3. jarní série

Téma: Stereometrie

Datum odeslání: 12. dubna 2010

1. úloha (3 body)

Háňa si během psaní bakalářky vyrobila čtyřstěn, jehož délky hran jsou celá čísla 1, 1, x, x, 3, 3. Čemu všemu se může rovnat x?

2. úloha (3 body)

Franta má doma stůl obdélníkového tvaru, kterému se zlomila jedna noha. Změřil si, že zbylé tři nohy mají délky 90cm, 95cm a 105cm (bráno postupně po obvodu obdélníku). Jak velkou nohu musí Franta vyrobit, aby se mu stůl neviklal?

3. úloha (3 body)

Mějme krychli o hraně 1. Do ní jsou vepsány dvě koule se společným vnějším dotykem tak, že první se dotýká tří stěn krychle a druhá se dotýká zbylých tří stěn krychle. Určete vzdálenost středů těchto koulí.

4. úloha (5 bodů)

Čtyři body prostoru, shodou náhod vrcholy pravidelného čtyřstěnu, jsou obarveny zelenou barvou. Alča zelenou miluje, proto v zájmu estetiky obarví i všechny body, které leží na přímce s některými dvěma zelenými. Že je ale zelené pořád málo, provede tutéž operaci ještě jednou. Jsou pak už všechny body prostoru zelené?

5. úloha (5 bodů)

Rozhodněte, jestli je možné polepit pravidelný čtyřstěn několika shodnými pravidelnými šestiúhelníkovými nálepkami tak, že celý povrch čtyřstěnu je polepen, nálepky se nepřekrývají a neodstávají.

6. úloha (5 bodů)

Někde na povrchu pravidelného čtyřstěnu se objevil šnEk. Dokažte, že existuje bod X (taktéž na povrchu) takový, že šnEk má na výběr z minimálně tří různých nejkratších cest, jak se do bodu X dostat.

7. úloha (5 bodů)

Uvažujme (nepravidelný) čtyřboký jehlan, kterému lze vepsat kouli. Bod dotyku této koule s podstavou označme P. Dále kolmé projekce bodu P na hrany podstavy nazvěme postupně P_1, P_2, P_3 a P_4. Dokažte, že čtyřúhelník $P_1P_2P_3P_4$ je tětivový.

8. úloha (5 bodů)

Mějme v prostoru dvě sféry[1] různých poloměrů a bod A, který leží na jejich průniku. Dokažte, že existuje bod B s následujícími vlastnostmi: Bod B neleží na žádné z daných dvou sfér a navíc pro každou kružnici procházející body A a B, která protíná sféry v dalších bodech M a N (různých od A), platí $|BM| = |BN|$.

[1] Sféra je povrch koule.

Řešení 3. jarní série

1. úloha
Háňa si během psaní bakalářky vyrobila čtyřstěn, jehož délky hran jsou celá čísla 1, 1, x, x, 3, 3. Čemu všemu se může rovnat x?

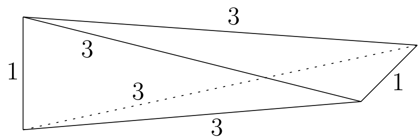
Pokud hrany o délkách 1, 1 nesousedí, tak jsou naproti sobě a čtyřstěn s hranami 1, 1, x, x, 3, 3 už má aspoň jednu stěnu tvořenou trojúhelníkem se stranami 1, x, 3. Podle trojúhelníkových nerovností v trojúhelníku 1, x, 3 je

$$1 + x > 3 \qquad \text{a} \qquad x < 3 + 1,$$

což dává jedinou možnost $x = 3$.

