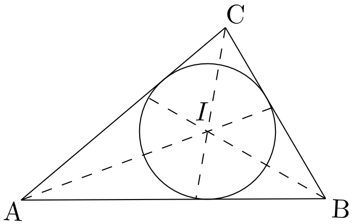
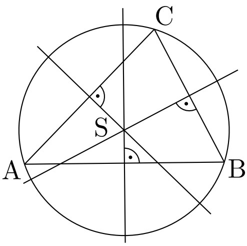
Povídání ke 3. podzimní sérii

Třetí série je věnována kružnicím. Každý ví, jak taková kružnice vypadá – je to množina bodů se stejnou vzdáleností r od nějakého středu S. Kružnice však mají i další vlastnosti, které už zdaleka tak zřejmé být nemusí. Všechny dále uvedené věty smíš v řešeních používat bez důkazu.

Věta. (Kružnice trojúhelníku vepsaná) Střed kružnice trojúhelníku vepsané leží v průsečíku os úhlů při jeho vrcholech. Pro poloměr této kružnice platí $r = \frac{2S}{a+b+c}$, kde S je obsah trojúhelníka a a, b, c délky jeho stran.

Věta. (Kružnice trojúhelníku opsaná) Střed kružnice trojúhelníku opsané leží v průsečíku os jeho stran. Pro poloměr této kružnice platí $R = \frac{abc}{4S}$.



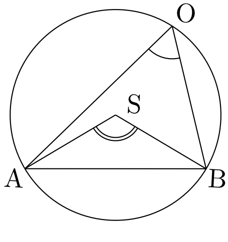


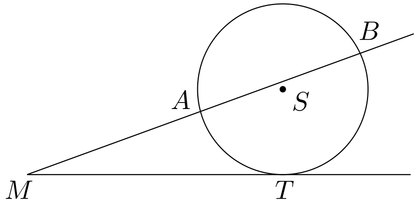
O kružnicích lze vyslovit i další zajímavá tvrzení, z nichž ta nejdůležitější si zde bez důkazu uvedeme. Pokud tě geometrie zajímá, můžeš další informace najít (krom chytrých knížek, jako jsou třeba ty z edice Škola mladých matematiků) v našem webovém archivu a knihovničce se staršími matematickými texty na `http://mks.mff.cuni.cz/archive/archive.php` a `http://mks.mff.cuni.cz/library/library.php`.

Věta. (O obvodovém a středovém úhlu) Nechť k je kružnice se středem S a AB její tětiva. Pak velikost úhlu $\sphericalangle AOB$ se nemění, probíhá-li O některý z oblouků kružnice k určených tětivou AB. Navíc je $|\sphericalangle AOB| = \frac{1}{2}\,|\sphericalangle ASB|$, kde úhlem $\sphericalangle ASB$ rozumíme vnější úhel ve čtyřúhelníku $AOBS$.

Poznámka. Z předchozí věty plyne, že stejně dlouhým tětivám odpovídají stejně velké obvodové úhly. Platí dokonce i opačná implikace: Pokud jsou úhly příslušné dvěma tětivám téže kružnice stejně velké, jsou tyto tětivy stejně dlouhé.

Věta. (Mocnost bodu ke kružnici) Nechť k je kružnice se středem S a M bod. Nechť přímka p prochází bodem M a protíná k v bodech A a B. Pak číslo $|MA|\cdot|MB|$ nezávisí na volbě přímky p a je rovno hodnotě $\left|m^2 - r^2\right|$, kde $m = |MS|$ a r je poloměr k. Číslo $m^2 - r^2$ se nazývá mocnost bodu M ke kružnici k. Speciálně pokud M leží vně kružnice a MT je tečna ke k s bodem dotyku T, pak je mocnost rovna i hodnotě $|MT|^2$.





Definice. Čtyřúhelníku $ABCD$ budeme říkat *tětivový*, pokud body A, B, C, D leží všechny na společné kružnici.

