Ke čtvrté sérii

Už při prvním letmém pohledu na zadání čtvrté série zjistíš, že je zcela neobyčejné. Jako každý rok jsme si pro Tebe i letos připravili jednu cizojazyčnou sérii. O co jde? Zadání máš k dispozici ve třech jazycích – anglicky, německy a francouzsky. Tentokrát to tedy nebudeš mít tak snadné, protože pochopit zadání v cizím jazyce pro Tebe možná bude obtížnější, než kdybychom Ti ho předložili v češtině. Co pro Tebe ale bude pravděpodobně vůbec nejobtížnější (kromě samotného přemýšlení nad úlohami), bude svá řešení řádně sepsat, a to jak jinak než v jednom ze tří výše uvedených jazyků. Z těch si můžeš vybrat ten, který Ti vyhovuje nejvíc. Můžeš dokonce psát různá řešení v různých jazycích (například prvních pět úloh anglicky a zbylé tři třeba francouzsky, to je jen na Tobě), v žádném případě však nepoužívej češtinu ani slovenštinu! Možná Ti sepisování řešení v cizím jazyce zabere pětkrát tolik času co obvykle, zato se toho jistě hodně naučíš. A je velmi pravděpodobné, že se Ti to bude později ještě mockrát hodit. Tak s chutí do toho!

4th autumn series

Topic:	On one line, at one point
Date due:	January 11th 2010

PROBLEM 1 (3 POINTS)

Šavlík drew a horizontal line $\check{s}$ and two equilateral triangles PRA (with $|PR| = 1$) and RSB (with $|RS| = 3$) onto it, such that points P, R and S lied on the line $\check{s}$. Šavlík would like to place another equilateral triangle STC next to RSB (with T on $\check{s}$ as well) so that the points A, B and C would be collinear. How far from S should he put the point T?

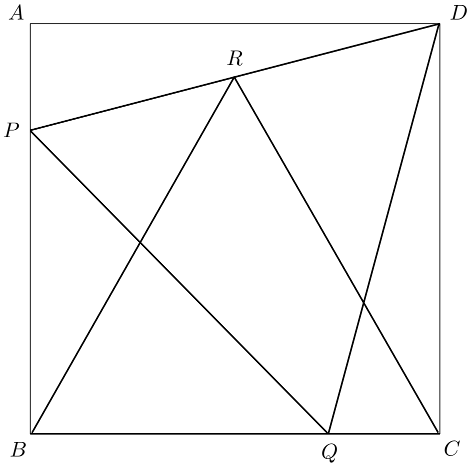
PROBLEM 2 (3 POINTS)

Place nine new organizers of the PIGlet[1] into plane so that there are ten different lines with at least three organizers standing on each.

PROBLEM 3 (3 POINTS)

Bětka and Háňa started arguing over a square $ABCD$: which one of the inscribed equilateral triangles has the biggest area? Bětka tried to draw an equilateral triangle DPQ with the vertices P and Q on the sides AB and BC of the square $ABCD$. Háňa drew another equilateral triangle BCR (see the picture). Show that the points P, R and D are collinear.

[1] Bětka, Honzík, Kája, Kuba, Olin, Pepa, Šavlík, Ťam and Vejtek



PROBLEM 4 (5 POINTS)

Zuzka drew a line p. Circles k, l and m lie on the same side of p and touch it at K, L, M, respectively. Moreover, k and l touch each other at A and l and m touch each other at B. Show that the lines KA, MB and the circle l are concurrent.

PROBLEM 5 (5 POINTS)

Let A and B be points in plane. Consider one of the halfplanes with the borderline AB. For every point C in that halfplane the squares ACD_CE_C and CBF_CG_C are drawn outside of the triangle ABC. Show that E_CF_C passes through a fixed point independent of the choice of C.

PROBLEM 6 (5 POINTS)

Zuzanka saw two triangles ABC and $A'B'C'$ floating in space. They were not coplanar, but Zuzanka noticed that the pairs of lines AB and $A'B'$, BC and $B'C'$, CA and $C'A'$ intersected at points K, L and M, respectively. Show that the three points of intersection are collinear. In addition, show that the lines AA', BB' and CC' are either parallel or concurrent.

PROBLEM 7 (5 POINTS)

Let k, l be circles meeting at the points A, B. Ťam chose a point S outside both of them and led a tangent to k passing through S that didn't intersect l. He denoted T the point of tangency. Then Honzík came and drew a circle with a diameter ST that met l at U. Finally, he denoted V the second intersection of SU and l. Prove that S, A, B are collinear if and only if T, V and the center of k are collinear.

PROBLEM 8 (5 POINTS)

For an acute-angled triangle VIP let K be a point on line VI such that $IP = IK$ and line segment VK contains I. Let the circle m with its diameter VI meet the circumcircle n of a triangle IKP at T ($T \neq I$). Denote E, F the points of intersection of VT, PI and IT, VP, respectively. Prove that E, F, K are collinear.

