4. jarní série

Téma: Finální myšmaš

Datum odeslání: 9. května 2011

1. úloha

(a) Pro všechna $a_1, a_2, \ldots, a_{2011} \in \langle 0, 1\rangle$ dokažte

$$a_1 + (1-a_1)a_2 + (1-a_1)(1-a_2)a_3 + \cdots + (1-a_1)\cdots(1-a_{2010})a_{2011} \leq 1.$$

(2 body)

(b) Pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \langle 0, 1\rangle$ dokažte

$$\big(1-(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)\big)^m + (1-a_1^m)(1-a_2^m)\cdots(1-a_n^m) \geq 1.$$

(3 body)

2. úloha

(a) Mišo napsal do každého políčka tabulky 3×3 přirozené číslo tak, že pokud sečetl čísla v kterémkoliv řádku, sloupci či na některé z diagonál, dostal vždy ten samý součet. Dokažte, že číslo v prostředním políčku tabulky tento součet dělí. (2 body)

(b) Najděte všechny polynomy P s celočíselnými koeficienty takové, že pro všechna celá čísla a, b, c splňující $a+b+c \neq 0$ platí $a+b+c \mid P(a)+P(b)+P(c)$. (3 body)

3. úloha

(a) Dovnitř kružnice k o poloměru r nakreslíme několik různých kruhů o poloměru $\frac{r}{2}$ tak, že všechny mají s k vnitřní dotyk a alespoň dva z nich mají spolu vnější dotyk. Ukažte, že útvar vzniklý sjednocením všech nakreslených kruhů má stejný obvod jako kružnice k. (2 body)

(b) V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané a D, E po řadě průsečíky os vnitřních úhlů u vrcholů A, B se stranami BC, AC. Dále označme P, Q body, ve kterých přímka DE protne kružnici opsanou trojúhelníku ABC. Dokažte, že poloměr kružnice opsané trojúhelníku PIQ je dvakrát větší než poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC. (3 body)

4. úloha

(a) Olin si vzal všechny pětiprvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ (kde $n \geq 9$) a každou obarvil nějakou barvou. Navíc je obarvil tak zvláštně, že každé dvě množiny stejné barvy měly neprázdný průnik. Dokažte, že mu na takové obarvení stačilo $n-8$ různých barev. (2 body)

(b) Dokažte, že existuje nekonečná množina přirozených čísel H taková, že pro každá dvě čísla $x, y \in H$ má číslo $x+y$ sudý počet různých prvočíselných dělitelů. (3 body)

5. úloha

(a) Na večírku se sešlo n lidí. Víme o nich, že jsou všichni různě staří a že každý zná[1] nanejvýš $k-1$ hostů ($k \leq n$) mladších, než je on sám. Dokažte, že je možné účastníky večírku rozdělit do k skupin tak, aby se žádní dva lidé z téže skupiny neznali. (2 body)

---

[1] Předpokládáme, že „znát se“ je symetrické, tedy pokud člověk A zná člověka B, tak už také člověk B zná člověka A. Sám sebe však nikdo „nezná“.

(b) Na jiném večírku se zase sešla společnost, ve které znal[1] každý průměrně d dalších hostů[2]. Dokažte, že na večírku existuje nějaká neprázdná skupina lidí – říkejme jí *jádro* – taková, že každý člověk z jádra zná alespoň $\frac{d}{2}$ lidí z jádra. (3 BODY)

6. ÚLOHA

(a) Do soutěže o co nejdivočejší nekonečnou posloupnost navrhl Honza tu, která pro všechna $n \in \mathbb{N}$ splňuje vztahy

$$a_{2n+1} = 2a_n,$$
$$a_{2n} = 2a_n + 1$$

a pro kterou navíc platí $a_1 = 1$. Ukažte, že v Honzově posloupnosti je obsaženo každé přirozené číslo právě jednou. (2 BODY)

(b) Rozhodněte, pro která $n \in \mathbb{N}$ lze čísla $1, 2, \ldots, n$ uspořádat do posloupnosti tak, aby každá skupina dvou a více po sobě jdoucích členů měla aritmetický průměr neceločíselný. (3 BODY)

