Povídání ke druhé jarní sérii

Druhá jarní série je věnována posloupnostem a ani tentokrát jsme pro Tebe nezapomněli připravit krátké povídání. Nejprve si povíme, co to vlastně posloupnost je, potom zmíníme některé způsoby, jak ji lze zadat, a nakonec se zaměříme na dva významné typy posloupností.

Posloupností rozumíme několik (klidně nekonečně mnoho) ne nutně různých reálných čísel, která jsou v určitém pořadí. Jednotlivé členy značíme pro konečnou posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_n$, pro nekonečnou $a_1, a_2, \ldots$, celou posloupnost pak $\{a_i\}_{i=1}^{n}$, příp. $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$. Zde si často vystačíme se zápisem $\{a_i\}$.

Už v definici se posloupnosti rozdělily na dvě skupiny. První skupinu tvoří posloupnosti nekonečné, druhou konečné. Pokud není uvedeno jinak, posloupností rozumíme posloupnost nekonečnou.

Posloupnost můžeme zadat více způsoby. Jedním z nich je poskytnutí explicitního předpisu pro n-tý člen jako funkce n. Příkladem může být posloupnost daná předpisem $a_n = n^2$ pro $n \geq 1$, tj. $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$. Tuto posloupnost tvoří čísla $1, 4, 9, 16, \ldots$ v tomto pořadí.

Jinou možností je zadat posloupnost rekurentně. To znamená, že $(n+1)$-tý člen posloupnosti vyjádříme pomocí n a předchozích členů. To samo o sobě nestačí, potřebujeme ještě počáteční podmínky. Například předchozí posloupnost bychom rekurentně zadali pomocí vztahu $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ pro $n \geq 1$ a počáteční podmínky $a_1 = 1$.

V praxi se používají oba způsoby a každý má své výhody a nevýhody. Za určitých podmínek lze oba zápisy mezi sebou převádět. Asi nejznámější rekurentně zadanou posloupností je *Fibonacciho posloupnost* $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ V ní je každý člen součtem předchozích dvou členů, tedy $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ pro $n \geq 1$, přičemž $a_0 = 0$ a $a_1 = 1$. Její explicitní vyjádření nám toho naopak moc neřekne.[1]

Vlastnosti posloupností jsou definovány obdobně jako u funkcí. Posloupnosti mohou být (ne)rostoucí nebo (ne)klesající, monotónní nebo shora či zdola omezené.

V praxi se setkáváme nejčastěji s aritmetickými a geometrickými posloupnostmi, o kterých si povíme něco více.

Posloupnost[2] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme *aritmetickou*, jestliže existuje takové reálné číslo d, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Číslu d říkáme *diference* aritmetické posloupnosti.

Podobně posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme *geometrickou*, jestliže existuje takové nenulové reálné číslo q, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Číslu q říkáme *kvocient* geometrické posloupnosti.

Pro obě posloupnosti známe explicitní vyjádření. Pro aritmetickou posloupnost platí vztah

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

a pro geometrickou

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

---

[1] Překvapivě platí, že $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$, číslo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se taky nazývá *zlatý řez.*

[2] Někdy se bere za první člen posloupnosti a_0, takže pokud znáš vzorečky, které vypadají trochu jinak, nemusí to být chyba.

Součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti lze spočíst pomocí vzorce

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti platí

$$s_n = \begin{cases} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} & \text{pro } q \neq 1, \\ n a_1 & \text{pro } q = 1. \end{cases}$$

Pokud navíc kvocient geometrické posloupnosti splňuje $|q| < 1$, pak pro součet $s = a_1 + a_2 + \dots$ všech její členů platí

$$s = \frac{a_1}{1 - q}.$$

2. jarní série

Téma: Posloupnosti

Datum odeslání: 14. března 2011

1. úloha (3 body)

Pepa napsal na tabuli za sebe několik číslic tak, že každá dvojice po sobě jdoucích číslic tvořila dvojciferné číslo, které bylo druhou mocninou nějakého přirozeného čísla. Kolik nejvíce číslic mohl napsat?

