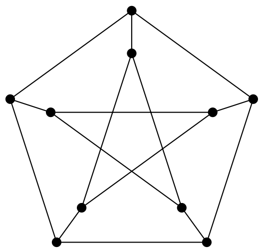
Povídání k první jarní sérii

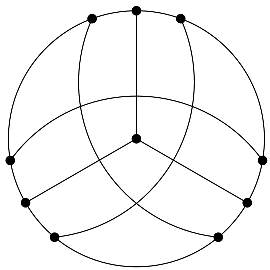
Dostává se ti do rukou zadání série s poněkud společenským názvem Večírky. Na první pohled je vidět, že se to tam hemží nějakými účastníky večírků a různými vztahy mezi nimi. V tomto textu si krátce povíme, jak takovéto situace popsat formálněji s větší či menší dávkou abstrakce.

Hned na úvod si všimněme, že vztahy mezi účastníky jsou dvojího druhu: symetrické a nesymetrické. Mezi symetrické patří například vztah „znát se“, „kamarádit“, „pozdravit se“, mezi nesymetrické pak zařadíme třeba „pozvat na skleničku“, „porazit v pokeru“ atp. Formálně tyto vztahy nazýváme relacemi, symetrie pak přesně říká, že je-li a v relaci s b, pak nutně i b je v relaci s a. Všimni si, že příklady takovýchto relací (třeba na reálných číslech) již znáš. Uvážíme-li relaci rovnost „$=$“ reálných čísel, máme příklad relace symetrické. Naproti tomu ostrá nerovnost „$<$“ zřejmě symetrická není.

Nyní se okamžitě nabízí otázka, jak různé situace na večírku znázornit. Nejjednodušší variantou je, zdá se, vzít papír a za každého účastníka si namalovat puntík. Pro vyjádření skutečnosti, že dva účastníci jsou v nějakém vztahu, je spojíme čárou, jedná-li se o relaci symetrickou. V opačném případě mezi ně nakreslíme šipku s vhodnou orientací. Může nastat i situace s oboustrannou šipkou. Pokud si toho situace žádá, lze jednotlivé puntíky pojmenovat, často nás však zajímá pouze vzniklá struktura.

Příkladem takového nakreslení mohou být třeba tyto obrázky. Všimni si, že nakreslení obecně nejsou jednoznačná, tedy stejnou situaci lze vystihnout různými obrázky. Zkus si rozmyslet, že oba tyto zdánlivě nepodobné nákresy popisují tutéž strukturu večírku.[1]





Takto namalovaným obrázkům budeme říkat *grafy*, podle druhu spojnic pak rozlišujeme grafy *orientované* a *neorientované*. Puntíky pojmenujeme *vrcholy*, spojnicím budeme říkat *hrany*. Hrana může mít charakterizující přívlastek orientovaná, nebo neorientovaná.

Řečeno formálně, grafem nazveme dvojici (V, E), kde V je konečná množina[2] vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$. Symbolem $\binom{V}{2}$ myslíme množinu dvouprvkových množin $\{v_1, v_2\}$, kde $v_1, v_2 \in V$. Orientovaným grafem pak nazveme dvojici (V, E), kde V jsou vrcholy a $E \subseteq V \times V$ v tomto případě značí množinu nějakých uspořádaných dvojic z V.

Nyní si již snadno rozmyslíš, že leckterá tvrzení o večírku můžeme převést na tvrzení o grafu a někdy i naopak. Abychom se o grafech mohli snáze vyjadřovat, zavedeme si do našeho slovníčku nové pojmy.