Die 4. Herbstserie

Thema: In einem Punkt, auf einer Gerade

Datum des Poststempels: 11. Januar 2010

Aufgabe n. 1 (3 punkte)

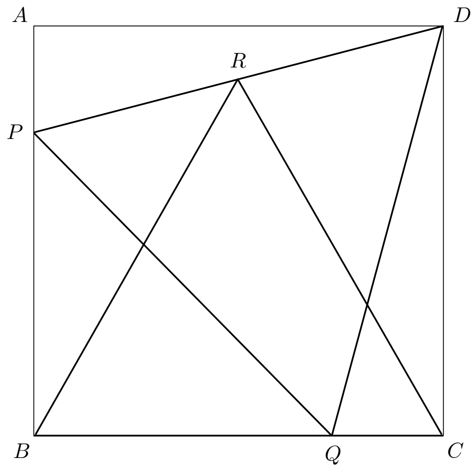
Šavlík hat eine waagerechte Gerade š und zwei gleichseitige Dreiecke PRA und RSB mit den Seitenlängen $|PR| = 1$, $|RS| = 3$ gezeichnet, so dass die Punkte P, R, S auf der Gerade š liegen. Er möchte neben dem Dreieck RSB noch ein gleichseitiges Dreieck STC (mit dem Punkt T auch auf š) hinzufügen, so dass auch die Punkte A, B, C auf einer Gerade liegen. Hilf Šavlík zu erkennen, wie weit vom S der Punkt T liegen muss.

Aufgabe n. 2 (3 punkte)

Stelle die neun neuen Organisatoren des Schweinchens[2] in einer Ebene so, dass es zehn verschiedene Geraden gibt, auf denen jeweils wenigstens drei Organisatoren stehen.

Aufgabe n. 3 (3 punkte)

Bětka und Háňa haben ein Quadrat $ABCD$ gezeichnet und streiten sich, welches gleichseitige Dreieck, das man hineinfügen kann, am gröten ist. Bětka versucht das Dreieck DPQ mit den Eckpunkten P, Q auf den Seiten AB, BC des Quadrates $ABCD$. Háňa zeichnet noch das Dreieck BCR dazu (siehe Abbildung). Zeige, dass die Punkte P, R, D auf einer Gerade liegen.



Aufgabe n. 4 (5 punkte)

Zuzka nimmt eine Gerade p und konstruiert drei Kreise k,l und m, so dass sie die Gerade in den Punkten K, L, M berühren. Auerdem berühren sich k mit l von Auen im Punkt A und l mit

[2] d.h. Bětka, Honzík, Kája, Kuba, Olin, Pepa, Šavlík, Ťam und Vejtek

m im Punkt B. Man beweise, dass sich die Geraden KA, MB und der Kreis l in einem Punkt schneiden.

Aufgabe n. 5 (5 punkte)

Wir wählen zwei Punkte A, B und betrachten eine der durch die Grenzgerade AB getrennten Halbebenen. Für jeden Punkt C aus der gewählten Halbebene konstruieren wir die Quadrate ACD_CE_C und CBF_CG_C auerhalb des Dreiecks ABC. Zeige, dass obwohl sich der Eckpunkt C beliebig bewegt, schneiden sich alle Geraden E_CF_C in einem Punkt.

Aufgabe n. 6 (5 punkte)

Zuzanka sieht im Raum zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$. Sie liegen nicht in einer Ebene, aber Zuzanka merkt, dass sich die Geraden AB, $A'B'$, sowie BC, $B'C'$ und CA, $C'A'$ schneiden. Zeige, dass die drei Schnittpunkte auf einer Gerade liegen. Beweise auch, dass die Geraden AA', BB' und CC' entweder parallel sind oder sich alle in einem Punkt schneiden.

Aufgabe n. 7 (5 punkte)

Die Kreise k und l lagen in einer Ebene und schnitten sich in den Punkten A und B. Dann kam Ťam und zeichnete eine Tangente vom Punkt S zum Kreis k, so dass die Tangente und l keinen Schnittpunkt hatten. Den Berührungspunkt nannte er T. Danach kam Honzík und zeichnete den Thaleskreis über ST, der den Kreis l im Punkt U schnitt. Am Ende bezeichnete er den zweiten Schnittpunkt SU mit l als V. Beweise, dass S, A und B auf einer Gerade liegen, genau wenn die Punkte T, V und der Mittelpunkt von k auf einer Gerade liegen.

Aufgabe n. 8 (5 punkte)

Sei VIP ein spitzwinkliges Dreieck. Bezeichnen wir K einen Punkt auf der Gerade VI, so dass $|IP| = |IK|$ und K nicht auf dem Strahl IV liegt. Weiter sei m der Thaleskreis über VI, n der umgeschriebene Kreis des Dreieckes IKP und T der Schnittpunkt dieser Kreise verschieden von I. Seien E, F die Schnittpunkte der Geraden VT mit PI und IT mit VP. Beweise, dass die Punkte E, F und K auf einer Gerade liegen.

La 4ème série d'automne

Sujet:	Sur une droite, dans un point
Date d'expedition:	le 11 janvier 2010

problème 1 (3 points)

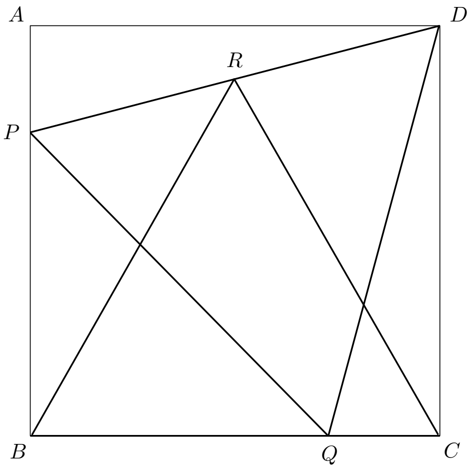
Šavlík a dessiné une droite horizontale $\check{s}$ et y a posé côte à côte deux triangles équilateraux PRA et RSB (les points P, R, S sont sur la droite $\check{s}$) de telle sorte que $|PR| = 1$, $|RS| = 3$. Šavlík souhaiterait mettre à côté du triangle RSB encore un autre triangle équilateral STC (avec le point T aussi sur la droite $\check{s}$) afin que les points A, B, C soient sur une meme droite. Aidez-le à trouver à quelle distance du point S il doit mettre T.

