6. série

Kombinatorika

1. ÚLOHA

Otec dělí 100 jablek mezi 4 syny tak, že každý syn dostane aspoň 10 jablek. Kolika způsoby může otec dělení provést? Předpokládejte, že jablko se nedá dělit.

2. ÚLOHA

Šachovnice 6×6 polí je pokryta kostkami domina. Dokažte, že aspoň jedna z vodorovných nebo svislých čar, které protínají šachovnici, neprotíná žádné domino.

3. ÚLOHA

V rovině je dáno 5 bodů, z nichž žádné tři nejsou kolineární. Sestrojíme všechny přímky, které procházejí aspoň dvěma z nich, potom sestrojíme z každého z daných pěti bodů kolmice na těch 6 přímek, které jím neprocházejí. Najděte největší možný počet průsečíků sestrojených přímek.

4. ÚLOHA

Kolika způsoby se může posadit deset chlapců a dvanáct děvčat na kolotoč s 24 sedadly tak, aby mezi každými dvěma chlapci sedělo aspoň jedno děvče? Rozesazení, která se liší jen otočením kolotoče, považujeme za totožné.

5. ÚLOHA

Je dáno přirozené číslo n. Pro kolik permutací $p_1, p_2, \ldots, p_n$ čísel $1, 2, \ldots, n$ nabývá výraz $|p_1 - 1| + |p_2 - 2| + \cdots + |p_n - n|$ maximální hodnoty?

Řešení 6. série

1. ÚLOHA
Každému synovi dá 10 jablek, ty si dáme stranou, zbývajících 60 jablek si seřadíme do řady (předpokládejme, že všechna jablka jsou stejná) a máme je rozdělit na čtyři části, proto mezi ně vložíme tři přepážky. Ptáme se, kolika způsoby můžeme seřadit 60 jablek a 3 přepážky — tj. $\binom{63}{3}$ způsoby.

2. ÚLOHA
Na pokrytí je potřeba 18 kostek domina, bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že aspoň devět z nich je vodorovně (jinak si šachovnici otočíme). Jistě tedy v nějakém řádku jsou dvě vodorovné — uvažujme dvě přímky ohraničující tento řádek a předpokládejme, že obě protíná některá kostka domina. V tomto řádku však zbývají už jen dvě volná políčka, musí tedy být obsazena svislými kostkami, z nichž jedna protíná horní přímku a druhá spodní. Pak je ale šachovnice těmito čtyřmi kostkami rozdělena na dvě části s lichým počtem polí, což nelze pokrýt dominovými kostkami, tím jsme došli ke sporu.

3. ÚLOHA
Přímky spojující dané body nazveme přímky prvního typu, kolmice přímky druhého typu. Průsečíky přímek prvního typu budou průsečíky prvního typu, půsečíky přímek druhého typu budou body druhého typu a průsečíky přímek prvního a druhého typu budou body třetího typu (kromě těch, které už jsou prvního typu).

Přímek prvního typu je 10, každá z nich spojuje dva body, přímky prvního typu, které neprochází těmito dvěma body, jsou tři, každá přímka má tedy nejvýše tři průsečíky prvního typu mimo daných pět bodů. Průsečíků prvního typu je tedy nejvíše $5+10\cdot 3/2 = 20$.

Nyní spočítáme průsečíky druhého typu — uvažujme přímku p druhého typu, je to kolmice na některou přímku prvního typu, která prochází dvěma z daných pěti bodů, z ostatních tří bodů na ni vedou kolmice, které jsou navzájem rovnoběžné a neprotínají se. Přímka p protíná $4 \cdot 6 - 2 = 22$ dalších kolmic (z každého ze čtyř zbylých vrcholů vychází šest kolmic, ale dvě z nich jsou rovnoběžné s p). Celkem je tedy nejvýše $30\cdot 22/2 = 330$ průsečíků druhého typu.

Vezměme nyní přímku p prvního typu, ta prochází dvěma danými body, ze zbývajících třech bodů vychází celkem 18 přímek druhého typu, ty mohou protínat přímku p, tedy celkem máme $10 \cdot 18 = 180$ průsečíků třetího typu. Celkový počet průsečíků je tedy nejvíše 530. Zároveň je z předešlých úvah vidět, že jsou-li výchozí body v obecné poloze je tohoto počtu dosaženo.

4. ÚLOHA
Nejprve předpokládejme, že všichni chlapci jsou stejní a všechny dívky jsou stejné. Deset chlapců a deset dívek postavíme do řady — chlapec, dívka, chlapec, ... Zbývají dvě dívky, každou musíme umístit za některého chlapce (nezajímá nás, jestli přijde za nebo

před dívku, která už je za tímto chlapcem), chceme tedy seřadit dvě dívky a deset chlapců — tj. $\binom{12}{2}$ možností. Dále musíme umístit dvě mezery, pro každou máme 22 míst — tj. $\binom{24}{2}$ možností.

Nyní si uvědomíme, že chlapci nejsou všichni stejní, tedy to, co jsme dosud považovali za jedno rozesazení, je ve skutečnosti 10! rozesazení za všechna možná seřazení chlapců. Podobně dívky nejsou všechny stejné, můžeme je seřadit 12! způsoby. Ještě musíme ztotožnit všechna otočení kolotoče — víme, že na prvním místě je chlapec, navíc budeme chtít, aby to byl jeden konkrétní z nich, počet možností tedy musíme vydělit deseti. Celkový počet možných rozesazení je $\binom{12}{2} \cdot \binom{24}{2} \cdot 9! \cdot 12!$

5. Úloha

Pokud $k \leq n/2$, chceme, aby p_k bylo větší nebo rovno $n/2$ a naopak (podmínka $(*)$), pak bude výraz nabývat maxima. Jistě pro všechny permutace, které splňují podmínku $(*)$, nabývá výraz ze zadání hodnoty

$$2 \cdot \left[\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + \left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 1\right) + \cdots + n\right) - \left(1 + 2 + \cdots + \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)\right] \tag{1}$$

(Pro čísla menší než $n/2$ je $p_n \geq n$, můžeme tedy odstranit absolutní hodnoty, zaměnit pořadí členů a dostaneme $p_1 + p_2 + \cdots + p_{\lfloor n/2 \rfloor} - 1 - 2 - \cdots - \lfloor n/2 \rfloor$, což je přesně vnitřek hranaté závorky ve výrazu (1). Pro čísla větší než $n/2$ je $p_n \leq n$ a po odstranění absolutních hodnot u těchto členů opět dostaneme vnitřek hranaté závorky.)

Dokážeme, že tato hodnota je maximální. Vezměme si permutaci Π, která nesplňuje podmínku $(*)$, tedy existuje $k \leq n/2$ takové, že p_k je menší než $n/2$, pak také musí existovat $l \geq n/2$ takové, že p_l je větší než $n/2$. Uvažujme permutaci Π', kterou dostaneme záměnou p_k a p_l. Pak jistě výraz příslušný k permutaci Π' bude větší než výraz příslušný k Π. Dokázali jsme, že pro žádnou permutaci, která nesplňuje $(*)$, není výraz maximální, odtud plyne, že pro permutace splňující $(*)$ je výraz maximální.

Stačí spočítat počet permutací splňujících $(*)$ — je jich pro n sudé $(\frac{n}{2})!^2$ a pro n liché $n(\frac{n-1}{2})!^2$.