7. ÚLOHA

Uvnitř pravidelného $2n$-úhelníka ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) zvolíme bod X, spojíme ho úsečkami se všemi vrcholy a $2n$ takto vzniklých trojúhelníků obarvíme na střídačku žlutě a červeně. Dokažte, že součet obsahů všech žlutých trojúhelníků je roven součtu obsahů všech červených trojúhelníků, je-li

(a) n sudé, (2 BODY)

(b) n liché. (3 BODY)

[2] d nemusí být celé číslo – např. pokud jsou na večírku (jen) tři lidé A, B, C takoví, že A zná B i C, ale B a C se neznají, pak je $d = \frac{4}{3}$.

Řešení 4. jarní série

1. úloha

(a) Pro všechna $a_1, a_2, \dots, a_{2011} \in \langle 0, 1\rangle$ dokažte

$$a_1 + (1 - a_1)a_2 + (1 - a_1)(1 - a_2)a_3 + \cdots + (1 - a_1) \cdots (1 - a_{2010})a_{2011} \leq 1.$$

(b) Pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \langle 0, 1\rangle$ dokažte

$$\bigl(1 - (1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n)\bigr)^m + (1 - a_1^m)(1 - a_2^m) \cdots (1 - a_n^m) \geq 1.$$

(Pepa Tkadlec)

(a) K řešení úlohy využijeme takzvanou *pravděpodobnostní interpretaci.* Řekněme, že 2011 studentů matfyzu postupně vyzývá počítač v piškvorkách. Střetnutí končí ve chvíli, kdy některý ze studentů vyhraje, nebo ve chvíli, kdy jsou všichni studenti poraženi. Předpokládejme, že pravděpobnost výhry i-tého studenta v jeho utkání je rovna a_i, $i \in \{1, 2, \dots, 2011\}$ (to lze předpokládat, neboť $a_1, a_2, \dots, a_{2011} \in \langle 0, 1\rangle$). Spočítejme pravděpodobnost, že střetnutí skončí vítězstvím některého ze studentů.

Situace příznivé tomuto jevu si rozdělme podle toho, který student počítač porazil. Pravděpodobnost, že i-tý student svoji hru vyhraje a všichni studenti před ním svoji hru prohrají, je rovna

$$(1 - a_1) \dots (1 - a_{i-1})a_i,$$

pravděpodobnost výhry některého ze studentů potom dostaneme jako součet všech těchto pravděpodobností. Využijeme-li faktu, že pravděpodobnost každého jevu je menší nebo rovna jedné, dostáváme kýženou nerovnost.

(b) Další soutěže ve hraní piškvorek proti počítači se účastní n studentů matfyzu, soutěž má celkem m kol (v každém kole odehraje každý ze studentů jeden zápas). Předpokládejme, že pravděpodobnost výhry i-tého studenta v každé jeho hře je rovna a_i, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Výraz $(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)$ udává pravděpodobnost, že v daném kole všichni studenti svoji hru prohrají, $1 - (1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)$ je tedy pravděpodobnost, že v daném kole alespoň jeden ze studentů vyhraje, a konečně $(1 - (1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n))^m$ vyjadřuje pravděpodobnost, že v každém kole některý ze studentů vyhraje.

Pravděpodobnost prohry i-tého studenta v alespoň jednom z kol je rovna $1 - a_i^m$, tedy součin $(1 - a_1^m)(1 - a_2^m) \dots (1 - a_n^m)$ udává pravděpodobnost, že každý student alespoň jednou prohraje, a $1 - (1 - a_1^m)(1 - a_2^m) \dots (1 - a_n^m)$ vyjadřuje pravděpodobnost, že některý ze studentů vyhraje všechny své zápasy.

Jelikož kdykoliv nastane druhá situace, nastane i první, bude mezi jejich pravděpodobnostmi platit nerovnost

$$\bigl(1 - (1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)\bigr)^m \geq 1 - (1 - a_1^m)(1 - a_2^m) \dots (1 - a_n^m).$$

Ta je zřejmě ekvivalentní nerovnosti, kterou jsme chtěli dokázat.