PROBLÈME 2 (3 POINTS)

Positionnez neufs nouveaux organisateurs de PraSátko[3] dans le plan afin d'avoir dix droites différentes passant par au moins trois de ces derniers.

PROBLÈME 3 (3 POINTS)

Bětka avec Háňa ont dessiné le carré $ABCD$ et discutent au sujet du plus grand triangle équilateral inscrit. Bětka a essayé de dessiner le triangle équilateral DPQ ayant pour sommets P, Q sur les côtés AB, BC du carré $ABCD$. Háňa a rajouté sur le dessin le triangle équilateral BCR (voir dessin). Montrez que les points P, R, D se trouvent sur une meme droite.



PROBLÈME 4 (5 POINTS)

Zuzka a tiré à la règle une droite p et sur un des côtés à dessiner les cercles k, l, m tels qu'ils touchent p en K, puis L, puis M. Par ailleurs les cercles k et l se touchent en A et les cercles l et m en B. Montrez que les droites KA, MB et le cercle l s'intersectent en un point.

PROBLÈME 5 (5 POINTS)

Soient les points A et B dans le plan et on se place dans l'un des deux demi-plans formés par la droite AB. Pour tout point C dans ce demi-plan on trace à l'extérieur du triangle ABC les carrés ACD_CE_C et CBF_CG_C. Montrez que toutes les droites E_CF_C (bougeant librement avec C) s'intersectent en un unique point.

PROBLÈME 6 (5 POINTS)

Zuzanka imagina dans l'espace deux triangles ABC et $A'B'C'$. Ils n'étaient pas dans le même plan mais Zuzanka remarqua que les droites AB, $A'B'$, tout comme les droites BC, $B'C'$ et les droites CA, $C'A'$ s'intersectent. Montrez que les trois points d'intersection sont sur une même droite. Montrez par ailleurs que les droites AA', BB' et CC' sont soient parallèles soient s'intersectent en un point.

[3] Bětka, Honzík, Kája, Kuba, Olin, Pepa, Šavlík, Ťam et Vejtek

PROBLÈME 7 (5 POINTS)

Soient dans le plan les cercles k et l s'intersectant en A et B. Ťam, avec le point S qui etait en dehors des deux cercles, a dessiné une droite adjacente au cercle k, qui n'intersectait pas l. Il a noté le point d'intersection T. Honzík a ensuite dessiné le cercle de diamètre ST qui intersecte l en U. Il a noté le deuxième point d'intersection entre la droite SU et l V. Montrez que les points S, A, et B sont sur une même droite si et seulement si se trouvent T, V et le centre de k sur une même droite.

PROBLÈME 8 (5 POINTS)

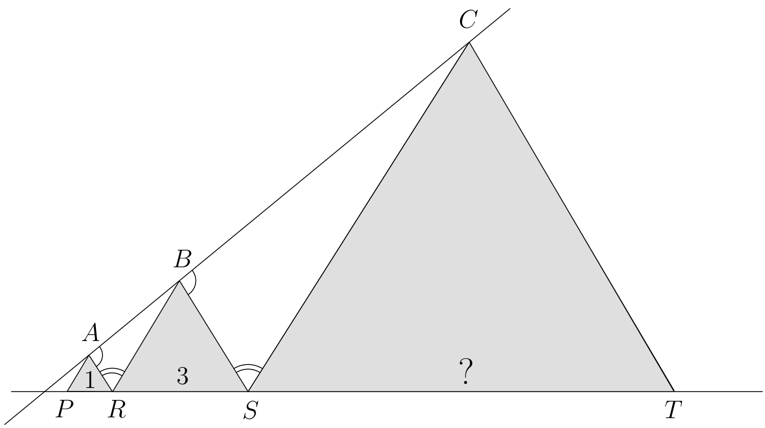
Dans le triangle à angles aigus VIP soit K un point sur VI, tel que $|IP| = |IK|$ et qui n'est pas sur la demi-droite IV. Soient m et n deux cercles de diamètre VI pour le premier et circonscrit au triangle KIP pour le second et T le point d'intersection différent de I. On note E resp. F les points d'intersection de VT et PI, resp. IT et VP. Montrez que les points E, F et K sont sur une même droite.

Řešení 4. podzimní série

1. úloha

Šavlík si nakreslil vodorovnou přímku $š$ a na ni vedle sebe posadil dva rovnostranné trojúhelníky PRA a RSB (body P, R, S leží na přímce $š$) takové, že $|PR| = 1$, $|RS| = 3$. Šavlík by chtěl vedle trojúhelníku RSB posadit ještě další rovnostranný trojúhelník STC (s bodem T taktéž na přímce $š$) tak, aby body A, B, C ležely na jedné přímce. Poraď mu, jak daleko od bodu S musí zvolit bod T.