2. úloha (3 body)

Součet prvních n členů Miškovy aritmetické posloupnosti celých čísel je mocninou dvojky. Dokažte, že pak i n je mocninou dvojky.

3. úloha (3 body)

První dva členy posloupnosti jsou jedničky a každý další je definovaný jako zbytek po dělení sedmi součtu dvou předcházejících členů. Kolik šestek se vyskytuje mezi prvními 2011 členy posloupnosti?

4. úloha (5 bodů)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel pro $n \geq 2$ splňuje

$$a_n = a_{n-1} + a_{n+2}.$$

Zjistěte, jaký je největší možný počet po sobě jdoucích kladných členů takové posloupnosti.

5. úloha (5 bodů)

První člen posloupnosti je 99 a každý další je součet desátých mocnin všech cifer předchozího členu. Může se v takové posloupnosti vyskytnout nějaké číslo dvakrát?

6. úloha (5 bodů)

Rozhodněte, zda pro nějaké přirozené n existuje n-tice přirozených čísel $c_1, \dots, c_n$ taková, že všechna $a+c_1, \dots, a+c_n$ jsou prvočísla pro více než jedno, ale ne pro nekonečně mnoho různých přirozených čísel a.

7. úloha (5 bodů)

Lenka dostala aritmetickou posloupnost reálných čísel začínající jedničkou. Protože má však radši geometrické, tak si několik (třeba i nekonečně mnoho) členů vyškrtala, čímž získala nekonečnou geometrickou posloupnost začínající opět jedničkou. Určete všechny možné kvocienty, jaké mohla její zbylá geometrická posloupnost mít.

8. úloha (5 bodů)

Určete počet všech posloupností reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takových, že pro všechna přirozená čísla m, n platí $a_m \cdot a_n = a_{m \cdot n}$ a zároveň $a_n = a_{n+2011}$.

Řešení 2. jarní série

1. úloha
Pepa napsal na tabuli za sebe několik číslic tak, že každá dvojice po sobě jdoucích číslic tvořila dvojciferné číslo, které bylo druhou mocninou nějakého přirozeného čísla. Kolik nejvíce číslic mohl napsat? *(Pepa Tkadlec)*

Prvně si vypíšeme dvojciferná čísla, která jsou druhou mocninou nějakého přirozeného čísla. Jsou to: 16, 25, 36, 49, 64 a 81. Pak rozebereme, jaké cifry mohou za jednotlivými číslicemi následovat:

$$1 \to 6, \quad 2 \to 5, \quad 3 \to 6, \quad 4 \to 9, \quad 5 \to \times, \quad 6 \to 4, \quad 7 \to \times, \quad 8 \to 1, \quad 9 \to \times.$$

Všimneme si, že číslo 25 nelze do žádné řady zapojit, a podobně nepraktické je 36 kvůli počáteční cifře 3 (nejdelší řada s 36 je 3, 6, 4, 9). Bez těchto dvou čísel připadá v úvahu nejdelší posloupnost o délce pět. Taková ale opravdu existuje (8, 1, 6, 4, 9), takže jsme hotovi.

2. úloha
Součet prvních n členů Miškovy aritmetické posloupnosti celých čísel je mocninou dvojky. Dokažte, že pak i n je mocninou dvojky. *(Pepa Tkadlec)*

Zo zadania vieme, že súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti celých čísel je mocnina dvoch, preto platí

$$\frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 2^x$$

pre nejaké $x \in \mathbb{N}_0$. Úpravou dostávame vzťah

$$n(a_1 + a_n) = 2^{x+1}.$$

Pretože na ľavej strane sú iba celé (dokonca prirodzené) čísla a v prvočíselnom rozklade pravej strany sú len dvojky, n aj $(a_1 + a_n)$ musia byť tiež mocniny dvoch, čo sme chceli dokázať.