---

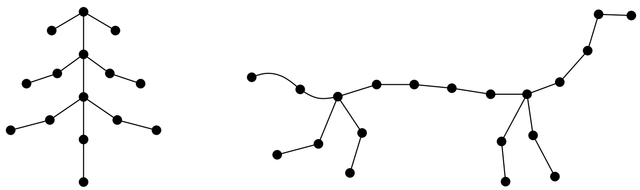
[1] Zkus si nějak očíslovat puntíky u prvního obrázku a podle něj očíslovat i body v druhém obrázku tak, aby čísla v levém obrázku byla spojena čarou právě tehdy, když jsou spojena i v obrázku pravém.

[2] Všechny množiny, se kterými pracujeme, budou konečné, i když to není předem řečeno. Nekonečnými grafy se zabývat nebudeme.

Stupněm vrcholu nazveme počet hran, které jej obsahují, neboli počet čar, které vedou z daného vrcholu. Stupeň $v \in V$ značíme $\deg(v)$. *Tah* v grafu je posloupnost $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t)$, kde $v_1, \ldots, v_t$ jsou vrcholy z V a pro každé $i \in \{1, \ldots t\}$ je $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E$. V tahu se navíc žádná z hran nesmí opakovat. Přidáme-li požadavek, že i vrcholy $v_1, \ldots v_t$ musí být navzájem různé, obdržíme definici pojmu *cesta* v grafu. *Kružnicí* nazveme uzavřenou cestu, tj. cestu takovou, že $a_t = a_0$.

Řekneme, že graf je *souvislý*, pokud mezi každými dvěma jeho vrcholy u, v existuje cesta z u do v. Pokud není souvislý, uvažujme jeho „maximální souvislé podčásti“. Takto obšírně jsme zadefinovali *komponentu souvislosti* grafu. Zřejmě je tedy graf souvislý, pokud obsahuje právě jednu komponentu.

Graf bez kružnic nazveme *les*, souvislý les přirozeně pojmenujeme *strom*, *listem* pak máme na mysli vrchol stupně jedna. Příklady stromů můžeme namalovat třeba takto.



Mezi důležité grafy patří tzv. *úplné grafy*. Jedná se o maximální grafy na n vrcholech, tedy takové, že každý vrchol je spojen se všemi ostatními. Značíme je K_n. Je-li takovýto graf podgrafem v jiném grafu, říkáme mu též *klika* velikosti n.

Před samotným závěrem si ještě ukážeme na jednoduchém příkladě, jak grafové úlohy správně řešit.

Příklad. Ukažte, že počet účastníků, kteří znají na večírku lichý počet lidí, je sudý.

Řešení. Označme si účastníky večírku (s prominutím) jako vrcholy, hranu zvolíme mezi těmi, kteří se navzájem znají. Chceme tedy ukázat, že v každém takovémto grafu (V, E) je počet vrcholů lichého stupně sudé číslo.

Pokusme se spočítat součet stupňů všech vrcholů v našem grafu. Stupeň vrcholu udává počet hran jej obsahujících a my víme, že každá hrana obsahuje právě dva vrcholy. Součet stupňů je tedy roven $2|E|$.[3] Kdyby však byl počet vrcholů lichého stupně lichý, jejich součet by byl liché číslo, což je spor se sudostí čísla $2|E|$ a jsme hotovi.

Tomuto faktu se někdy říká *princip sudosti* a můžeš jej bez obav ve svých řešeních používat bez důkazu.

[3] Symbolem $|M|$ zde označujeme počet prvků množiny M.

1. jarní série

Téma: Večírky

Datum odeslání: 14. února 2011

1. úloha (3 body)

Sourozenci Pepa a Helča slavili narozeniny. Na oslavě dostal každý z nich sáček sladkostí – Pepův obsahoval 30 bonbonů, Helčin 20. Oběma to ale přišlo nefér, tak se rozhodli, že něco zkusí. Dají si oba po jednom bonbonu, své zbylé bonbony rozdělí na dvě části lišící se velikostí nejvýše o jeden bonbon a jednu z nich (pokud budou různě velké, tak tu menší) vymění se sourozencem. Pak zase oba jeden bonbon snědí, zbylé rozdělí, vymění a tak dále. Je toto dělení férovější?