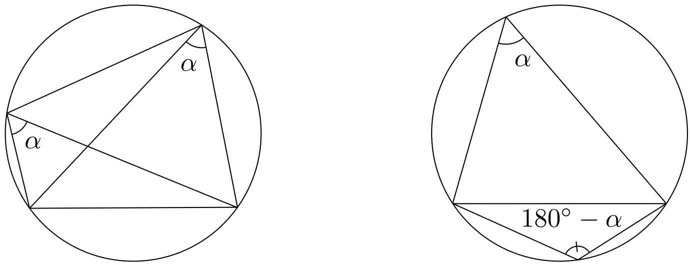
Tětivové čtyřúhelníky mají mnoho zajímavých vlastností, z nichž aspoň tři si zformulujeme:

(i) Úhel svíraný jednou stranou a úhlopříčkou je rovný úhlu svíranému protilehlou stranou a druhou úhlopříčkou.

(ii) Součet úhlů při protilehlých vrcholech je 180 stupňů.

(iii) Pro průsečík M přímek AB a CD (pokud existuje) platí $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$.

Přitom libovolná z těchto podmínek stačí na to, aby čtyřúhelník už tětivový být musel.



3. podzimní série

Téma: Kružnice

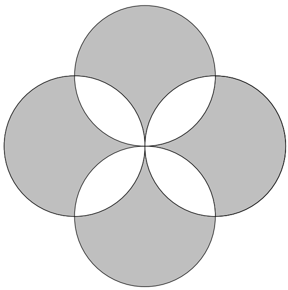
Datum odeslání: 6. prosince 2010

1. úloha (3 body)

To takhle Pepa jednou nad průměrem AB nakreslil červenou půlkružnici. Pak přišel Šavlík, průměr AB rozdělil na 5 stejných dílů a nad každým z nich nakreslil půlkružnici modrou. Co je teď delší – červená čára, nebo všechny modré dohromady?

2. úloha (3 body)

Mišo tvrdí Monče, že čtyři shodné šedé útvary z následujícího obrázku lze rozřezat na několik částí tak, aby jejich přeskládáním vznikl jeden velký čtverec. Monča tomu ale ani za mák nevěří. Přesvědčte ji, že to skutečně možné je.[1]



3. úloha (3 body)

Kdesi uvnitř obdélníka $ABCD$ s průsečíkem úhlopříček O je dán bod P. Kružnice opsané trojúhelníkům ABP a CDP se podruhé protnou v bodě Q. Podobně kružnice opsané trojúhelníkům BCP a DAP se podruhé protnou v bodě S. Ukažte, že když ještě označíme R obraz bodu P ve středové souměrnosti podle O, bude čtyřúhelník $PQRS$ obdélníkem.

4. úloha (5 bodů)

Na kružnici opsané ostroúhlému trojúhelníku ABC označíme $\check{S}$ střed kratšího oblouku AB. Dále nalezneme bod P takový, že $|\sphericalangle B\check{S}P| = |\sphericalangle ACB|$, a navíc je trojúhelník $B\check{S}P$ rovnoramenný se základnou BP. Dokažte, že přímka BP je kolmá na osu úhlu $AP\check{S}$.

5. úloha (5 bodů)

Vojta sestrojil konvexní čtyřúhelník $KECY$ a nad každou jeho stranou jeden kruh, který měl tuto stranu za průměr. Ukažte, že tyto kruhy pokrývají celý čtyřúhelník $KECY$.

6. úloha (5 bodů)

Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Na jeho ramenech AC, BC zvolíme po řadě body X, Y tak, aby platilo $|AX| = |CY|$. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku CXY prochází středem kružnice opsané trojúhelníku ABC.

[1] Výsledný čtverec nesmí mít díry, všechny části se musí použít a žádné dvě se nesmí překrývat.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

V ostroúhlém trojúhelníku ABC ($|AC| \neq |BC|$) označme písmeny D, E paty kolmic vedených z bodů A, B na osu úhlu u vrcholu C. Označme dále M střed strany AB a C_0 patu výšky z bodu C na stranu AB. Ukažte, že body D, E, M a C_0 leží na jedné kružnici.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Uvnitř kružnice m jsou dány kružnice k, l, které mají s m vnitřní dotyk v bodech K, resp. L a samy se protínají v bodech A, B. Označme X libovolný průsečík přímky AB a kružnice m. Přímka XK protne kružnici k podruhé v bodě U. Obdobně přímka XL protne podruhé kružnici l v bodě V. Dokažte, že přímka UV je společnou tečnou kružnic k, l.