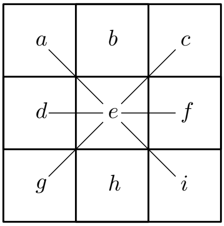
2. úloha

(a) Mišo napsal do každého políčka tabulky 3×3 přirozené číslo tak, že pokud sečetl čísla v kterémkoliv řádku, sloupci či na některé z diagonál, dostal vždy ten samý součet. Dokažte, že číslo v prostředním políčku tabulky tento součet dělí.

(b) Najděte všechny polynomy P s celočíselnými koeficienty takové, že pro všechna celá čísla a, b, c splňující $a + b + c \neq 0$ platí $a + b + c \mid P(a) + P(b) + P(c)$.

(Mišo Szabados & Michal „Kenny“ Rolínek)

(a) Označme čísla v tabulce $a, b, \ldots, i$ jako na obrázku a S součet čísel v jednom řádku, sloupci či úhlopříčce.



Chceme ukázat, že $e \mid S$. Sečtením obou úhlopříček s prostředním řádkem a odečtením krajních sloupců dostáváme rovnost

$$(a + e + i) + (g + e + c) + (d + e + f) - (a + d + g) - (c + f + i) = 3S - 2S.$$

Po úpravě vychází $3e = S$, čímž jsme hotovi.

(b) Zkusme nejprve dosadit $a = b = c$. Získáváme $3a \mid 3P(a)$, tedy $a \mid P(a)$ pro všechna a celá. Rozepíšeme-li si polynom jako součet jednotlivých mocnin, vidíme, že každé celé a musí dělit absolutní člen, a to může platit jen tehdy, je-li tento roven 0. Proto $P(0) = 0$.

Dále dosaďme $[a + b, c, 0]$. Získáváme podmínku $(a + b) + c \mid P(a + b) + P(c)$. Zároveň ale ze zadání víme, že $a + b + c \mid P(a) + P(b) + P(c)$, číslo $a + b + c$ musí tedy dělit i rozdíl

$$a + b + c \mid (P(a) + P(b) + P(c)) - (P(a + b) + P(c)) = P(a) + P(b) - P(a + b)$$

pro libovolná $a + b + c \neq 0$. Pokud by pro nějaká $a, b \in \mathbb{Z}$ byl výraz na pravé straně nenulový, mohli bychom zvolit c tak, aby levá strana byla dostatečně velká a nemohla dělit tu pravou. Platí proto

$$P(a) + P(b) - P(a + b) = 0.$$

Z toho pro každé přirozené n plyne

$$P(n) = P(n - 1 + 1) = P(n - 1) + P(1) = (P(n - 2) + P(1)) + P(1) = \cdots = n \cdot P(1).$$

Označíme-li hodnotu $P(1) = k$, pak má polynom $P(n) - n \cdot k$ nekonečně mnoho kořenů, což znamená, že je to nulový polynom[3].

[3] Nenulový polynom stupně s má totiž nejvýše s reálných kořenů.

Zkouškou naopak snadno ověříme, že každý polynom $P(n) = k \cdot n$, $k \in \mathbb{Z}$ požadovanému vztahu vyhovuje.

3. úloha

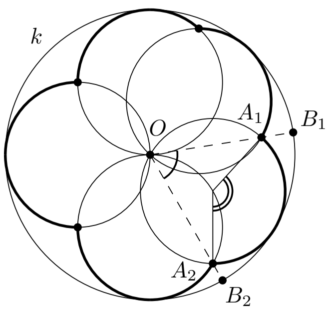
(a) Dovnitř kružnice k o poloměru r nakreslíme několik různých kruhů o poloměru $\frac{r}{2}$ tak, že všechny mají s k vnitřní dotyk a alespoň dva z nich mají spolu vnější dotyk. Ukažte, že útvar vzniklý sjednocením všech nakreslených kruhů má stejný obvod jako kružnice k.

(b) V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané a D, E po řadě průsečíky os vnitřních úhlů u vrcholů A, B se stranami BC, AC. Dále označme P, Q body, ve kterých přímka DE protne kružnici opsanou trojúhelníku ABC. Dokažte, že poloměr kružnice opsané trojúhelníku PIQ je dvakrát větší než poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC.