2. úloha (3 body)

Na párty se sešlo 100 lidí, přičemž každý z nich zná[4] právě 50 dalších. Dokažte, že je na večírku přítomna čtveřice lidí taková, že první i druhý z nich zná třetího i čtvrtého.

3. úloha (3 body)

Hned z kraje večírku se pochopitelně musí všichni se všemi pozdravit. Etiketa vyžaduje, aby pánové zdravili dámy políbením ruky. Dámy samotné se mezi sebou na pozdrav vřele objímají, pánové si třesou pravicí. Určete, kolik při zdravení celkem padlo polibků na ruku, pokud víte, že potřesení proběhlo o osm více než objetí.

4. úloha (5 bodů)

Když ruch na večírku trochu ustal, dostali hosté chuť zahrát si nějaké deskovky. Protože jich však bylo moc na to, aby hráli všichni jednu hru, museli se rozdělit do skupinek. Vejtek se ujal organizace a po chvilce se mu podařilo vybrat n kapitánů, kteří se navzájem neznali[4] a ani neměli společné známé tak, že když každý kapitán vytvořil skupinku ze všech svých známých, nezbyl žádný host na ocet. Mohl Vejtek dosáhnout tohoto stavu i volbou jiného počtu kapitánů?

5. úloha (5 bodů)

Během jiné hry dostal každý z jejích účastníků tři jednobarevné nafukovací balónky. Víme, že nikdo nedostal dva balónky stejné barvy a že každí dva účastníci dostali nejvýše jeden balónek společné barvy. Kolik nejvíce lidí se mohlo hry zúčastnit, pokud byly použity balónky osmi různých barev?

6. úloha (5 bodů)

Každé správné přátelství je na večírku nutné stvrdit pozváním na skleničku. Co však dělat, když mají účastníci hluboko do kapsy? Pomozte jim a dokažte, že se mohou zvát tak, aby každá dvojice přátel zašla na skleničku právě jednou a přitom aby pro každého člověka platilo, že počet lidí, které pozval, se bude lišit nejvýše o jedna od počtu lidí, kteří pozvali jeho.

7. úloha (5 bodů)

Na Alčině večírku se sešla velmi zajímavá společnost. Posuďte sami:

(i) každý na večírku zná[4] právě 22 lidí,

[4] Předpokládáme, že „znát se“ je symetrické, tedy pokud člověk A zná člověka B, tak už také člověk B zná člověka A. Sám sebe však nikdo „nezná“.

(ii) pokud se dva lidé znají, nemají na večírku žádné společné známé,
(iii) pokud se dva lidé neznají, pak mají na večírku právě šest společných známých.

Určete, kolik lidí bylo na večírku.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

O večírku řekneme, že je *vydařený*, pokud platí následující podmínka: kdykoliv z hostů na večírku vybereme libovolnou skupinu lidí, jsme schopni tyto lidi rozmístit do několika místností tak, že v každé místnosti jsou pouze lidé, kteří se navzájem vůbec neznají[4], a přitom může každá místnost vyslat jednoho zástupce tak, že se všichni tito zástupci navzájem znají. Dokažte, že večírek zůstane vydařený i po tom, co si některý z účastníků přivede kamaráda (který předtím neznal na večírku nikoho jiného) a seznámí ho se všemi svými známými.