Řešení 3. podzimní série

1. úloha

To takhle Pepa jednou nad průměrem AB nakreslil červenou půlkružnici. Pak přišel Šavlík, průměr AB rozdělil na 5 stejných dílů a nad každým z nich nakreslil půlkružnici modrou. Co je teď delší – červená čára, nebo všechny modré dohromady? *(Pepa Tkadlec)*

Označme si $r = |AB|/2$ poloměr červené půlkružnice. Její délka je potom

$$l_c = \frac{2\pi r}{2} = \frac{\pi|AB|}{2}.$$

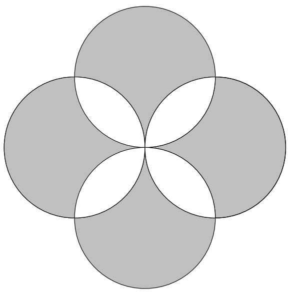
Délka jedné modré půlkružnice je $2\pi r'/2$, kde $r' = r/5 = |AB|/10$. Modrých půlkružnic je pět, celková délka modré čáry se rovná

$$l_m = 5 \cdot \frac{2\pi r'}{2} = 5 \cdot \frac{\pi|AB|}{10} = \frac{\pi|AB|}{2}.$$

Obě čáry jsou tedy stejně dlouhé.

2. úloha

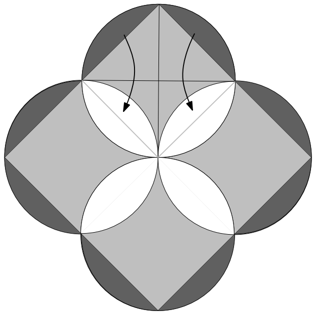
Mišo tvrdí Monče, že čtyři shodné šedé útvary z následujícího obrázku lze rozřezat na několik částí tak, aby jejich přeskládáním vznikl jeden velký čtverec. Monča tomu ale ani za mák nevěří. Přesvědčte ji, že to skutečně možné je.[2]



(Monča Pospíšilová & Miško Szabados)

Způsobů, jak šedé oblasti přeskládat do čtverce, je mnoho. Jeden z nejjednodušších je znázorněn na obrázku. Tmavě šedé kruhové úseče vně čtverce vyplní bílé kruhové úseče uvnitř čtverce.

[2] Výsledný čtverec nesmí mít díry, všechny části se musí použít a žádné dvě se nesmí překrývat.

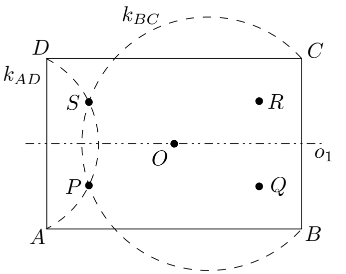


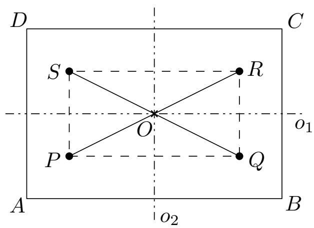
3. úloha

Kdesi uvnitř obdélníka $ABCD$ s průsečíkem úhlopříček O je dán bod P. Kružnice opsané trojúhelníkům ABP a CDP se podruhé protnou v bodě Q. Podobně kružnice opsané trojúhelníkům BCP a DAP se podruhé protnou v bodě S. Ukažte, že když ještě označíme R obraz bodu P ve středové souměrnosti podle O, bude čtyřúhelník $PQRS$ obdélníkem. *(Miško Szabados)*

Označme po rade k_{AD}, k_{BC} kružnice opísané trojuholníkom ADP a BCP. Stred kružnice opísanej leží na osách strán trojuholníka, takže stred k_{AD}, resp. k_{BC} leží na osi úsečky AD, resp. BC. Keďže $ABCD$ je obdĺžnik, tieto osi splývajú v jednu, označme ju o_1.

Samotné kružnice sú tiež osovo symetrické podľa tejto osi. Preto aj ich priesečník S je osovo symetrický s druhým priesečníkom P. Analogicky dokážeme osovú symetriu Q a P podľa spoločnej osi o_2 strán AB a CD.