(Pepa Tkadlec)

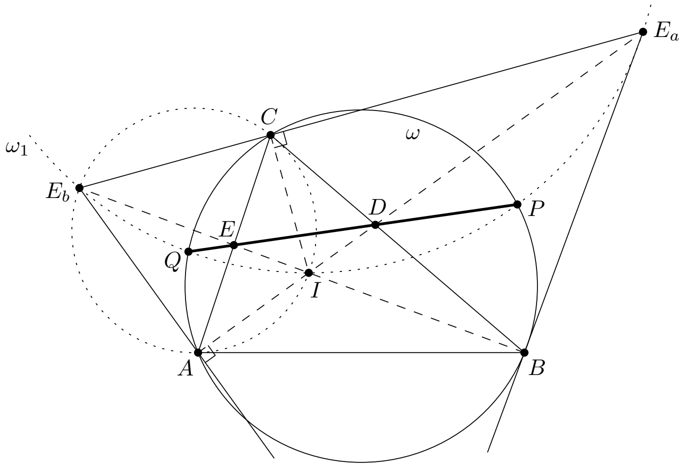
(a) Označme O střed kružnice k a U útvar vzniklý sjednocením všech n kruhů o poloměru $\frac{r}{2}$. Jelikož dva z těchto kruhů mají vnější dotyk, leží bod O uvnitř útvaru U. Zároveň bodem O prochází každá z n kružnic.

Označme dále body, jimiž je obvod útvaru U rozdělen na jednotlivé kružnicové oblouky, postupně $A_1, \ldots, A_n$. Konečně označme $B_1, \ldots, B_n$ průsečíky přímek $OA_1, \ldots, OA_n$ a kružnice k.



Pro důkaz celého tvrzení stačí ukázat, že délka oblouku A_1A_2 je stejná jako délka oblouku B_1B_2. To je však snadné, neboť oblouku A_1A_2 na kružnici o poloměru $\frac{r}{2}$ přísluší dvakrát větší středový úhel než oblouku B_1B_2 na kružnici o poloměru r.

(b) Označme ω kružnici opsanou trojúhelníku ABC, dále E_a, E_b středy kružnic připsaných trojúhelníku ABC vzhledem k vrcholům A, B a konečně ω_1 kružnici opsanou trojúhelníku E_bIE_a. Nejdříve ukážeme, že body P a Q leží také na kružnici ω_1.



Jelikož CI a CE_b jsou osy vnitřního, resp. vnějšího úhlu trojúhelníka ABC u vrcholu C, jsou na sebe kolmé. Stejně tak $AE_b \perp AI$, takže čtyřúhelník $AICE_b$ je tětivový a z mocnosti máme

$$|EA| \cdot |EC| = |EI| \cdot |EE_b|.$$

Levá strana ovšem vyjadřuje mocnost bodu E ke kružnici ω a pravá mocnost bodu E ke kružnici ω_1, takže E leží na chordále těchto dvou kružnic. Totožným argumentem se čtyřúhelníkem $CIBE_a$ zjistíme, že na této chordále leží i bod D. Chordálou je tak samotná přímka DE a její průsečíky s kružnicí ω (totiž body P, Q) leží i na kružnici ω_1, což jsme chtěli dokázat.

Zbývá zdůvodnit, proč je poloměr ω_1 dvakrát větší než poloměr ω. Zaměřme se na trojúhelník E_bIE_a. V něm jsou body A, B, C paty výšek. Kružnice ω je proto *Feuerbachovou kružnicí*[4] trojúhelníka E_bIE_a a jako taková má vůči ω_1 opravdu poloviční poloměr.

4. úloha

(a) Olin si vzal všechny pětiprvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ (kde $n \geq 9$) a každou obarvil nějakou barvou. Navíc je obarvil tak zvláštně, že každé dvě množiny stejné barvy měly neprázdný průnik. Dokažte, že mu na takové obarvení stačilo $n - 8$ různých barev.