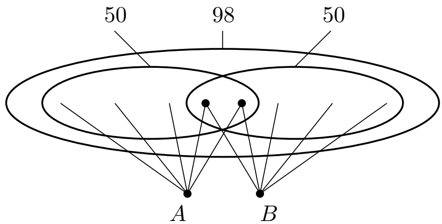
Řešení 1. jarní série

1. úloha
Sourozenci Pepa a Helča slavili narozeniny. Na oslavě dostal každý z nich sáček sladkostí – Pepův obsahoval 30 bonbonů, Helčin 20. Oběma to ale přišlo nefér, tak se rozhodli, že něco zkusí. Dají si oba po jednom bonbonu, své zbylé bonbony rozdělí na dvě části lišící se velikostí nejvýše o jeden bonbon a jednu z nich (pokud budou různě velké, tak tu menší) vymění se sourozencem. Pak zase oba jeden bonbon snědí, zbylé rozdělí, vymění a tak dále. Je toto dělení férovější? *(Pepa Tkadlec)*

Poté, co snědí jeden bonbon, rozdělí Pepa svou hromádku na $15 + 14$ a Helča na $10 + 9$ bonbonů. Menší hromádku si vymění a mají tak každý 24 bonbonů. Nyní je jasné, že v dalších krocích budou vyměňovat vždy stejně velké hromádky. Ve výsledku snědí stejný počet bonbonů, tudíž jejich systém je férovější.

2. úloha
Na párty se sešlo 100 lidí, přičemž každý z nich zná[5] právě 50 dalších. Dokažte, že je na večírku přítomna čtveřice lidí taková, že první i druhý z nich zná třetího i čtvrtého. *(Alča Skálová)*

Zvoľme si ľubovoľného hosťa večierku (označme ho A) a vyberme opäť náhodne jedného z ľudí, s ktorými sa nepozná (tých je práve 49) ako B. Ostane nám 98 návštevníkov, medzi ktorými je 50 známych A a 50 známych B. Vždy teda bude spoločných známych aspoň $50 + 50 - 98 = 2$. Ľubovoľní dvaja z nich potom spolu s A a B vytvárajú hľadanú štvoricu zo zadania.



3. úloha
Hned z kraje večírku se pochopitelně musí všichni se všemi pozdravit. Etiketa vyžaduje, aby pánové zdravili dámy políbením ruky. Dámy samotné se mezi sebou na pozdrav vřele objímají, pánové si třesou pravicí. Určete, kolik při zdravení celkem padlo polibků na ruku, pokud víte, že potřesení proběhlo o osm více než objetí. *(Pepa Tkadlec)*

Označme počet pánů p a počet dam d. Potřesení pravicí resp. vřelých objetí proběhlo $\frac{1}{2}p(p-1)$ resp. $\frac{1}{2}d(d-1)$. Ze zadání víme, že

$$\frac{1}{2}p(p-1) = \frac{1}{2}d(d-1) + 8,$$

[5] Předpokládáme, že „znát se“ je symetrické, tedy pokud člověk A zná člověka B, tak už také člověk B zná člověka A. Sám sebe však nikdo „nezná“.

takže pánů je více než dam. Vynásobením obou stran vztahu dvojkou, převedením neznámých na jednu stranu a vytknutím dostáváme

$$(p-d)(p+d-1)=16.$$

Čísla p a d jsou celá, takže i obě závorky jsou celočíselné. Navíc mají závorky různou paritu (liší se o $2d+1$), takže jedna z nich se musí rovnat jedné a druhá šestnácti (rozklad $16=(-1)\cdot(-16)$ je vyloučen tím, že první závorka je kladná). V úvahu tak připadají jen dvě možnosti: $p-d=1$, $p+d-1=16$ a $p-d=16$, $p+d-1=1$. Pouze první z nich dá přirozené řešení: $p=9$, $d=8$. Počet polibků pd je proto roven 72.

4. úloha

Když ruch na večírku trochu ustal, dostali hosté chuť zahrát si nějaké deskovky. Protože jich však bylo moc na to, aby hráli všichni jednu hru, museli se rozdělit do skupinek. Vejtek se ujal organizace a po chvilce se mu podařilo vybrat n kapitánů, kteří se navzájem neznali[5] a ani neměli společné známé tak, že když každý kapitán vytvořil skupinku ze všech svých známých, nezbyl žádný host na ocet. Mohl Vejtek dosáhnout tohoto stavu i volbou jiného počtu kapitánů?