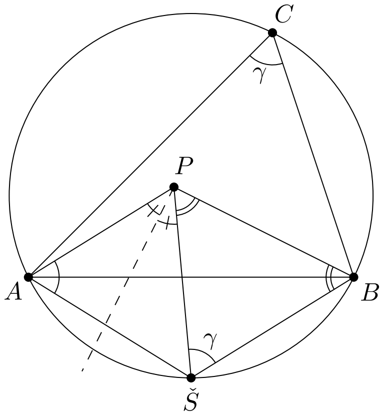




Osi o_1 a o_2 prechádzajú bodom O a sú na seba kolmé. Úsečky PS a PQ sú zase kolmé na ne, takže tiež zvierajú uhol $\sphericalangle SPQ = 90°$. Ďalej zo zadania vieme, že úsečky OP a OR ležia na priamke a sú rovnako dlhé, takže spolu s použitím dokázaných symetrií dostávame $|OR| = |OP| = |OS| = |OQ|$. Pre trojuholníky ΔPQR a ΔPSR teda môžeme použiť Tálesovu vetu a zisťujeme, že sú pravouhlé nad priemerom PR. Tým pádom má $PQRS$ tri pravé uhly a preto je to obdĺžnik.

4. úloha

Na kružnici opsané ostroúhlému trojúhelníku ABC označíme $\check{S}$ střed kratšího oblouku AB. Dále nalezneme bod P takový, že $|\sphericalangle B\check{S}P| = |\sphericalangle ACB|$, a navíc je trojúhelník $B\check{S}P$ rovnoramenný se základnou BP. Dokažte, že přímka BP je kolmá na osu úhlu $AP\check{S}$. *(Vojta Miloš)*



Vzhledem k tomu, že trojúhelník $B\check{S}P$ je rovnoramenný se základnou BP, platí $|B\check{S}| = |P\check{S}|$. Jelikož $\check{S}$ je středem oblouku AB, je rovněž $|B\check{S}| = |A\check{S}|$, a tedy nutně i $|A\check{S}| = |P\check{S}|$, neboli trojúhelník $A\check{S}P$ je rovnoramenný se základnou AP. Nyní už jen dopočítáme úhly v obou trojúhelnících.

Označme $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle B\check{S}P| = \gamma$. Pak z rovnoramennosti trojúhelníka $B\check{S}P$ plyne $|\sphericalangle \check{S}PB| = |\sphericalangle PB\check{S}| = \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle B\check{S}P|) = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. V tětivovém čtyřúhelníku $A\check{S}BC$ je $|\sphericalangle A\check{S}B| = 180^\circ - \gamma$, tedy $|\sphericalangle A\check{S}P| = |\sphericalangle A\check{S}B| - |\sphericalangle B\check{S}P| = 180^\circ - 2\gamma$. Úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka $A\check{S}P$ pak mají velikost $|\sphericalangle PA\check{S}| = |\sphericalangle \check{S}PA| = \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle A\check{S}P|) = \gamma$.

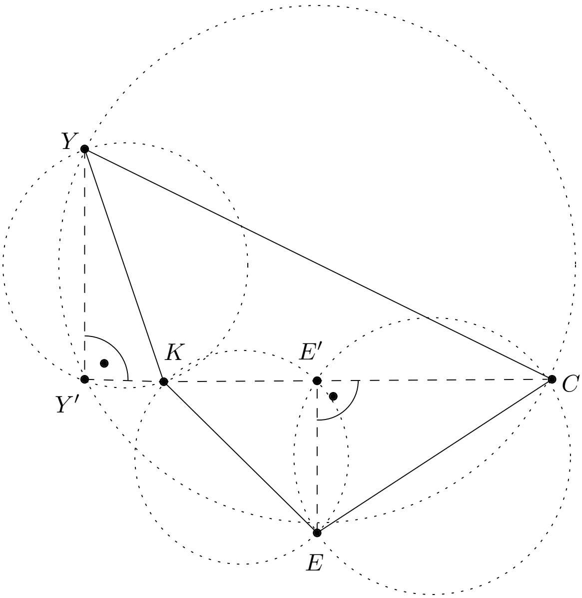
Platí $\frac{|\sphericalangle \check{S}PA|}{2} + |\sphericalangle \check{S}PB| = \frac{\gamma}{2} + \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = 90^\circ$, neboli osa úhlu $\sphericalangle \check{S}PA$ je kolmá na přímku BP, což jsme měli dokázat.