Všimneme si podobnosti trojúhelníků ARB a BSC (mají shodné dva vnitřní úhly).



Odpovídající si strany trojúhelníků jsou pak ve stejném poměru:

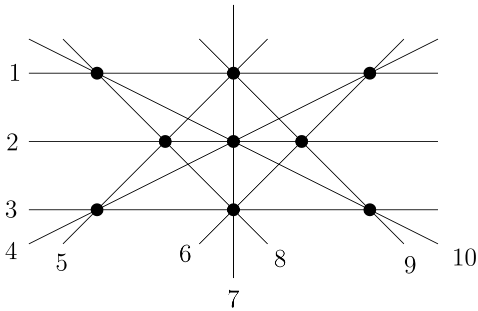
$$\frac{|AR|}{|RB|} = \frac{|BS|}{|SC|}, \qquad \text{neboli} \qquad \frac{1}{3} = \frac{3}{|SC|}, \qquad \text{z čehož spočítáme} \qquad |SC| = |ST| = 9.$$

Vzdálenost bodů S a T je 9 jednotek.

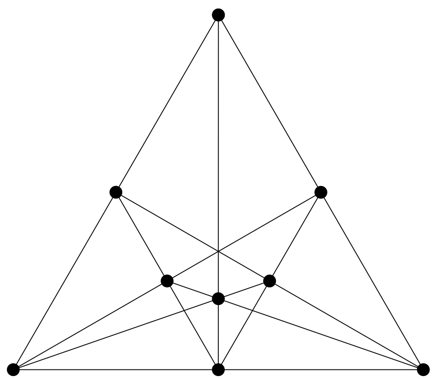
2. úloha

Rozestav devět nových organizátorů PraSátka[4] do roviny tak, aby existovalo deset různých přímek takových, že na každé z nich stojí alespoň tři organizátoři.

Možností, jak nové organizátory rozmístit, je nekonečně mnoho, kupříkladu takto (každý organizátor je jeden puntík):



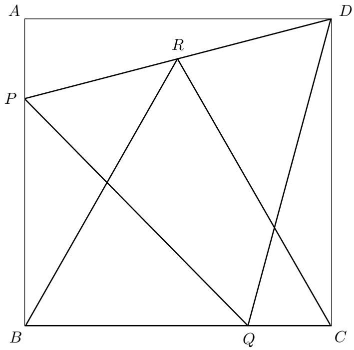
Nebo takto:



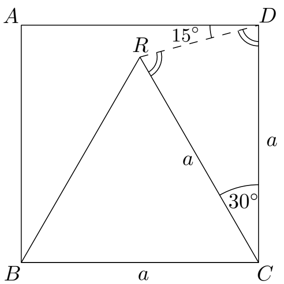
3. úloha

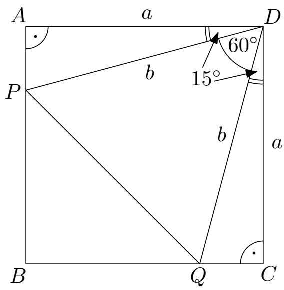
Bětka s Háňou si nakreslily čtverec $ABCD$ a začaly se dohadovat o tom, který z rovnostranných trojúhelníků do něj vepsaných má největší obsah. Bětka zkusila nakreslit rovnostranný trojúhelník DPQ s vrcholy P, Q na stranách AB, BC čtverce $ABCD$. Háňa do obrázku přikreslila ještě rovnostranný trojúhelník BCR (viz obrázek). Ukažte, že body P, R, D leží na jedné přímce.

[4] Tj. Bětku, Honzíka, Káju, Kubu, Olina, Pepu, Šavlíka, Ťama a Vejtka.



Ukážeme rovnost $|\sphericalangle RDA| = |\sphericalangle PDA| = 15°$, z níž plyne tvrzení úlohy.





Počítejme podle prvního obrázku:

$$|\sphericalangle RDA| = 90° - |\sphericalangle RDC| = 90° - \frac{|\sphericalangle RDC| + |\sphericalangle DRC|}{2}$$
$$= 90° - \frac{180° - |\sphericalangle RCD|}{2} = \frac{|\sphericalangle RCD|}{2} = 15°.$$

Teď sledujme druhý obrázek. Podle věty *Ssu* jsou trojúhelníky PDA a QDC shodné (mají stejné strany a, b a pravý úhel), shodné jsou tak i velikosti odpovídajících si úhlů $|\sphericalangle PDA| = |\sphericalangle QDC|$. Z rovnosti

$$90° = |\sphericalangle PDA| + |\sphericalangle PDQ| + |\sphericalangle QDC| = 2|\sphericalangle PDA| + 60°$$

dostáváme $|\sphericalangle PDA| = 15°$ a úloha je vyřešena.