(b) Dokažte, že existuje nekonečná množina přirozených čísel H taková, že pro každá dvě čísla $x, y \in H$ má číslo $x + y$ sudý počet různých prvočíselných dělitelů. *(Alexander „Olin“ Slávik)*

(a) Pre $n = 9$ nám naozaj stačí jedna farba, pretože aby boli dve päťprvkové množiny disjunktné, potrebovali by sme spolu 10 prvkov, ktoré ale nemáme.

Ďalej predpokladajme, že sme už úlohu dokázali pre nejakú hodnotu n a pozrime sa, ako môžeme ofarbiť množinu $\{1, 2, \ldots, n + 1\}$: na množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ nám z indukčného predpokladu stačí $n - 8$ farieb. Rovno si všimnime, že nezafarbené ostanú iba pätice obsahujúce číslo $n + 1$,

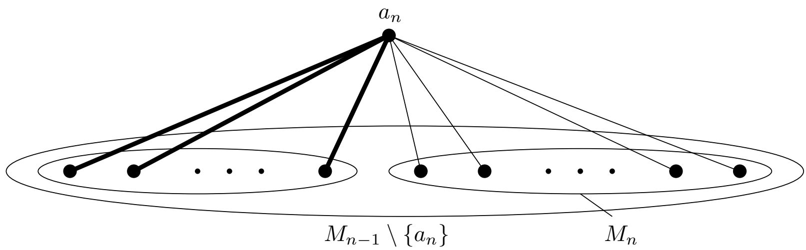
[4] O Feuerbachově kružnici (někdy též nazývané kružnice devíti bodů) najdeš více v PraSečí knihovně nebo na wiki pod heslem *nine-point circle*.

teda na ne postačí jedna farba. Spolu sme teda použili $n - 8 + 1 = (n + 1) - 8$ farieb, čím je úloha dokázaná.

(b) **Voľne podľa riešenia Anny Zavadilovej:** Označme si množinu všetkých čísel tvaru $3k+1$ písmenom M a uvažujme nekonečný úplný graf, ktorého vrcholy budú práve prvky množiny M. Hranu medzi a a b ofarbíme čierne, ak má $a + b$ párny počet rôznych prvočíselných deliteľov, v opačnom prípade bude táto hrana biela.

Ukážeme, že v takto vzniklom grafe vieme vždy nájsť takú nekonečnú množinu vrcholov N, že všetky hrany spájajúce nejakú dvojicu jej bodov majú rovnakú farbu. Ak už poznáte nekonečnú Ramseyovu vetu, môžete nasledujúce dva odseky preskočiť a prejsť rovno k poslednému.

Na začiatok zvoľme ľubovoľné číslo $a_1 \in M$ a ostatné prvky $x \in M \setminus \{a_1\}$ rozdeľme na dve skupiny podľa toho, akú farbu má hrana (a_1, x). Aspoň jedna z týchto skupín má nekonečne veľa prvkov, označme ju M_1. Vyberme si teraz prvok $a_2 \in M_1$, opäť rozdeľme $M_1 \setminus \{a_2\}$ na dve časti podľa farby hrany s bodom a_2 a časť s nekonečne veľa prvkami označme M_2. Podobným štýlom pokračujme ďalej, vždy vyberieme číslo $a_n \in M_{n-1}$, zvyšok množiny M_{n-1} rozdelíme na dve skupiny podľa toho, akú farbu má hrana smerujúca od čísla a_n a tú z nich, ktorá má nekonečne prvkov (taká určite existuje, pretože M_{n-1} je nekonečná) označíme M_n.



Dostaneme tak nekonečnú postupnosť $a_1, a_2, a_3, \ldots$, v ktorej pre každý člen a_n platí, že pre všetky $n' > n$ majú hrany $(a_n, a_{n'})$ rovnakú farbu (označme ju f_n). Keď si teraz rozdelíme prvky v postupnosti na dve skupiny podľa ich f_n, opäť niektorá z nich musí mať nekonečne veľa prvkov. V rámci tejto skupiny majú všetky hrany rovnakú farbu a my sme našli hľadanú množinu N.