Na závěr patří omluva z naší strany. Zadání totiž nevylučuje ještě druhou polohu bodu P, a to vně kružnice opsané trojúhelníku ABC. Pak by sice body A, $\check{S}$ a P ležely na jedné přímce (dokažte si!), ale i přímý úhel má svoji osu, takže takový bod P podmínky úlohy skutečně splňuje. Tvrzení úlohy pro něj ale neplatí.

5. úloha

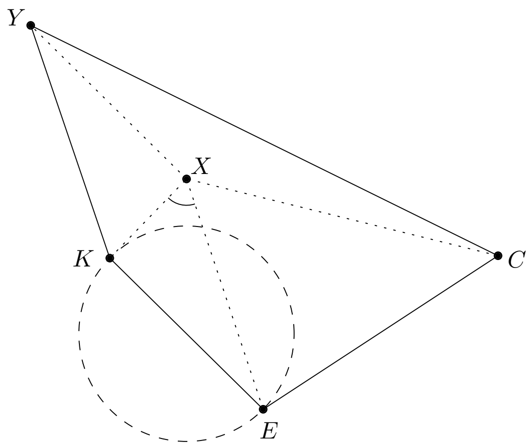
Vojta sestrojil konvexní čtyřúhelník $KECY$ a nad každou jeho stranou jeden kruh, který měl tuto stranu za průměr. Ukažte, že tyto kruhy pokrývají celý čtyřúhelník $KECY$. *(Pepa Tkadlec)*

První řešení:



Z vrcholů E, Y veďme kolmice na úhlopříčku KC. Jejich paty označme postupně E', Y'. Podle Thaletovy věty leží bod E' na kružnicích s průměry KE a EC a bod Y' na kružnicích s průměry CY a YK. Trojúhelníky KEE', $EE'C$, CYY', $YY'K$ jsou díky tomu příslušnými kruhy zcela pokryty. Celý čtyřúhelník $KECY$ je tvořen těmito čtyřmi trojúhelníky (ne nutně všemi a ne nutně celými), a je tedy zcela pokryt kruhy nad jednotlivými stranami.

Druhé řešení:



Pro spor předpokládejme, že existuje bod X, který leží mimo všechny čtyři kruhy, ale uvnitř čtyřúhelníka $KECY$. Pokud leží vně kruhu nad průměrem KE, pak platí $|\sphericalangle KXE| < 90°$. Podobně platí $|\sphericalangle EXC| < 90°$, $|\sphericalangle CXY| < 90°$ a $|\sphericalangle YXK| < 90°$. Jelikož je bod X vnitřním bodem konvexního čtyřúhelníka, dostáváme

$$360° = |\sphericalangle KXE| + |\sphericalangle EXC| + |\sphericalangle CXY| + |\sphericalangle YXK| < 4 \cdot 90° = 360°,$$

což je kýžený spor. Každý bod čtyřúhelníka $KECY$ je tedy pokryt alespoň jedním z kruhů.

6. úloha

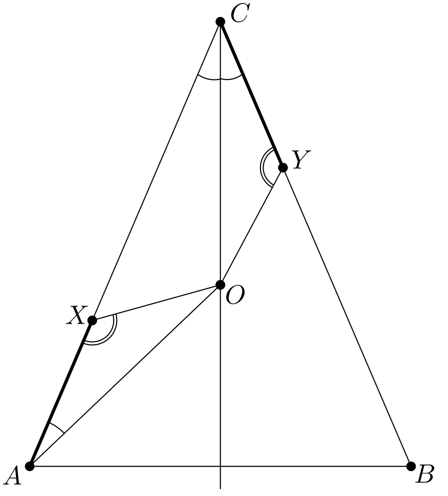
Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Na jeho ramenech AC, BC zvolíme po řadě body X, Y tak, aby platilo $|AX| = |CY|$. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku CXY prochází středem kružnice opsané trojúhelníku ABC. *(Honza Bílek)*

Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Ukážeme, že $|\sphericalangle CXO| + |\sphericalangle CYO| = 180°$, tedy že čtyřúhelník $XOYC$ je tětivový, což znamená přesně to, že O leží na kružnici opsané trojúhelníku XYC.