3. úloha
První dva členy posloupnosti jsou jedničky a každý další je definovaný jako zbytek po dělení sedmi součtu dvou předcházejících členů. Kolik šestek se vyskytuje mezi prvními 2011 členy posloupnosti? *(Martina Vaváčková)*

Nejprve si uvědomíme, že v posloupnosti se vyskytuje pouze sedm různých čísel. Protože následující člen je vždy jednoznačně určený dvěma předchozími, je zřejmé, že členy posloupnosti se časem začnou opakovat (máme jen 7^2 uspořádaných dvojic). Pojďme si tedy vypsat několik prvních členů:

$$1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0, 1, 1, \ldots$$

Vidíme, že na sedmnácté a osmnácté pozici jsou opět dvě jedničky. Z toho vyplývá, že posloupnost se, sedmnáctým členem počínaje, opakuje znovu od začátku. Našli jsme tedy periodu délky 16, v níž jsou obsaženy čtyři šestky.

Nyní spočítejme, kolik šestek se vyskytuje mezi prvními 2011 členy posloupnosti. Jelikož $2011 = 125 \cdot 16 + 11$, máme 125 celých period, v každé čtyři šestky, a k tomu prvních 11 členů 126-té periody, mezi nimiž se vyskytují tři šestky. To je celkem $125 \cdot 4 + 3 = 503$ šestek.

4. úloha

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel pro $n \geq 2$ splňuje

$$a_n = a_{n-1} + a_{n+2}.$$

Zjistěte, jaký je největší možný počet po sobě jdoucích kladných členů takové posloupnosti.

(Lenka Slavíková)

Dokážeme, že maximální počet po sobě jdoucích kladných členů takové posloupnosti je pět. Pět kladných členů v řadě obsahuje například posloupnost, která začíná čísly $1, 2, 3, 1, 1, -2, 0, \ldots$

Předpokládejme pro spor, že existuje posloupnost splňující vztah ze zadání, v níž se vyskytuje šest po sobě jdoucích kladných členů $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+5}$. Ty splňují rovnosti

$$a_{k+1} = a_k + a_{k+3}, \tag{1}$$

$$a_{k+2} = a_{k+1} + a_{k+4}, \tag{2}$$

$$a_{k+3} = a_{k+2} + a_{k+5}. \tag{3}$$

Protože jsou všechna a_i, $i \in \{k, \ldots, k+5\}$, kladná, platí

$$a_{k+1} \overset{(1)}{>} a_{k+3} \overset{(3)}{>} a_{k+2} \overset{(2)}{>} a_{k+1},$$

což je spor.[3]

Jiné řešení: Jsou-li a_k, a_{k+1}, a_{k+2} kladná, pak

$$a_{k+3} = a_{k+1} - a_k > 0 \text{ , právě když } a_{k+1} > a_k,$$

$$a_{k+4} = a_{k+2} - a_{k+1} > 0 \text{ , právě když } a_{k+2} > a_{k+1}.$$

Je-li však $a_{k+2} > a_{k+1} > a_k$, pak

$$a_{k+5} = a_{k+3} - a_{k+2} = a_{k+1} - a_k - a_{k+2} = (a_{k+1} - a_{k+2}) - a_k < 0.$$

Jinými slovy je-li pět členů po sobě kladných, šestý už kladný být nemůže. Naopak pro získání pěti kladných po sobě jdoucích členů stačí zvolit první tři členy tak, aby $0 < a_1 < a_2 < a_3$.