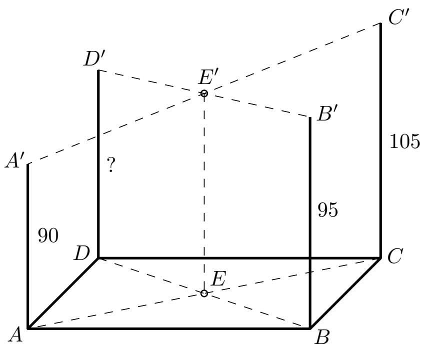
Ukažme, že hrany 1, 1 skutečně nemohou sousedit. Kdyby totiž sousedily, tak by nutně ohraničovaly trojúhelník 1, 1, x a bylo by $x = 1$ (opět z trojúhelníkové nerovnosti). Náš čtyřstěn by měl hrany 1, 1, 1, 1, 3, 3 a nějakou jeho trojúhelníkovou stěnu by ohraničovaly hrany 1, 1, 3, což by nešlo, a tím bychom dostali spor.

Ještě bychom měli zmínit, že čtyřstěn s délkami hran 1, 1, 3, 3, 3, 3 skutečně existuje a jeho stěny jsou tvořeny trojúhelníky 1, 3, 3.



2. úloha
Franta má doma stůl obdélníkového tvaru, kterému se zlomila jedna noha. Změřil si, že zbylé tři nohy mají délky 90cm, 95cm a 105cm (bráno postupně po obvodu obdélníku). Jak velkou nohu musí Franta vyrobit, aby se mu stůl neviklal?

Stůl si obrátíme vzhůru nohama, aby se na něj lépe koukalo. Rohy desky si označíme A, B, C, D a odpovídající konce nohou A', B', C', D' tak, aby $|AA'| = 90$, $|BB'| = 95$, $|CC'| = 105$ a $|DD'|$ hledáme.



Aby se stůl neviklal, musí body A', B', C', D' ležet v jedné rovině. Průsečík $A'C'$ a $B'D'$ označíme E' a průsečík AC a BD označíme E. EE' je průsečnice rovin ACC' a BDD', tím pádem je kolmá na desku stolu.

Podívejme se na lichoběžník $ACC'A'$: EE' je rovnoběžná s AA' i s CC', navíc $|AE| = |EC|$ ($ABCD$ je obdélník), takže EE' je střední příčka lichoběžníka $ACC'A'$. Obdobně se ukáže, že je i střední příčkou lichoběžníka $BDD'B'$. Díky tomu můžeme dvakrát použít vzorec pro délku střední příčky:

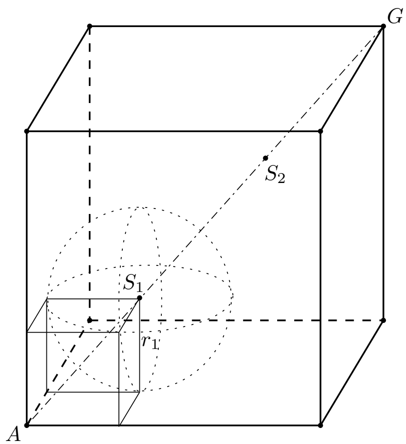
$$|EE'| = \frac{|AA'| + |CC'|}{2} = \frac{|BB'| + |DD'|}{2}.$$

Po dosazení vyjde $|DD'| = 100$ a Frantovi řekneme, že potřebuje nohu dlouhou 100 cm.

3. úloha

Mějme krychli o hraně 1. Do ní jsou vepsány dvě koule se společným vnějším dotykem tak, že první se dotýká tří stěn krychle a druhá se dotýká zbylých tří stěn krychle. Určete vzdálenost středů těchto koulí.

Označme S_1 a S_2 stredy gulí a r_1 a r_2 ich polomery.