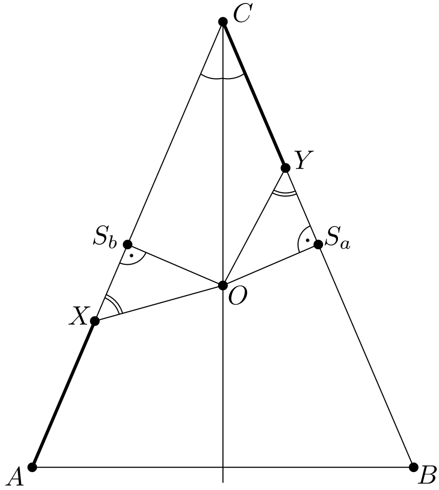
První řešení (obr. 1): Z rovnoramenností trojúhelníků AOC a ACB plyne

$$|\sphericalangle OAC| = |\sphericalangle ACO| = |\sphericalangle OCB|.$$

Trojúhelníky AOX a COY jsou tak shodné podle věty *sus* ($|AX| = |CY|$ ze zadání, $|AO| = |CO|$ a $|\sphericalangle OAX| = |\sphericalangle OCY|$), tudíž $|\sphericalangle AXO| = |\sphericalangle CYO|$. Odtud už vidíme, že $|\sphericalangle CXO| + |\sphericalangle CYO| = 180°$.



obr. 1



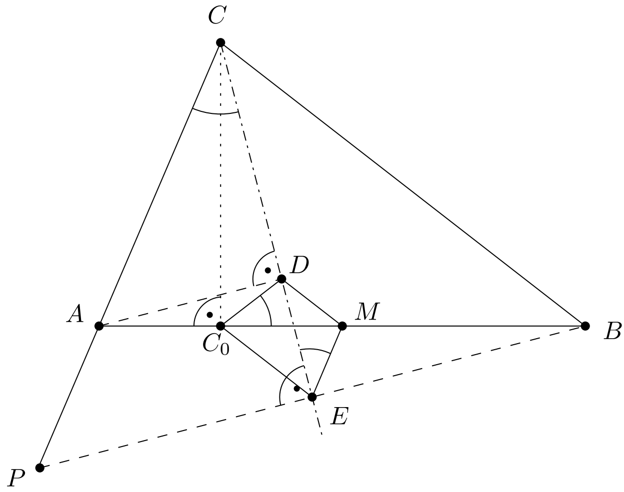
obr. 2

Druhé řešení (obr. 2): Označme S_a, resp. S_b střed strany BC, resp. AC. Splynou-li body X, Y se středy S_b, S_a, pak je $XOYC$ jistě tětivový, neboť $|\sphericalangle CS_bO| + |\sphericalangle CS_aO| = 90° + 90° = 180°$.

Předpokládejme dále, že X neleží ve středu strany AC. Bez újmy na obecnosti $|AX| < < \frac{1}{2}|AC|$. Trojúhelníky OS_bX a OS_aY jsou shodné podle věty *sus* ($|S_bO| = |S_aO|$ ze symetrie, $|S_bX| = \frac{1}{2}|AC| - |AX| = \frac{1}{2}|BC| - |CY| = |S_aY|$ a $|\sphericalangle XS_bO| = |\sphericalangle YS_aO| = 90°$). Proto $|\sphericalangle S_bXO| = |\sphericalangle S_aYO|$, a tedy $|\sphericalangle CXO| + |\sphericalangle CYO| = 180°$.

7. úloha
V ostroúhlém trojúhelníku ABC ($|AC| \neq |BC|$) označme písmeny D, E paty kolmic vedených z bodů A, B na osu úhlu u vrcholu C. Označme dále M střed strany AB a C_0 patu výšky z bodu C na stranu AB. Ukažte, že body D, E, M a C_0 leží na jedné kružnici. *(Bětka Kadlecová)*

Úlohu řešme pro $|BC| > |AC|$ (druhý případ je úplně stejný, pokud přeznačíme A na B a C na D). Označme P průsečík přímek CA a BE.