5. úloha

První člen posloupnosti je 99 a každý další je součet desátých mocnin všech cifer předchozího členu. Může se v takové posloupnosti vyskytnout nějaké číslo dvakrát? *(Vít „Vejtek“ Musil)*

Dokážeme indukcí, že každý člen zadané posloupnosti je nejvýše jedenácticiferný. Pro první člen 99 tvrzení platí zřejmě. Buď nyní a_n nejvýše jedenácticiferné. Pak

$$a_{n+1} \leq 11 \cdot 9^{10} = 99 \cdot 9^9 < 100 \cdot 10^9 = 10^{11},$$

---

[3] Spor lze odvodit i jinými způsoby. Například sečtením všech tří rovnic dostaneme $a_k + a_{k+4} + a_{k+5} = 0$, což pro kladná čísla jistě platit nemůže.

a a_{n+1} je rovněž nejvýše jedenácticiferné.

Odtud plyne, že posloupnost je omezená, takže nabývá jen konečně mnoha hodnot. Podle Dirichletova principu se proto některá z hodnot v posloupnosti vyskytne dokonce nekonečněkrát.

6. úloha

Rozhodněte, zda pro nějaké přirozené n existuje n-tice přirozených čísel $c_1, \ldots, c_n$ taková, že všechna $a+c_1, \ldots, a+c_n$ jsou prvočísla pro více než jedno, ale ne pro nekonečně mnoho různých přirozených čísel a. *(Alča Skálová)*

Ano, takové n a příslušná n-tice přirozených čísel existují. Příkladem budiž:

$$n = 5, \qquad c_1 = 1,\ c_2 = 3,\ c_3 = 9,\ c_4 = 15,\ c_5 = 27.$$

Čísla $c_1, \ldots, c_5$ dávají všech pět různých zbytků po dělení pěti. Jelikož přičtením libovolného přirozeného čísla se tato vlastnost nezmění, bude pro každé a přirozené jedno z čísel $a + c_1, \ldots, a + c_5$ dělitelné pěti. Jediným prvočíslem dělitelným pěti je samotné číslo 5, tudíž aby mohla být všechna $a + c_1, \ldots, a + c_5$ prvočísla, musí být jedno z nich přímo rovno pěti. Do úvahy připadají jen dvě možnosti pro a, a to $a = 5 - c_1 = 4$ a $a = 5 - c_2 = 2$. Pro obě dvě skutečně dostáváme pětici prvočísel (pro $a = 4$ vyjde $(5, 7, 13, 19, 31)$ a pro $a = 2$ dostaneme $(3, 5, 11, 17, 29)$), čímž je úloha zdárně vyřešena.

7. úloha

Lenka dostala aritmetickou posloupnost reálných čísel začínající jedničkou. Protože má však radši geometrické, tak si několik (třeba i nekonečně mnoho) členů vyškrtala, čímž získala nekonečnou geometrickou posloupnost začínající opět jedničkou. Určete všechny možné kvocienty, jaké mohla její zbylá geometrická posloupnost mít. *(Lenka Slavíková)*

Ukážeme, že kvocienty, které mohla zbylá geometrická posloupnost mít, jsou právě všechna přirozená čísla. Kvocient geometrické posloupnosti označme q a diferenci původní aritmetické posloupnosti označme d. Pokud Lenka dostala posloupnost $1, 1, 1, \ldots$ (tj. $d = 0$), mohla libovolným proškrtáním získat jen konstantní posloupnost, tj. geometrickou posloupnost s kvocientem $q = 1$. Dále předpokládejme $d \neq 0$.

Protože členy geometrické posloupnosti jsou zároveň členy původní aritmetické posloupnosti, je rozdíl dvou po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti celočíselným násobkem diference d. Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ můžeme psát

$$\frac{q^{n+1} - q^n}{d} = k_n \in \mathbb{N}.$$

Speciálně pro $n = 0$ máme $q - 1 = k_0 d$, odkud plyne $k_n = q^n(q-1)/d = k_0 q^n$. Z dosazení $n = 1$ vidíme, že q je nutně kladné racionální číslo.