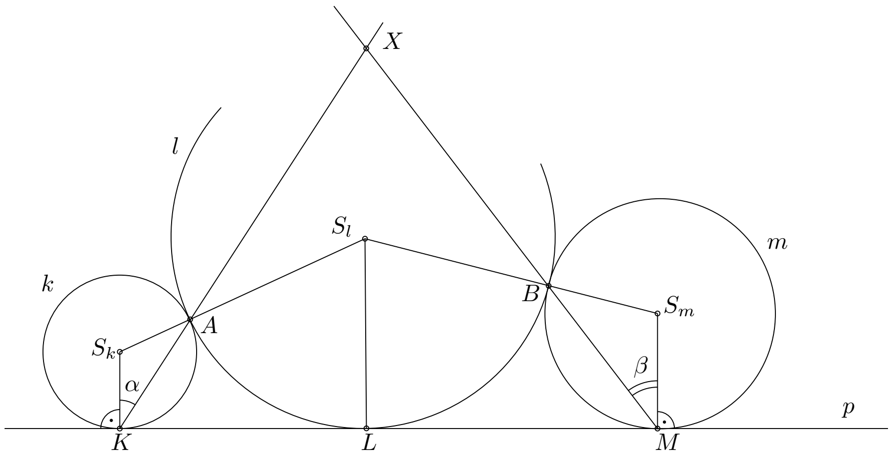
4. úloha

Zuzka si narýsovala přímku p a na jedné její straně sestrojila kružnice k, l, m tak, že se přímky p dotýkaly postupně v bodech K, L, M. Navíc se kružnice k a l zvenku dotýkaly v bodě A a kružnice l a m v bodě B. Dokažte, že přímky KA, MB a kružnice l se protínají v jednom bodě.

Tato úloha se dala řešit mnoha způsoby, my si zde ukážeme dva. V prvním řešení využijeme vztahů mezi obvodovými a středovými úhly, v tom druhém stejnolehlost.[5] Označme středy kružnic k, l, m postupně písmeny S_k, S_l, S_m.

První řešení:

Buď X průsečík přímek KA a MB. Ukažme, že $|\sphericalangle AS_lB| = 2 \cdot |\sphericalangle AXB|$. To bude znamenat, že X leží na kružnici l. Označme $|\sphericalangle AKS_k| = \alpha$, $|\sphericalangle S_mMB| = \beta$.



Díky pravým úhlům u vrcholů K a M (p je tečna) zjistíme velikosti úhlů MKX, resp. XMK, z nichž pak dopočteme

$$|\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle KXM| = 180^\circ - (|\sphericalangle MKX| + |\sphericalangle XMK|) = 180^\circ - (90^\circ - \alpha + 90^\circ - \beta) = \alpha + \beta.$$

V pětiúhelníku $KMS_mS_lS_k$ musí být součet úhlů roven 540°. Všimneme-li si rovnoramenných trojúhelníků KAS_k a BMS_m, dostaneme

$$|\sphericalangle S_kS_lS_m| + (180^\circ - 2\beta) + 90^\circ + 90^\circ + (180^\circ - 2\alpha) = 540^\circ,$$

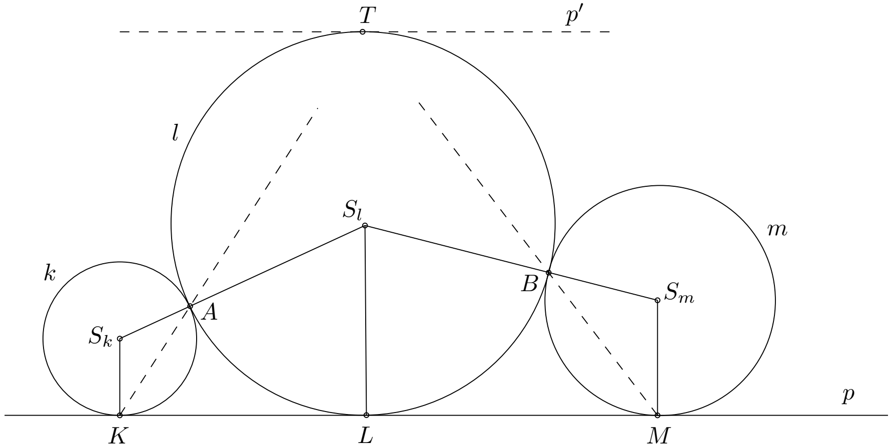
z čehož vyjádříme

$$|\sphericalangle S_kS_lS_m| = 2(\alpha + \beta)$$

a jsme hotovi.

[5] O *stejnolehlosti* a jejích vlastnostech si můžeš přečíst například v naší knihovně `http://mks.mff.cuni.cz/library` v příspěvku *Geometrická zobrazení* od Franty Konopeckého.

Druhé řešení:
Položme přímku p pro přehlednost vodorovně.

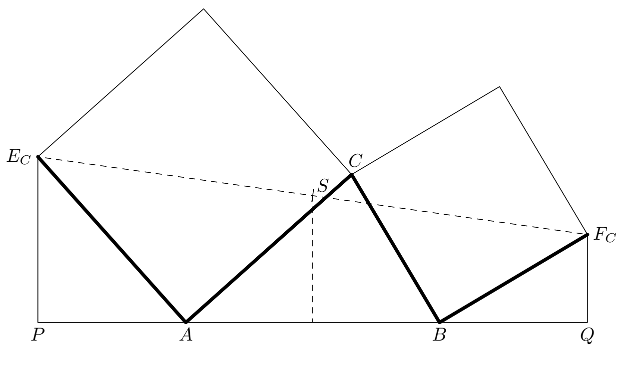


Mezi každými dvěma dotýkajícími se kružnicemi existuje stejnolehlost se středem v bodě jejich dotyku. Vezměme tedy stejnolehlost se středem v bodě A, která zobrazí kružnici k na kružnici l. V této stejnolehlosti se přímka p jakožto tečna kružnice k zobrazí na rovnoběžku p', která bude zároveň tečnou kružnice l. Bod dotyku (K) se zobrazí na bod dotyku (T). Vzor a obraz ve stejnolehlosti ale leží na jedné přímce s příslušným středem, takže přímka KA prochází bodem T.