Úsečka CE je osa úhlu $\sphericalangle PCB$ a zároveň výška v trojúhelníku PBC, tedy $\triangle PBC$ je rovnoramenný a E je střed PB. Zároveň M je střed AB, proto EM je střední příčka v trojúhelníku $\triangle PBA$ a $ME \parallel CP$. To ale znamená, že MEC a ACE jsou střídavé úhly, čili

$$|\sphericalangle MED| = |\sphericalangle ACE|.$$

Dále si všimneme, že úhly CDA a CC_0A jsou oba pravé, takže čtyřúhelník AC_0DC je tětivový. Odtud víme, že $|\sphericalangle AC_0D| = 180° - |\sphericalangle ACD|$, a protože $\sphericalangle MC_0D$ je doplňkový k $\sphericalangle AC_0D$ (předpokládali jsme $|BC| > |AC|$), platí

$$|\sphericalangle ACE| = |\sphericalangle MC_0D|.$$

Nyní už je jasné, že $|\sphericalangle MED| = |\sphericalangle MC_0D|$, a čtyřúhelník MDC_0E je tak opravdu tětivový.

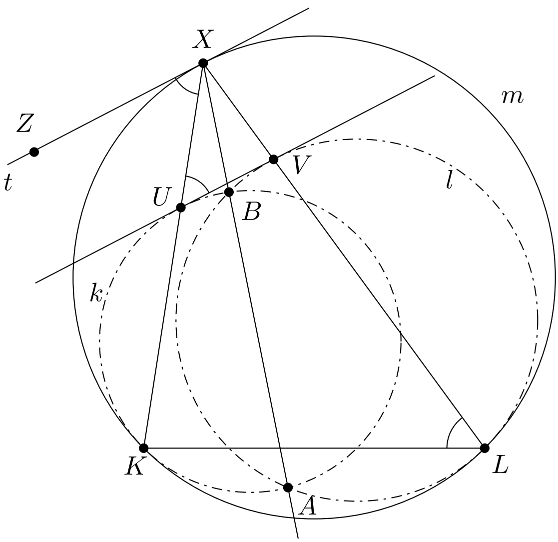
8. úloha
Uvnitř kružnice m jsou dány kružnice k, l, které mají s m vnitřní dotyk v bodech K, resp. L a samy se protínají v bodech A, B. Označme X libovolný průsečík přímky AB a kružnice m.

Přímka XK protne kružnici k podruhé v bodě U. Obdobně přímka XL protne podruhé kružnici l v bodě V. Dokažte, že přímka UV je společnou tečnou kružnic k, l. *(Michal „Kenny“ Rolínek)*

Pro mocnost bodu X postupně ke kružnicím k a l platí

$$|XU| \cdot |XK| = |XB| \cdot |XA| \quad \text{a} \quad |XV| \cdot |XL| = |XB| \cdot |XA|.$$

Odtud získáme $|XU| \cdot |XK| = |XV| \cdot |XL|$, což podle známého tvrzení o mocnosti znamená, že $KLVU$ je tětivový čtyřúhelník, a platí tedy $|\sphericalangle KLX| = |\sphericalangle VUX|$.



Nyní uvažme tečnu t ke kružnici m vedenou bodem X a na ní bod Z tak, aby ležel ve stejné polorovině určené přímkou AB jako bod U. Podle věty o úsekovém úhlu pak platí $|\sphericalangle KLX| = |\sphericalangle UXZ|$. Celkově pak dostáváme, že $|\sphericalangle VUX| = |\sphericalangle UXZ|$ a přímka t je rovnoběžná s UV.

Na závěr si uvědomme, že stejnolehlost se středem K, která převádí kružnici m na kružnici k, zobrazuje přímku t na přímku UV (U je obrazem X a přímky jsou rovnoběžné), takže UV je tečnou kružnice k. Zcela analogicky obdržíme, že UV je tečnou kružnice l, a jsme hotovi.