Zapišme q ve tvaru a/b, kde a, b jsou přirozená nesoudělná čísla, a pro spor předpokládejme, že $b > 1$. Potom jistě existuje přirozené t takové, že $b^t > k_0$. Pro toto t však číslo $k_t = k_0 a^t / b^t$ není přirozené a to je kýžený spor.

Zbývá ukázat, že všechny kvocienty $q \in \mathbb{N}$ Lenka získat mohla. Pokud dostala posloupnost $1, 2, 3, \ldots$, škrtnutím všech čísel kromě mocnin přirozeného čísla $q \geq 2$ získala geometrickou posloupnost s kvocientem $q \geq 2$. Případ $q = 1$ jsme již diskutovali.

8. úloha

Určete počet všech posloupností reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takových, že pro všechna přirozená čísla m, n platí $a_m \cdot a_n = a_{m \cdot n}$ a zároveň $a_n = a_{n+2011}$. *(Mirek Olšák)*

Nejprve ukážeme, že prvky posloupnosti mohou být pouze čísla -1, 0, 1. Z první zadané podmínky pro $n, k \in \mathbb{N}$ triviální indukcí dostáváme $a_{(n^k)} = (a_n)^k$. Kdyby pro nějaké pevné $n > 1$ platilo $a_n \notin \{-1, 0, 1\}$, pak by posloupnost $(a_n)^k$ nabývala nekonečně mnoha různých hodnot, což kvůli periodicitě nelze. Zbývá doplnit, že $a_1 = a_{2012} \in \{-1, 0, 1\}$ také.

Označme nyní $p = 2011$, poznamenejme, že se jedná o prvočíslo, a nadále pracujme modulo p. Vezměme prvek[4] $\varphi \in \mathbb{Z}_p$[5] takový, že $\{\varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{p-1}\} = \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Pro každé $n \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ tak existuje exponent $r \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ takový, že $n \equiv \varphi^r$, takže

$$a_n = a_{(\varphi^r)} = (a_\varphi)^r.$$

Hodnoty posloupnosti na všech pozicích až na násobky p jsou tím pádem jednoznačně určeny hodnotou a_φ. Navíc pro libovolná dvě čísla m, n taková, že $m \equiv \varphi^r$ a $n \equiv \varphi^s$, platí $m \cdot n \equiv \varphi^{r+s}$, a proto i

$$a_m \cdot a_n = (a_\varphi)^r \cdot (a_\varphi)^s = (a_\varphi)^{r+s} = a_{(\varphi^{r+s})} = a_{m \cdot n},$$

čímž jsme mimo násobky p kromě periodicity zaručili i multiplikativitu. Zbývá tedy určit hodnotu a_0 a zajistit, aby pro každé n bylo $a_0 \cdot a_n = a_{(0 \cdot n)} = a_0$. Rozeberme tři případy.

(i) $a_\varphi = 0$: Pak $a_0 = a_{(0 \cdot \varphi)} = a_0 \cdot a_\varphi = 0$, čímž získáme vyhovující posloupnost ze samých nul.

(ii) $a_\varphi = 1$: Pokud by $a_0 = -1$, pak by $1 = a_0 \cdot a_0 = a_{0 \cdot 0} = -1$, což nelze. Naopak pro $a_0 \in \{0, 1\}$ vyjdou postupně dvě vyhovující posloupnosti.

(iii) $a_\varphi = -1$: Platí $a_0 = a_0 \cdot a_\varphi = -a_0$, tedy $a_0 = 0$. Vzniklá posloupnost opět vyhovuje, neboť pro každé n platí $a_0 \cdot a_n = 0 = a_{(0 \cdot n)}$.

Existují čtyři takové posloupnosti.

[4] Takový prvek se nazývá *primitivní prvek modulo p* a při počítání modulo prvočíslo vždy existuje.

[5] $\mathbb{Z}_p$ je množina zbytků při dělení p vybavená operacemi modulo p.