Analogicky leží bod B na přímce TM.

Dokázali jsme, že přímky KA, MB procházejí obě bodem T, který leží na kružnici l, a jsme tedy hotovi.

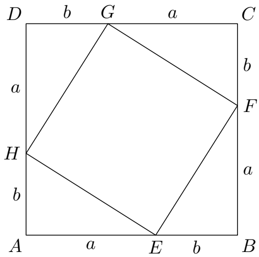
5. úloha
Mějme v rovině body A a B a uvažme jednu ze dvou polorovin s hraniční přímkou AB. Pro každý bod C ze zvolené poloroviny sestrojme vně trojúhelníku ABC čtverce ACD_CE_C a CBF_CG_C. Dokažte, že se všechny přímky E_CF_C (hýbeme-li libovolně s bodem C) protínají v jednom bodě.



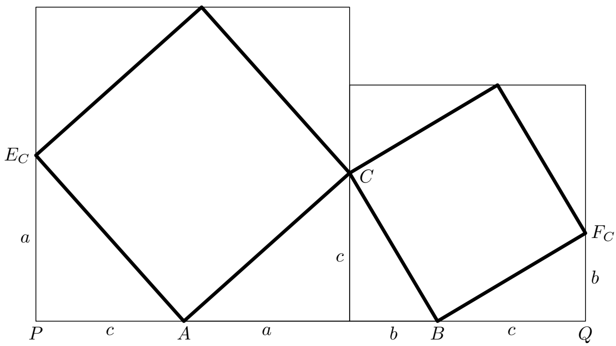
Řešení přes Dort-Chejnovská-Olšákovy rotace:
Uvažme dvě rotace o úhel $90°$: rotace r_A se středem A a r_B se středem B. Díky tomu, že ACD_CE_C a CBF_CG_C jsou čtverce, snadno nahlédneme, že zobrazíme-li bod F_C nejdříve rotací r_B (tím dostaneme bod C) a pak rotací r_A, dostaneme vždy bod E_C.

Podívejme se na složení obou rotací. To je nějaké shodné zobrazení r. Důležité je rozmyslet si, že toto zobrazení r je opět rotace, a sice o $90° + 90° = 180°$, kolem nějakého neznámého bodu S. Ale poloha tohoto bodu závisí pouze na rotacích r_A a r_B, tedy na vrcholech A a B. Přitom vždycky platí, že r převádí F_C na E_C. Otočení r je středová souměrnost, jejíž střed S je vždy středem úsečky F_CE_C.

Řešení pomocí Lux-Šafkových čtverců:
Nejdříve se podíváme na následující obrázek do sebe vnořených čtverců $ABCD$ a $EFGH$. Na první pohled je vidět, že trojúhelníky kolem menšího čtverce, tj. AEH, BFE, CGF a DHG, jsou shodné. To se snadno dokáže třeba pomocí věty *usu*, nebo otočením kolem společného středu obou čtverců. My si z toho vezmeme následující rovnosti: $|HA| = |EB| = |FC| = |GD|$ a $|AE| = |BF| = |CG| = |DH|$.



Označme ještě paty výšek spuštěných z bodů E_C a F_C jako P a Q. Nyní si do náčrtku úlohy dokreslíme čtverce jako na následujícím obrázku a označíme stejně dlouhé úseky a, b a c.



Z $|AQ| = |BP|$ je vidět, že střed úsečky AB je stejný jako střed úsečky PQ. Přitom víme, že QPE_CF_C je lichoběžník. Nakresleme si ještě osu AB a podívejme se, kde protne úsečku E_CF_C, označme tento bod S. Protože tato osa je střední příčkou[6] lichoběžníku QPE_CF_C, musí mít

[6] Tím chceme říct, že spojuje středy ramen lichoběžníku.

délku
$$\frac{|QF_C| + |PE_C|}{2} = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}|AB|.$$

Tím jsme konečně dokázali, že poloha bodu S nezávisí na poloze bodu C. Bod S je tedy hledaným bodem na úsečce $E_C F_C$.

Řešení Kosteckého komplexní geometrií:
Podíváme se na celou problematiku v Gaussově rovině. Tedy body budou komplexní čísla. Bez újmy na obecnosti můžeme zvolit $A = -1, B = 1$. Bod C budeme raději označovat malým písmenem c, aby vypadal více jako číslo. Podobně označme i ostatní body $E_C = e, F_C = f$. Ještě předpokládejme, že C leží v horní polorovině s hraniční přímkou AB, tj. $\Im(c) > 0$.[7]

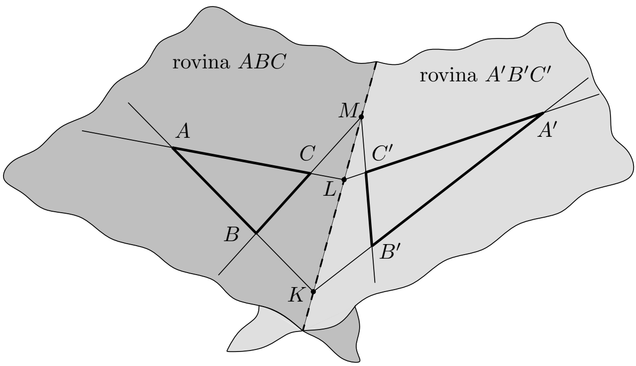
Rozmysli si, že otočíme-li bod x kolem bodu s o devadesát stupňů, dostaneme bod $(x-s)i+s$. A podobně otočení o $-90°$: $(x-s)\cdot(-i)+s$. Tedy platí $e = (c+1)i - 1$ a $f = 1 - (c-1)i$.