Body z telesovej uhlopriečky majú rovnakú vzdialenosť od troch stien kocky. Pretože sa guľa so stredom S_1 dotýka troch stien, má od nich rovnakú vzdialenosť a leží teda na telesovej uhlopriečke. Z rovnakého dôvodu leží na rovnakej uhlopriečke aj S_2. Body S_1 a S_2 delia telesovú uhlopriečku kocky na tri úseky. Prostredný z nich predstavuje vzdialenosť S_1 a S_2, takže jeho dĺžka je rovná súčtu polomerov r_1 a r_2. Zvyšné dva úseky predstavujú telesové uhlopriečky menších kociek, ktoré ležia v rohoch veľkej kocky a ich hrany majú veľkosť r_1 resp. r_2. Keďže veľkosť telesovej uhlopriečky je $\sqrt{3}$-krát väčšia ako hrana kocky, ostáva už len zostaviť rovnicu a vyjadriť hľadanú hodnotu:

$$\underbrace{\sqrt{3}r_1}_{|AS_1|} + \underbrace{(r_1 + r_2)}_{|S_1S_2|} + \underbrace{\sqrt{3}r_2}_{|S_2G|} = \sqrt{3},$$

$$r_1 + r_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}.$$

4. úloha

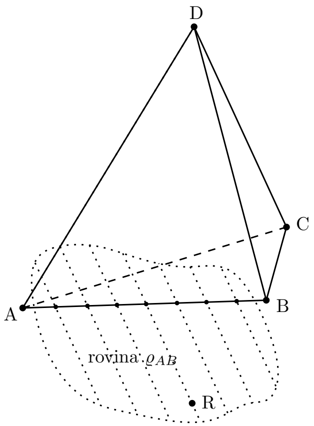
Čtyři body prostoru, shodou náhod vrcholy pravidelného čtyřstěnu, jsou obarveny zelenou barvou. Alča zelenou miluje, proto v zájmu estetiky obarví i všechny body, které leží na přímce s některými dvěma zelenými. Že je ale zelené pořád málo, provede tutéž operaci ještě jednou. Jsou pak už všechny body prostoru zelené?

Po prvním obarvení jsou obarvené přímky, na kterých leží hrany čtyřstěnu. Ve druhém obarvení se určitě obarví roviny obsahující stěny čtyřstěnu. Pro zpřehlednění zbylého obarvování podáváme následující lemma.

Lemma. *V prostoru jsou dány dvě zelené mimoběžky p, q. Označme ϱ_p rovinu, která obsahuje přímku p a je rovnoběžná s přímkou q. Potom žádný bod roviny ϱ mimo přímku p neleží na přímce určené dvěma zelenými body.*

Důkaz. Vezměme libovolný bod $A \in \varrho_p$, $A \notin p$, a libovolný zelený bod $P \in p$. Potom přímka AP leží celá v rovině ϱ_p a je tak disjunktní s q. Na přímce AP už tedy nemůže ležet zelený bod z q. Bod A neleží na žádné přímce určené zelenými body z p a z q, dokázáno jest.

Vraťme se k řešení úlohy. Čtyřstěn označíme standardně $ABCD$. Vezmeme rovinu ϱ_{AB} tak, že ϱ_{AB} obsahuje přímku AB a je rovnoběžná s přímkou CD.



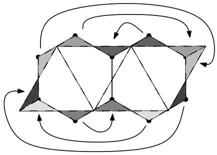
Obdobně zvolme ϱ_{AC} a ϱ_{BC}. Označme R průsečík rovin ϱ_{AB}, ϱ_{AC}, ϱ_{BC}. Jelikož $R \in \varrho_{AB}$, tak podle *lemmatu* bod R neleží na přímce se dvěma zelenými body z AB a CD. Obdobně R neleží na přímce se dvěma zelenými body z AC a BD ani se zelenými body z AD a BC.

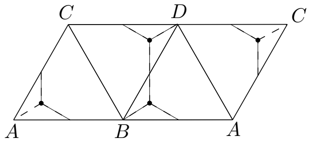
Bod R navíc neleží v rovině žádné stěny čtyřstěnu, takže zůstane i po druhém obarvování neobarven. Alče se tedy určitě nepovedlo přebarvit celý prostor na zeleno.

5. úloha

Rozhodněte, jestli je možné polepit pravidelný čtyřstěn několika shodnými pravidelnými šestiúhelníkovými nálepkami tak, že celý povrch čtyřstěnu je polepen, nálepky se nepřekrývají a neodstávají.

