kde má hledaná kružnice střed (totiž ve středu záporné stejnolehlosti zobrazující k na l). Celkem tak vybojoval krásných $5 - i + i$. *(Vít „Vejtek“ Musil)*

Úloha 3. (4; 3; 4,00; 5,0)

Rovnoběžka se stranou BC ostroúhlého trojúhelníka ABC vepsaného do kružnice ω protne jeho strany AB, AC postupně v bodech D, E a kratší oblouky AB, AC kružnice ω v bodech K, L. Kružnice k se dotýká úseček BD a DK a kružnice ω, kružnice ℓ se dotýká úseček CE, EL a kružnice ω. Ukažte, že průsečík vnitřních tečen kružnic k a ℓ leží na ose úhlu u vrcholu A. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení (podle Pepy Svobody):

Proveďme inverzi se středem v A a poloměrem $\sqrt{|AB| \cdot |AE|} = \sqrt{|AC| \cdot |AD|}$ (to je korektní, neboť $DE \parallel BC$) následovanou osovou souměrností podle osy o úhlu u vrcholu A. Označme toto zobrazení $\mathcal{Z}$ a značme čárkovaně obrazy objektů v něm.



Jelikož přímky AB, AC svírají stejný úhel s o, máme díky vhodné volbě poloměru inverze $B' = E$, $E' = B$, $C' = D$ a $D' = C$, takže přímka DE se zobrazí na kružnici ω a naopak. Speciálně se prohodí jejich průsečíky – body K, L.

Obrazem kružnice k ve zobrazení $\mathcal{Z}$ bude opět kružnice, která se bude dotýkat úsečky $B'D' = EC$, kružnicového oblouku $D'K' = CL$ a obrazu kružnice ω, což je přímka DE. To je ale přesně kružnice l! Kružnice k a l si tedy odpovídají ve zobrazení $\mathcal{Z}$, což mimo jiné znamená, že spojnice vrcholu A s jejich středy svírají stejný úhel s osou o (v samotné kruhové inverzi totiž střed kružnice a jejího obrazu leží na přímce se středem inverze).

Nyní už by šlo úlohu dokončit poměrně přímočaře, my to ale uděláme důmyslně. Je-li $AB = AC$, je celá úloha triviální. Dále předpokládejme opak a označme $k' \neq l$ obraz kružnice k v osové souměrnosti podle o.

Díky výše odvozené rovnosti úhlů leží středy kružnic k' a l na jedné přímce s bodem A. Zároveň se tyto kružnice obě dotýkají přímky AC, takže existuje kladná stejnolehlost se středem A, která je na sebe převádí. Střed záporné stejnolehlosti, která na sebe převádí k a k', leží zřejmě na o, takže díky tvrzení o skládání stejnolehlostí leží na o i střed záporné stejnolehlosti mezi k a l, což je přesně průsečík jejich vnitřních tečen. Jsme hotovi.

Poznámky:

Zbylí dva úspěšní řešitelé (*Adam Láf* a *Štěpán Šimsa*) postupovali po odvození klíčové rovnosti úhlů trochu jinak. Označili středy kružnic k, l postupně O_k, O_l a jejich poloměry r_k, r_l a pomocí podobných trojúhelníků ukázali, že $AO_k : AO_l = r_k : r_l = O_kH : HO_l$, kde H je průsečík vnitřních společných tečen. Z toho pak už okamžitě plynulo, že v trojúhelníku AO_kO_l je H průsečík osy úhlu s protější stranou. *(Pepa Tkadlec)*