Hledáme teď bod na úsečce ef, který je nezávislý na poloze c. Zkusme tedy spočítat třeba souřadnice středu. To je bod
$$\frac{e+f}{2} = \frac{(c+1)i - 1 + 1 - (c-1)i}{2} = i.$$

A rovnou vidíme, že jeho poloha nezávisí na čísle c, tedy ani na poloze bodu C.

6. úloha
Zuzanka uviděla v prostoru dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$. Neležely ve stejné rovině, ale Zuzanka si všimla, že se přímky AB, $A'B'$, stejně jako přímky BC, $B'C'$ a přímky CA, $C'A'$ protínají. Dokažte, že všechny tři příslušné průsečíky leží na jedné přímce. Dále dokažte, že přímky AA', BB' a CC' jsou buď rovnoběžné, nebo se všechny protínají v jednom bodě.

Označme „příslušné průsečíky“ po řadě písmeny K, M, L (viz obrázek). Bod K leží na přímce AB, leží tak v rovině ABC. Protože je ale K i součástí přímky $A'B'$, obsahuje ho i rovina $A'B'C'$. Tedy bod K nutně leží v průniku těchto dvou rovin. Analogicky v průniku stejných rovin leží i body L a M. Protože průnikem dvou rovin je přímka, leží body K, L, M na přímce.



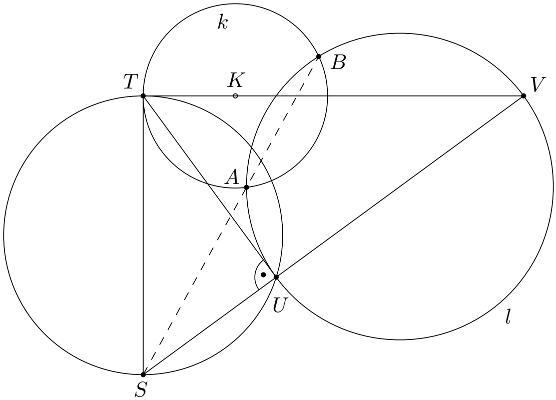
[7]Symbolem $\Im$ rozumíme imaginární část komplexního čísla. Tj. $\Im(a+bi) = b$.

Pro důkaz zbytku úlohy označme a, b, c roviny, které po řadě obsahují čtyřúhelníky $BCB'C'$, $ACA'C'$ a $ABA'B'$. Označení jde provést, protože jsou čtyřúhelníky díky protínajícím se přímkám rovinné. Přímka AA' je tak průsečnice rovin b, c. Obdobně přímka BB' je $a \cap c$ a přímka CC' je $a \cap b$. Roviny a, b, c teď buď mají společný bod, kterým procházejí i všechny tři průsečnice AA', BB', CC', nebo společný bod nemají a žádné dvě průsečnice se neprotínají. Protože ale průsečnice leží po dvou ve stejných rovinách, jsou v tomto případě všechny rovnoběžné.

7. úloha

V rovině ležely kružnice k a l protínající se v bodech A a B. Přišel Ťam a z bodu S, který ležel mimo obě kružnice, sestrojil tečnu ke kružnici k, která neprotínala l. Bod dotyku označil T. Nato přišel Honzík a nad průměrem ST sestrojil kružnici, která proťala l v bodě U ležícím vně k. Nakonec druhý průsečík přímky SU a l označil V. Dokažte, že body S, A a B leží na jedné přímce právě tehdy, když na jedné přímce leží body T, V a střed kružnice k.

Označme K střed kružnice k.



Spojnice středu kružnice a dotykového bodu svírá s tečnou pravý uhel, takže $\sphericalangle KTS$ je pravý. Podobně jednoduše zjistíme, že $\sphericalangle SUT$ je pravý, protože U leží na kružnici s poloměrem ST. Zbytek úlohy vyřešíme postupně dílčími ekvivalencemi. Body T, K, V leží na jedné přímce, právě když je ΔSTV pravoúhlý (s pravým úhlem u vrcholu T). Trojúhelník STV je pravoúhlý právě když délka odvěsny, přepony a příslušného úseku k patě výšky splňují *Euklidův vztah*[8]

$$|ST|^2 = |SU| \cdot |SV|.$$

Poslední vztah ale neříká nic jiného, než že bod S má stejnou mocnost[9] ke kružnicím k a l. Bod má stejnou mocnost, právě když S leží na chordále obou kružnic, kterou je v tomto případě

[8]Vztah plynoucí z podobnosti trojúhelníků SUT a STV, kdy dáme do rovnosti odpovídající poměry stran $\frac{|SU|}{|ST|} = \frac{|ST|}{|SV|}$.