(Vít „Vejtek“ Musil)

Ukážeme, že volbou jiného počtu kapitánů tohoto stavu dosáhnout nelze. Označme počty kapitánů v prvním výběru k a v druhém l. Pro spor předpokládejme, že $k \neq l$ a obě tato rozdělení splňují zadání. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $k < l$, protože jinak můžeme pořadí výběrů zaměnit.

Jelikož v druhém výběru je kapitánů více než v prvním, existují podle Dirichletova principu dva kapitáni, kteří byli v prvním výběru členy téže skupinky; označme ji S. To je však spor, neboť takoví kapitáni se buď přímo znají (pokud byl jeden z nich v S kapitánem), nebo mají společného známého (kapitána S). Obě možnosti zadání vylučuje.

5. úloha

Během jiné hry dostal každý z jejích účastníků tři jednobarevné nafukovací balónky. Víme, že nikdo nedostal dva balónky stejné barvy a že každí dva účastníci dostali nejvýše jeden balónek společné barvy. Kolik nejvíce lidí se mohlo hry zúčastnit, pokud byly použity balónky osmi různých barev?

(Lenka Slavíková)

Připusťme, že existují čtyři účastníci, kteří dostali balonek téže barvy. Pak žádný z jejich dalších balonků nesmí mít tuto barvu a navíc žádné dva z nich nesmí mít stejnou barvu. Je tedy potřeba aspoň osm dalších (tedy celkem devět) barev, což je ve sporu se zadáním.

Balonky každé barvy tak mají nejvýše tři účastníci. Barev je osm, takže se hrálo s nejvýše 24 balonky. Protože měl každý účastník tři balonky, bylo lidí účastnících se hry nejvýše osm.

Zbývá dokázat, že osmi lidem lze takto balonky opravdu rozdat. Pokud si barvy označíme čísly 1 až 8, mohou trojice balonků vypadat například takto: 124, 235, 346, 457, 568, 671, 782, 813.

6. úloha

Každé správné přátelství je na večírku nutné stvrdit pozváním na skleničku. Co však dělat, když mají účastníci hluboko do kapsy? Pomozte jim a dokažte, že se mohou zvát tak, aby každá dvojice přátel zašla na skleničku právě jednou a přitom aby pro každého člověka platilo, že počet lidí, které pozval, se bude lišit nejvýše o jedna od počtu lidí, kteří pozvali jeho. *(Alexander „Olin“ Slávik)*

Celou situaci namodelujeme neorientovaným grafem, jehož vrcholy budou reprezentovat účastníky večírku a jehož dva vrcholy budou spojeny hranou právě tehdy, když jsou tito dva účastníci přátelé. Pozvání na skleničku budou naopak reprezentovat orientované hrany – hrana z x do y bude znamenat, že x pozval y na skleničku.

Řekneme, že graf je *vyvážitelný*, pokud existuje nějaká jeho *dobrá* orientace[6], tj. taková, ve které pro každý vrchol bude platit, že počet orientovaných hran, které z něj vedou (označíme $\deg^-$), se liší nejvýše o jedna od počtu hran, které vedou z tohoto vrcholu (ten označíme $\deg^+$). Naším úkolem je ukázat, že každý graf je vyvážitelný.

Mějme libovolný graf G. Uvažme nejprve situaci, kdy se v grafu nachází nějaká kružnice K, označme její vrcholy po řadě $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Všimněme si nyní, že pokud bude vyvážitelný graf G', který vznikne tak, že z G odstraníme všechny hrany kružnice K, bude vyvážitelný i G: uvážíme-li totiž nějakou dobrou orientaci grafu G' a do té přidáme orientované hrany $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_r, x_1)$, dostaneme dobrou orientaci G. Vrcholům mimo K se totiž $\deg^+$ ani $\deg^-$ nezmění, oproti tomu vrcholům na K se oba stupně zvýší o 1.