Ak sú hrany medzi vrcholmi z N čierne, táto množina spĺňa podmienky zadania a teda $H = N$. V opačnom prípade (všetky súčty majú nepárny počet prvočíselných deliteľov) si stačí uvedomiť, že súčet ľubovoľných dvoch čísel z N dáva po delení číslom 3 zvyšok 2. Definujme si teda množinu $N' = \{3x : x \in N\}$, kde súčet ľubovoľnej dvojice prvkov si zachováva všetky prvočíselné delitele, ktoré mal z množiny N, pribudne ale deliteľ 3. Ich počet sa teda zvýši o jedna, čím $H = N'$ splní podmienku zadania.

5. úloha

(a) Na večírku se sešlo n lidí. Víme o nich, že jsou všichni různě staří a že každý zná[5] nanejvýš $k - 1$ hostů ($k \leq n$) mladších, než je on sám. Dokažte, že je možné účastníky večírku rozdělit do k skupin tak, aby se žádní dva lidé z téže skupiny neznali.

---

[5]Předpokládáme, že „znát se“ je symetrické, tedy pokud člověk A zná člověka B, tak už také člověk B zná člověka A. Sám sebe však nikdo „nezná“.

(b) Na jiném večírku se zase sešla společnost, ve které znal[5] každý průměrně d dalších hostů[6]. Dokažte, že na večírku existuje nějaká neprázdná skupina lidí – říkejme jí *jádro* – taková, že každý člověk z jádra zná alespoň $\frac{d}{2}$ lidí z jádra. *(Alexander „Olin" Slávik)*

(a) Zvolme libovolné $k \in \mathbb{N}$, dokážeme pro toto k požadované tvrzení indukcí podle n. Pro $n = k$ rozdělíme hosty triviálně tak, že každý bude sám ve své vlastní skupině. Nechť je nyní $n > k$ a tvrzení platí pro všechny nižší hodnoty. Vezmeme všechny hosty kromě toho nejstaršího (těch je celkem $n-1$). Dle indukčního předpokladu jsme schopni je rozdělit do k skupin, v rámci kterých se neznají. Do tohoto rozdělení nyní přidáme nejstaršího hosta. Ten zná nejvýše $k-1$ mladších hostů, tedy nejvýše $k-1$ hostů celkem. Skupin hostů je ovšem k, musí tedy existovat skupina, ve které se nenachází ani jeden host, kterého by nejstarší znal. Do této skupiny tedy můžeme umístit nejstaršího hosta, čímž dostáváme požadované rozdělení do skupin.

(b) **Volně podle Anh Dung Le:** Dokážeme ve skutečnosti trochu jiné tvrzení: pokud je průměr známostí jednoho hosta na večírku *alespoň* d, pak na večírku již existuje jádro (skupina, v rámci níž zná každý člověk aspoň $d/2$ jiných). Tvrzení uvedené v zadání z tohoto triviálně vyplývá.

Uvažujme graf G, jehož vrcholy budou účastníci večírku a dva vrcholy budou spojeny právě tehdy, když se příslušní dva hosté znají. Počet vrcholů označíme n, číslo d v tomto grafu odpovídá dolnímu odhadu na průměrný stupeň vrcholu. Tvrzení dokážeme indukcí podle n.

Předně si povšimněme, že musí platit $d \leq n-1$, neboť nejvyšší průměrný stupeň má úplný graf K_n, ve kterém má každý vrchol stupeň $n-1$. Uvažme nyní případ, kdy $\lceil d \rceil = n-1$[7]. Ukážeme, že potom již mají všechny vrcholy stupeň alespoň $d/2$, lze tedy jako jádro vzít celý G. Pokud by totiž v G existoval nějaký vrchol se stupněm menším než $d/2$, dostali bychom po odebrání tohoto vrcholu a všech hran z něj vedoucích nový graf (označme ho G'), ve kterém by byl součet stupňů všech vrcholů alespoň $nd - 2 \cdot d/2 = (n-1)d$ (G měl součet stupňů alespoň nd a odebrali jsme z něj nejvýše $d/2$ hran, každá hrana přispívá do součtu stupňů dvakrát). To však není možné, protože G' by měl $n-1$ vrcholů a průměrný stupeň alespoň $\frac{(n-1)d}{n-1} = d$, odkud dostáváme $d \leq n-2$ – spor s předpokladem $\lceil d \rceil = n-1$.