[9]Mocnost bodu A ke kružnici k je číslo, které spočítáme jako $|AT|^2$, kde T je bod dotyku tečny ke kružnici k procházející bodem A. Toto číslo se ale nemění ani když ho počítáme přes sečnu (násobením kratšího a delšího úseku). Více o *mocnosti bodu ke kružnici* najdeš v knihovně na našem webu.

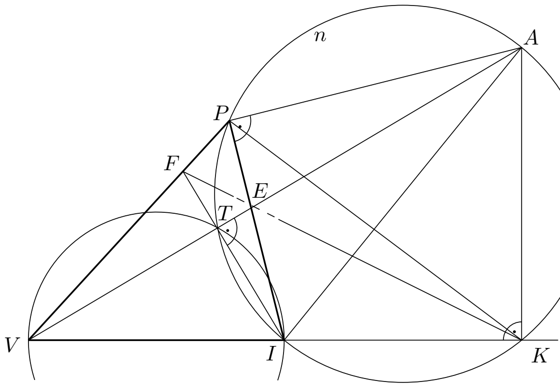
přímka AB. Body S, A, B leží na přímce, a protože jsme užívali pouze ekvivalence, dokázali jsme zároveň i zpětnou implikaci.

8. úloha

V ostroúhlém trojúhelníku VIP označme K bod na přímce VI, pro který platí $|IP| = |IK|$ a který neleží na polopřímce IV. Dále buďte m a n kružnice opsané průměru VI a trojúhelníku KIP a T jejich průsečík různý od I. Nakonec označme E, resp. F průsečík přímek VT a PI, resp. IT a VP. Dokažte, že body E, F a K leží na jedné přímce.

Podle Wang Chi Hanga:

Označme si A druhý průsečík přímky VT s kružnicí n.



Jelikož je úhel ITA pravý, je IA průměr kružnice n. Úhly IPA a IKA jsou pak též pravé a díky $|IP| = |IK|$ dostáváme shodnost trojúhelníků $\triangle IPA \cong \triangle IKA$, ze které použijeme rovnost odpovídajících si stran $|KA| = |PA|$.

$$\frac{|VT|}{|VK|} = \frac{|TI|}{|AK|} = \frac{|TI|}{|AP|} = \frac{|TE|}{|PE|}.$$

První a poslední rovnost poměrů získáme z podobností $\triangle VTI \simeq \triangle VKA$ a $\triangle ETI \simeq \triangle EPA$, které jsou obě přímým důsledkem tětivovostí čtyřúhelníků $PIKA$ a $PTIA$. Získaný poměr ještě upravíme do využitelné podoby:

$$\frac{|VT|}{|TE|} = \frac{|VK|}{|PE|}.$$

Jelikož I leží na přímce PE, Meneláova věta (pro přímku IF a trojúhelník VEP) říká

$$\frac{|EI|}{|PI|} \cdot \frac{|PF|}{|FV|} \cdot \frac{|VT|}{|TE|} = 1. \qquad (\heartsuit)$$

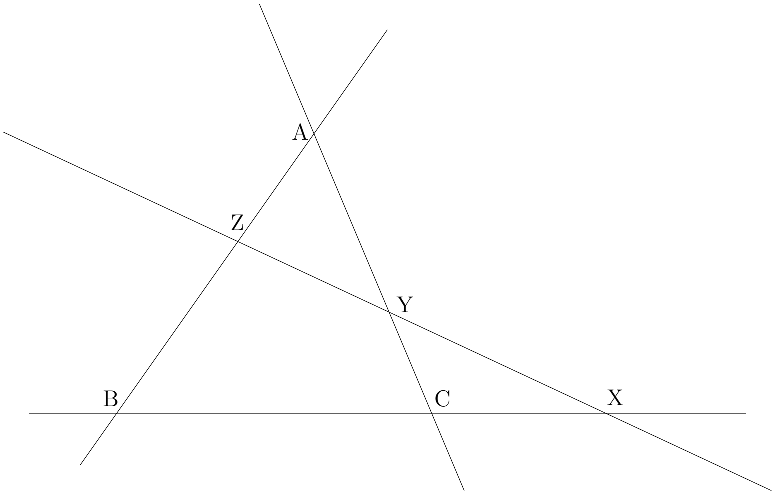
My pro důkaz tvrzení ze zadání potřebujeme použít Meneláovu větu opačně, a to pro přímku EF a trojúhelník VIP. Chceme tedy dokázat, že platí

$$\frac{|EI|}{|KI|} \cdot \frac{|PF|}{|FV|} \cdot \frac{|VK|}{|PE|} = 1.$$

To už ale dostaneme jednoduchým složením rovností (♡), $\frac{|VT|}{|TE|} = \frac{|VK|}{|PE|}$ a $|PI| = |KI|$. Úloha je vyřešena, body E, K, F leží na přímce.

Ještě pro úplnost dodáváme znění Meneláovy věty:

Věta. (Meneláova)



Mějme trojúhelník ABC. Po řadě na přímkách a, b a c zvolíme body X, Y a Z. Tyto tři body leží na jedné přímce právě tehdy, když:

$$\frac{|CX|}{|BX|} \cdot \frac{|AY|}{|CY|} \cdot \frac{|BZ|}{|AZ|} = 1.$$