Kružnici K (přesně řečeno její hrany) tedy můžeme z grafu odstranit a zabývat se pouze grafem G'. Pokud je v G' nějaká kružnice, můžeme ji opět odstranit a zkoumat vzniklý graf – takto můžeme pokračovat, dokud jsou v grafu nějaké kružnice. Po odstranění všech kružnic dostaneme les. Je jasné, že stačí zvlášť zorientovat každou jeho komponentu souvislosti, pokud tedy dokážeme, že všechny stromy jsou vyvážitelné, máme vyhráno.

Vyvážitelnost stromů dokážeme např. indukcí podle počtu vrcholů stromu: strom s jedním vrcholem je zřejmě vyvážitelný, jelikož nemá žádné hrany. Buď T nyní strom s n vrcholy a předpokládejme, že všechny stromy s méně než n vrcholy jsou vyvážitelné. Buď v libovolný vrchol[7] T a $y_1, y_2, \ldots, y_s$ vrcholy spojené hranou s v. Po odebrání v se T díky acykličnosti rozpadne na s komponent, přičemž každá z nich bude strom a každá bude obsahovat právě jeden vrchol y_i. Protože všechny vzniklé stromy mají méně než n vrcholů, jsou vyvážitelné, uvažme tedy nějaké jejich dobré orientace. Můžeme navíc předpokládat, že platí $\deg^+(y_i) \leq \deg^-(y_i)$ pro $1 \leq i \leq \frac{s}{2}$ a $\deg^+(y_i) \geq \deg^-(y_i)$ pro $\frac{s}{2} < i \leq s$ – pokud totiž v jakékoliv dobré orientaci grafu všechny hrany „otočíme“, dostaneme opět dobrou orientaci. Jestliže nyní do grafu vrátíme v a připojíme ho orientovanými hranami (v, y_i) pro $1 \leq i \leq \frac{s}{2}$ a (y_i, v) pro $\frac{s}{2} < i \leq s$, dostaneme požadovanou dobrou orientaci T. T je tedy vyvážitelný a tvrzení je dokázáno.

7. úloha

Na Alčině večírku se sešla velmi zajímavá společnost. Posuďte sami:

(i) každý na večírku zná[7] právě 22 lidí,

(ii) pokud se dva lidé znají, nemají na večírku žádné společné známé,

(iii) pokud se dva lidé neznají, pak mají na večírku právě šest společných známých.

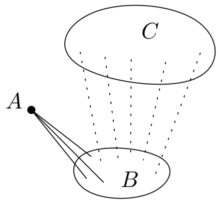
Určete, kolik lidí bylo na večírku. *(Alča Skálová)*

Označme n počet účastníků večírku, $n \geq 1$[8] a zaměřme se na jednoho z nich, například na Alču. Z podmínky (i) má Alča právě 22 známých. Označme si je jako množinu B. Jako množinu C označme zbylých $n - 23$ lidí (jsou to právě ti, které Alča nezná).

[6]Tedy orientovaný graf, který vznikne nahrazením všech neorientovaných hran původního grafu orientovanými.

[7]Důkaz by byl jednodušší, pokud by se za v vzal list. V úvodním textu k sérii však nebylo tvrzení, že každý strom s alespoň dvěma vrcholy má list, a tak postupujeme trochu složitěji.

[8]Podmínkám (i) až (iii) by samozřejmě vyhovoval i prázdný večírek, ale my se můžeme odvolat na to, že ze zadání je zřejmé, že se večírek konal, tedy na něm byl alespoň někdo.



Nyní dvěma způsoby vyjádříme počet „známostí“ vedoucích mezi skupinami B a C.

Každý z B má kromě Alči dalších 21 známých a to pouze v množině C (kdyby měl nějakého známého z B, porušili bychom podmínku (ii), protože by oba znali Alču), tedy mezi množinami B a C vede právě $22 \cdot 21$ „známostí“.