Ukážeme, že čtyřstěn jde pokrýt dvěma šestiúhelníky. Plášť čtyřstěnu si rozložme do roviny a pokryjme dvěma šestiúhelníky podle prvního obrázku.



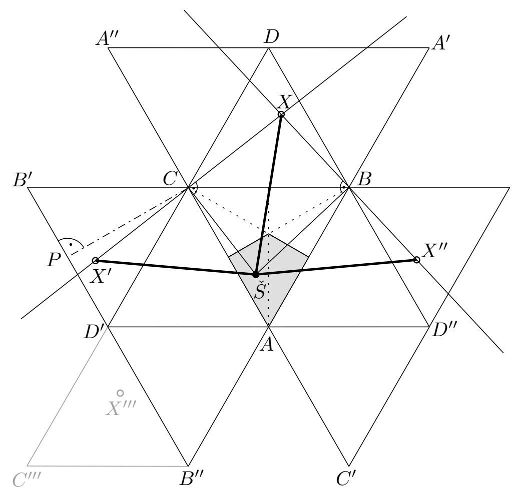


Na šipkách je znázorněno, kam se „přehnou“ přesahující trojúhelníčky – všechny si najdou volné místo. Na druhém obrázku je vidět, že takto pokryjeme celý čtyřstěn.

6. úloha

Někde na povrchu pravidelného čtyřstěnu se objevil šnEk. Dokažte, že existuje bod X (taktéž na povrchu) takový, že šnEk má na výběr z minimálně tří různých nejkratších cest, jak se do bodu X dostat.

Označme vrcholy čtyřstěnu A, B, C, D. Rozložme povrch čtyřstěnu do roviny (viz obrázek). To jde mnoha způsoby, na našem obrázku jsou všechny zkombinované. Body A, A' a A'' jsou tak sice různé, ale ve skutečnosti se jedná o týž vrchol čtyřstěnu, pouze jinak rozloženého do roviny. Podobně se nakopírují vrcholy B, C a D. Místo, kde se objevil šnEk, označme $\check{S}$. Díky symetrii čtyřstěnu můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že leží na stěně ABC a dokonce v naznačené třetině nejblíže vrcholu A. Nyní sestrojíme hledaný bod. Body B, C veďme kolmice na úsečky $\check{S}B$, $\check{S}C$. Jejich průsečík označme X. Ten leží v trojúhelníku DCB (nezapomeň, že jsme předpokládali, že šnEk se objeví v šedě vyznačené oblasti). Zobrazíme-li jej v osových souměrnostech se středy v bodech B a C, dostaneme v trojúhelnících $B'CD'$ a $B''CD''$ body X' a X'', které reprezentují tentýž bod na povrchu čtyřstěnu jako X.



Vidíme, že $|\check{S}X| = |\check{S}X'| = |\check{S}X''|$ (neboli X, X' a X'' leží na obvodu téže kružnice se středem $\check{S}$). Existují tak tři různé stejně dlouhé přímé cesty po povrchu čtyřstěnu od šnEka do bodu X, každá vede přes jinou z hran ohraničujících stěnu ABC. Ještě je třeba ukázat, že je úsečka $\check{S}X'''$ aspoň tak dlouhá jako $\check{S}X'$, aby byly tři nalezené cesty nejkratší. Tuto otázku vyřešíme následujícími ekvivalencemi:

$$\begin{aligned}
|\check{S}X'''| \geq |\check{S}X'| \quad &\iff \quad |\sphericalangle X'D'\check{S}| \leq |\sphericalangle X'''D'\check{S}| \quad \iff \quad |\sphericalangle X'D'\check{S}| \leq 90^\circ \\
&\iff \quad D' \text{ leží vně kružnice opsané } \Delta X'C\check{S} \\
&\iff \quad |\sphericalangle X'D'C| \leq |\sphericalangle X'\check{S}C| = |\sphericalangle X\check{S}C| = |\sphericalangle XBC| = |\sphericalangle X'B'C| \\
&\iff \quad X' \text{ leží uvnitř } \Delta CPD',
\end{aligned}$$

kde P je střed $B'D'$. Z toho, že úhel $\sphericalangle \check{S}CX'$ je pravý, už plyne, že X' leží uvnitř $\Delta CPD'$, takže jsou tři vyznačené cesty z $\check{S}$ do X, X', X'' skutečně nejkratší.