Předpokládejme nyní, že $n > \lceil d \rceil + 1$ a pro menší počty vrcholů tvrzení platí. Mají-li všechny vrcholy v G stupeň alespoň $d/2$, máme vyhráno, v opačném případě uvažme graf G', který vznikne odebráním libovolného vrcholu se stupněm menším než $d/2$. Součet stupňů vrcholů v grafu G' je opět alespoň $(n-1)d$ (výpočet je zcela totožný), průměrný stupeň v G' je tedy alespoň d. Protože má graf G' $n-1$ vrcholů, lze v něm podle indukčního předpokladu najít jádro, které je ovšem jádrem rovněž v původním grafu G, takže jsme hotovi.

6. úloha

(a) Do soutěže o co nejdivočejší nekonečnou posloupnost navrhl Honza tu, která pro všechna $n \in \mathbb{N}$ splňuje vztahy

$$a_{2n+1} = 2a_n,$$
$$a_{2n} = 2a_n + 1$$

[6] d nemusí být celé číslo – např. pokud jsou na večírku (jen) tři lidé A, B, C takoví, že A zná B i C, ale B a C se neznají, pak je $d = \frac{4}{3}$.

[7] Symbol $\lceil d \rceil$ značí horní celou část čísla d, tedy nejmenší přirozené číslo, které je větší nebo rovno d.

a pro kterou navíc platí $a_1 = 1$. Ukažte, že v Honzově posloupnosti je obsaženo každé přirozené číslo právě jednou.

(b) Rozhodněte, pro která $n \in \mathbb{N}$ lze čísla $1, 2, \ldots, n$ uspořádat do posloupnosti tak, aby každá skupina dvou a více po sobě jdoucích členů měla aritmetický průměr neceločíselný.

(Honza Bílek & Alča Skálová)

(a) **Volně podle Lukáše Folwarczného:** Indukcí dokážeme, že pokud prvních k prvků posloupnosti je permutací prvních k přirozených čísel, pak prvních $2k+1$ prvků je permutací prvních $2k+1$ přirozených čísel. Pro $k = 1$ platí tvrzení ze zadání.

Předpokládejme teď, že a_1 až a_k jsou všechna přirozená čísla od 1 do k v neznámém pořadí. Uvažme hodnoty n od 1 do k. Podle první rovnice se v posloupnosti objeví dvojnásobky čísel a_1 až a_k, což jsou všechna sudá čísla od 2 do $2k$. Podle druhé rovnice se v posloupnosti objeví opět dvojnásobky čísel a_1 až a_k, ovšem zvýšené o 1, což jsou všechna lichá čísla od 3 do $2k+1$. Jelikož $a_1 = 1$, dokázali jsme, že na prvních $2k+1$ pozicích máme rozmístěná všechna přirozená čísla od 1 do $2k+1$. Každé je zde tedy právě jednou a tvrzení je dokázáno.

(b) Tvrdíme, že z lichých čísel vyhovuje jen $n = 1$. Skutečně, pro každé vyšší $n = 2k+1$ můžeme vzít součet všech čísel, který je roven $\frac{1}{2}(2k+1)(2k+2) = (k+1)(2k+1)$. Tento součet je zřejmě dělitelný číslem n, tedy aritmetický průměr všech čísel bude rovněž celé číslo a tvrzení neplatí.

Nyní pro libovolné pevné sudé $n = 2k$ ukážeme, že posloupnost

$$A = 2, 1, 4, 3, \ldots, 2k, 2k-1$$

má požadovanou vlastnost. Skupině dvou a více po sobě jdoucích čísel posloupnosti budeme říkat *blok*.

Učiníme důležité pozorování – členy posloupnosti A jsou střídavě o 1 vyšší, resp. o 1 nižší než členy posloupnosti $B = 1, 2, 3, 4, \ldots, 2k-1, 2k$. Sčítáme-li tedy sudý počet po sobě jdoucích čísel posloupnosti A, dostaneme stejný součet, jako když sčítáme odpovídající členy posloupnosti B. Pro bloky liché délky se součty budou lišit o 1 (některým směrem). Teď již snadno dokážeme, že průměr čísel v každém bloku je neceločíselný.