Na druhou stranu, nikdo z C Alču nezná, takže podle (iii) s ní musí mít právě 6 společných známých, tedy každý z C zná právě 6 lidí z B. Tudíž počet „známostí“ mezi C a B lze vyjádřit i jako $6 \cdot (n - 23)$.

Dostáváme rovnici

$$22 \cdot 21 = (n - 23) \cdot 6,$$

jejímž jediným řešením je $n = 100$.

Na Alčině večírku se sešlo sto lidí.

8. úloha

O večírku řekneme, že je *vydařený*, pokud platí následující podmínka: kdykoliv z hostů na večírku vybereme libovolnou skupinu lidí, jsme schopni tyto lidi rozmístit do několika místností tak, že v každé místnosti jsou pouze lidé, kteří se navzájem vůbec neznají[8], a přitom může každá místnost vyslat jednoho zástupce tak, že se všichni tito zástupci navzájem znají. Dokažte, že večírek zůstane vydařený i po tom, co si některý z účastníků přivede kamaráda (který předtím neznal na večírku nikoho jiného) a seznámí ho se všemi svými známými. *(Pepa Tkadlec)*

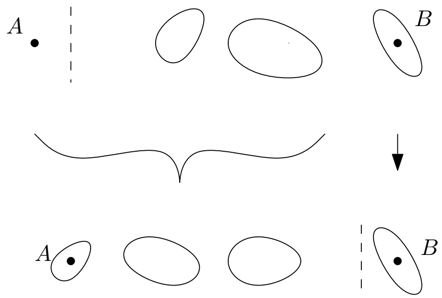
Označme A člověka, který si přivedl kamaráda, a B tohoto jeho kamaráda. Chceme dokázat, že každou skupinu lidí lze požadovaným způsobem rozdělit do místností. Pro skupiny bez B to platí díky vydařenosti původního večírku. Stejně tak to platí pro skupiny, kde je B ale nikoliv A, neboť B a A jsou z hlediska známostí zaměnitelní.

Zbývá tedy korektně rozdělit skupiny, ve kterých se nacházejí současně A i B. Uvažme nějakou takovou skupinu S.

Rozdělíme nejprve do místností skupinu S bez člověka A (to umíme). Pak dáme stranou celou místnost s člověkem B a zbytek i s člověkem A opět rozdělíme do (ne nutně stejného počtu) místností. Tvrdíme, že přidáme-li k tomuto rozdělení místnost, kterou jsme dali stranou, korektnost rozdělení se zachová. Rozlišíme dvě možnosti.

Je-li A ve své místnosti zástupcem, pak jsou zástupci všech ostatních místností známí A a z místnosti, kterou jsme dali stranou, tak můžeme jako zástupce vyslat B.

Pokud A zástupcem není, ukážeme, že celkový počet místností (včetně té s B) je stejný jako při původním rozdělení bez člověka A a že je možné použít ty samé zástupce jako tehdy.



Uvažujme všechny lidi z S kromě člověka A a těch, kteří jsou v místnosti s B. Tato podskupina byla rozdělena do místností dvěma korektními způsoby – nejprve při rozdělování všech bez A a následně při rozdělování A a zbytku místností (odebrání nezástupce A zachová korektnost rozdělení). Pokud by nebyl počet místností v obou rozděleních stejný, museli by být podle Dirichletova principu dva zástupci z většího rozdělení při menším rozdělení v jedné místnosti. To je ale spor, protože v jedné místnosti nemohou být dva, co se znají.

Protože se zástupci z původního rozdělení znají, musejí být při novém rozdělení v různých místnostech. Jelikož je místností stejně, je v každé právě jeden a my je můžeme použít i v novém rozdělení.

V obou případech jsme ve zmíněném rozdělení nalezli vhodné zástupce a jsme hotovi.