7. úloha

Uvažujme (nepravidelný) čtyřboký jehlan, kterému lze vepsat kouli. Bod dotyku této koule s podstavou označme P. Dále kolmé projekce bodu P na hrany podstavy nazvěme postupně P_1, P_2, P_3 a P_4. Dokažte, že čtyřúhelník $P_1P_2P_3P_4$ je tětivový.

Úlohu rozdělíme na dvě podúlohy, které vyřešíme zvlášť.

1. podúloha. *Mějme čtyřboký jehlan s podstavou $ABCD$, který má vepsánu kouli. Bod dotyku s podstavou označme P. Potom platí*

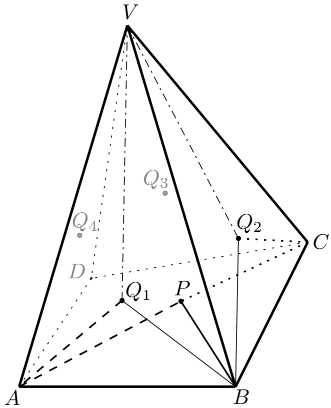
$$|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle CPD| = |\sphericalangle BPC| + |\sphericalangle APD|.$$

2. podúloha. *Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ a bod P v jeho vnitřku takový, že pro něj platí*

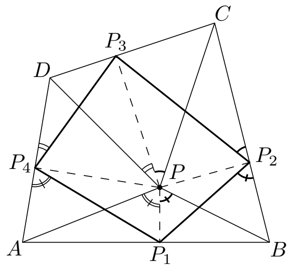
$$|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle CPD| = |\sphericalangle BPC| + |\sphericalangle APD|.$$

Označme P_1, P_2, P_3, P_4 postupně paty kolmic z P na strany čtyřúhelníku. Potom je $P_1P_2P_3P_4$ tětivový.

Řešení 1. podúlohy. Označme V hlavní vrchol jehlanu a Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 postupně body dotyku koule vepsané se stěnami ABV, BCV, CDV, DAV. Rozdělme pomyslně stěnu ABV na tři trojúhelníky: ABQ_1, BVQ_1 a VAQ_1. Podobně rozdělme i ostatní boční stěny na tři trojúhelníky a podstavu na čtyři. Ukážeme, že spousta těchto trojúhelníků je shodných (Obr. 1).



Obr. 1 – 1. podúloha



Obr. 2 – 2. podúloha

Vzhledem k tomu, že úsečky VQ_1, VQ_2, VQ_3 a VQ_4 jsou tečné ke kulové ploše ze stejného bodu, jsou všechny stejně dlouhé. Analogicky platí i $|BQ_1| = |BP| = |BQ_2|$, $|CQ_2| = |CP| = |CQ_3|$, $|DQ_3| = |DP| = |DQ_4|$ a $|AQ_4| = |AP| = |AQ_1|$. Podle věty *sss* jsou tedy shodné vždy ty dva trojúhelníky, které sdílí hranu původního jehlanu (tedy například VQ_1B a VQ_2B nebo AQ_1B a APB). Označme ještě $\alpha = |\sphericalangle AQ_1V| = |\sphericalangle AQ_4V|$, $\beta = |\sphericalangle BQ_2V| = |\sphericalangle BQ_1V|$ a analogicky γ a δ. Pak platí

$$\begin{aligned}|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle CPD| &= |\sphericalangle AQ_1B| + |\sphericalangle CQ_3D|\\ &= (360^\circ - \alpha - \beta) + (360^\circ - \gamma - \delta)\\ &= (360^\circ - \alpha - \delta) + (360^\circ - \beta - \gamma)\\ &= |\sphericalangle DQ_4A| + |\sphericalangle BQ_2C| = |\sphericalangle DPA| + |\sphericalangle BPC|.\end{aligned}$$

Dostali jsme výchozí bod pro druhou podúlohu.