Průměr čísel v blocích sudé délky je pro vhodná $a, t \in \mathbb{N}$ roven

$$\frac{1}{2t}\left(a + (a+1) + \cdots + (a+2t-1)\right) = \frac{1}{2t}\left(2t \cdot a + \frac{1}{2}(2t-1) \cdot 2t\right) = a + \frac{2t-1}{2},$$

což celočíselné skutečně není. Podobně pro bloky liché délky vyjde průměr

$$\frac{1}{2t+1}\left(a + (a+1) + \cdots + (a+2t) \pm 1\right) =$$
$$= \frac{1}{2t+1}\left((2t+1)a + \frac{1}{2}2t \cdot (2t+1) \pm 1\right) = a + t \pm \frac{1}{2t+1},$$

což rovněž není celé číslo, a jsme hotovi.

Čísla $1, 2, \ldots, n$ lze uspořádat do posloupnosti splňující zadání, právě když n je sudé nebo $n = 1$.

7. úloha

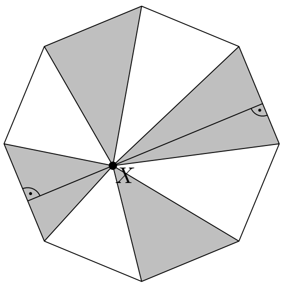
Uvnitř pravidelného $2n$-úhelníka ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) zvolíme bod X, spojíme ho úsečkami se všemi vrcholy a $2n$ takto vzniklých trojúhelníků obarvíme na střídačku žlutě a červeně. Dokažte, že součet obsahů všech žlutých trojúhelníků je roven součtu obsahů všech červených trojúhelníků, je-li

(a) n sudé,

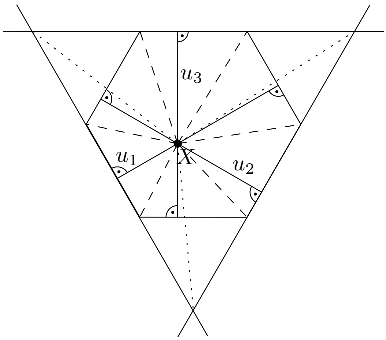
(b) n liché. *(Pepa Tkadlec)*

(a) V pravidelném $2n$-úhelníku mají všechny strany stejnou délku a a každé dvě protější strany jsou rovnoběžné a mají vždy stejnou vzdálenost d. Je-li navíc n sudé, mají trojúhelníky u protějších stran stejnou barvu, součet jejich výšek na ony strany je d a součet jejich obsahů je tedy roven $\frac{1}{2}ad$. Takových dvojic trojúhelníků je v našem $2n$-úhelníku od každé barvy právě $\frac{n}{2}$, tedy součet obsahů všech červených i žlutých trojúhelníků je stejný, a to $\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{2}ad$.

(b) Následující důkaz funguje pro sudá i lichá $n \geq 3$. Nechť a je délka strany $2n$-úhelníku. Označme výšky žlutých, resp. červených trojúhelníků vedené vždy z bodu X na příslušnou stranu $2n$-úhelníku $u_1, \dots, u_n$, resp. $v_1, \dots, v_n$. Součet obsahů všech žlutých trojúhelníků je roven $\frac{1}{2}au_1 + \dots + \frac{1}{2}au_n = \frac{1}{2}a(u_1 + \dots + u_n)$, podobně součet obsahů červených trojúhelníků je roven $\frac{1}{2}a(v_1 + \dots + v_n)$. Stačí tedy dokázat, že $u_1 + \dots + u_n = v_1 + \dots + v_n$. Protáhneme-li všechny žluté strany $2n$-úhelníku, dostaneme pravidelný n-úhelník s délkou strany b. Jeho obsah je roven $\frac{1}{2}b(u_1 + \dots + u_n)$. Shodný n-úhelník však dostaneme i protažením všech červených stran a jeho obsah můžeme spočítat jako $\frac{1}{2}b(v_1 + \dots + v_n)$. Porovnáním obou obsahů dostáváme, co jsme chtěli.



Obr. k (a), $n = 4$



Obr. k (b), $n = 3$