Řešení 2. podúlohy. Součet levé a pravé strany předchozí rovnosti dává 360°, každá z nich musí být tedy rovna 180°. Nakresleme si teď čtyřúhelník $ABCD$ s bodem P a patami kolmic (Obr. 2). Pomocí čtyř tětivových čtyřúhelníků typu AP_1PP_4 (mají proti sobě dva pravé úhly) dopočítáme

$$\begin{aligned}|\sphericalangle P_3P_4P_1| + |\sphericalangle P_1P_2P_3| &= (180^\circ - |\sphericalangle DP_4P_3| - |\sphericalangle P_1P_4A|) + (180^\circ - |\sphericalangle BP_2P_1| - |\sphericalangle P_3P_2C|)\\ &= 360^\circ - (|\sphericalangle DPP_3| + |\sphericalangle P_1PA| + |\sphericalangle BPP_1| + |\sphericalangle P_3PC|)\\ &= 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ,\end{aligned}$$

takže čtyřúhelník $P_1P_2P_3P_4$ je tětivový.

8. úloha

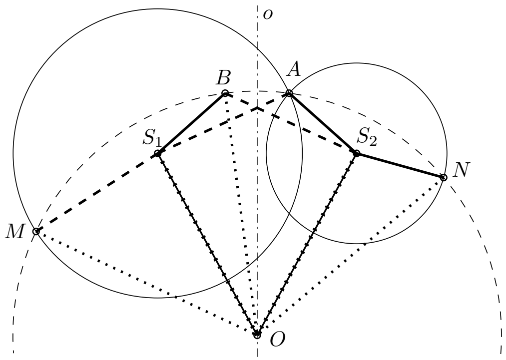
Mějme v prostoru dvě sféry[2] různých poloměrů a bod A, který leží na jejich průniku. Dokažte, že existuje bod B s následujícími vlastnostmi: Bod B neleží na žádné z daných dvou sfér a navíc pro

[2]Sféra je povrch koule.

každou kružnici procházející body A a B, která protíná sféry v dalších bodech M a N (různých od A), platí $|BM| = |BN|$.

Podle Filipa Luxe:

Bod rovinně souměrný s bodem A podle roviny půlící spojnici středů koulí označme B. Ukážeme, že pro něj platí tvrzení ze zadání. Veďme skrze body A a B nějakou kružnici jako v zadání, její střed označme O a poloměr r. Podívejme se na řez v rovině zvolené kružnice.



Ukážeme, že jsou čtyřúhelníky OBS_1M a ONS_2B shodné, a tím pádem mají stejně dlouhé úhlopříčky BM a BN.

Osová rovina se v řezu zobrazuje jako přímka o a osová souměrnost podle o zobrazuje $A \to B$, $S_1 \to S_2$. Díky tomu platí rovnosti $|S_1A| = |S_2B|$ a $|S_1B| = |S_2A|$. Jelikož O leží na ose o, tak navíc $|OS_1| = |OS_2|$. Z rovností odpovídajících délek stran dostaneme shodnosti trojúhelníků:

$$
\begin{aligned}
|OB| = |ON|, \quad |BS_1| = |NS_2|, \quad |S_1O| = |S_2O| \qquad &\Rightarrow \qquad \Delta OBS_1 \cong \Delta ONS_2, \\
|OS_1| = |OS_2|, \quad |S_1M| = |S_2B|, \quad |BO| = |MO| \qquad &\Rightarrow \qquad \Delta OS_2B \cong \Delta OS_1M.
\end{aligned}
$$

Ze shodností trojúhelníků plyne shodnost čtyřúhelníků OBS_1M a ONS_2B, speciálně pak délek úseček BM a BN a úloha je vyřešena.