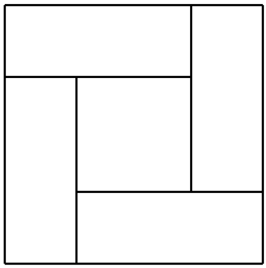
2. podzimní série

Téma: Čtverce

Datum odeslání: 2. listopadu 2009

1. úloha (3 body)

Kuba si do velkého čtverce nakreslil čtyři stejné obdélníky tak obratně, že mu uvnitř vznikl malý čtverec, podobně jako na *ilustračním* obrázku. Zjistěte poměr velikostí stran těchto obdélníků, pokud víte, že velký čtverec má čtyřikrát větší obsah než malý čtverec.



2. úloha (3 body)

Kolik čtverců[1] menších než milion je dělitelných 24?

3. úloha (3 body)

Z množiny $\{1, 2, \ldots, 168\}$ vybereme 84 čísel tak, že součet libovolných dvou vybraných je různý od 169. Dokažte, že mezi vybranými čísly musí být čtverec.[16]

4. úloha (5 bodů)

Bětka si myslí třistaciferné číslo, které se skládá ze sta nul, sta jedniček a sta dvojek, přičemž první cifra není nula. Může být Bětčino číslo čtverec[16]?

5. úloha (5 bodů)

Pepa jednou poslal SMSkou Kennymu tuto úlohu: „`Mas ctverec ABCD a uvnitr nej bod P takovy, ze |PA| = 2, |PB| = 3 a |PC| = 4. Urci vzdalenost |PD|.`“ Kenny se zamyslel a v mžiku měl Pepa u sebe správnou odpověď. Kolik to bylo? Nezapomeňte odpověď zdůvodnit.

6. úloha (5 bodů)

Dokažte, že existuje nekonečná posloupnost přirozených čísel[2] $a_1, a_2, a_3, \ldots$ taková, že pro každé k přirozené je součet $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2$ druhá mocnina celého čísla.

[1] Čtverec je v matematice také druhá mocnina přirozeného čísla.

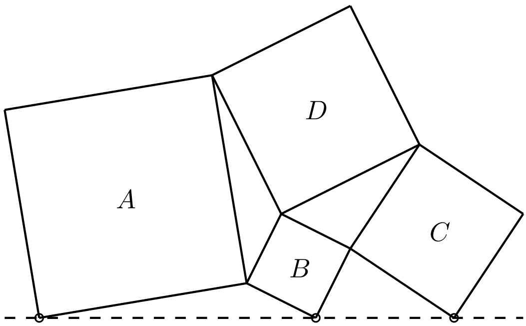
[2] Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Franta dostal k svátku dva čtverce.[3] Všiml si, že jeden z nich se dá napsat jako $4x - 3y$ a druhý jako $3x + 4y$ pro nějaká celá čísla x, y. Dokažte, že potom jsou oba Frantovy čtverce dělitelné pěti.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

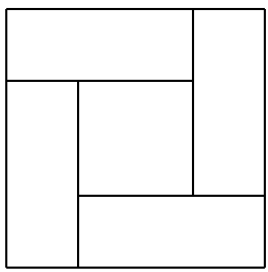
Na stěně japonského chrámu byl vyrytý obrazec skládající se ze čtyř čtverců A, B, C a D. Čtverce se nepřekrývaly a byly spojené vrcholy[4] tak, že $A_4 = B_2$, $B_4 = C_2$, $D_2 = A_1$, $D_3 = B_1$ a $D_4 = C_1$. Navíc ležely vrcholy A_3, B_3, C_3 na jedné přímce. Dokažte, že pak musel mít čtverec B dvakrát kratší stranu než čtverec D.



Řešení 2. podzimní série

1. úloha

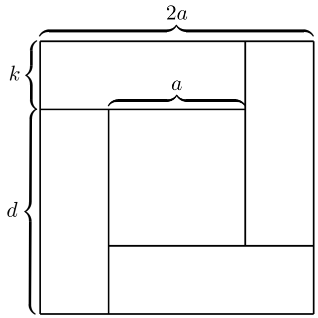
Kuba si do velkého čtverce nakreslil čtyři stejné obdélníky tak obratně, že mu uvnitř vznikl malý čtverec, podobně jako na *ilustračním* obrázku. Zjistěte poměr velikostí stran těchto obdélníků, pokud víte, že velký čtverec má čtyřikrát větší obsah než malý čtverec.



[3] Čtverec je v matematice také druhá mocnina přirozeného čísla.

[4] Vrcholy čtverce A označíme proti směru hodinových ručiček A_1, A_2, A_3, A_4, stejně jako u ostatních čtverců.

Označme $2a$ stranu většího čtverce. Jeho obsah je tudíž roven $4a^2$. Menší čtverec má čtyřikrát menší obsah než velký čtverec, tedy a^2, a proto má jeho strana délku a. Nyní označme d delší a k kratší stranu obdélníka.



Podle obrázku je součet těchto délek $(d+k)$ roven délce strany velkého čtverce:

$$d + k = 2a.$$

Dále si můžeme všimnout, že součet délek kratší strany obdélníka a strany menšího čtverce odpovídá velikosti delší strany obdélníka:

$$a + k = d.$$

Získali jsme dvě rovnice. Ze druhé vyjádřeme a, dosaďme do první a upravujme:

$$\begin{aligned} 2(d-k) &= d+k, \\ d &= 3k, \\ \frac{d}{k} &= 3. \end{aligned}$$

Výsledný poměr je tři ku jedné.

2. úloha

Kolik čtverců[5] menších než milion je dělitelných 24?

Je-li čtverec dělitelný $24 = 2^3 \cdot 3$, je nutně dělitelný i $144 = 2^4 \cdot 3^2$, což plyne z toho, že každý čtverec má v prvočíselném rozkladu pouze sudé mocniny prvočísel. Všechny čtverce tedy budou ve tvaru $144k^2$, kde k je přirozené číslo (čtverec z jiného čtverce dostaneme pouze násobením dalším čtvercem – opět důsledek sudých mocnin v prvočíselném rozkladu). Požadované čtverce menší než milion nalezneme řešením nerovnice $144k^2 < 10^6$, jejímž výsledkem v přirozených číslech je $k \leq 83$. Každému k odpovídá jeden čtverec dělitelný 24, takže i hledaných čtverců je 83.

[5] Čtverec je v matematice také druhá mocnina přirozeného čísla.

3. úloha

Z množiny $\{1, 2, \dots, 168\}$ vybereme 84 čísel tak, že součet libovolných dvou vybraných je různý od 169. Dokažte, že mezi vybranými čísly musí být čtverec.[16]

Rozdeľme množinu $\{1, 2, \dots, 168\}$ na 84 dvojíc tak, že súčet čísel v každej dvojici je 169. Získali sme množiny $\{1, 168\}, \{2, 167\}, \dots \{84, 85\}$. Podľa zadania medzi 84 vybranými číslami nesmú byť žiadne dve, ktorých súčet je 169. Takže z každej dvojice môžme vybrať najviac jedno číslo. Keďže dvojíc je 84, pri výbere sa žiadna nezvýši, takže medzi vybranými číslami bude práve jedno číslo z každej dvojice. Súčet čísel 144 a 25 je 169, takže čísla 144 a 25 tvoria dvojicu, z ktorej musím vybrať práve jedno číslo. Oboje sú štvorce, takže medzi vybranými číslami musí byť štvorec.

4. úloha

Bětka si myslí třistaciferné číslo, které se skládá ze sta nul, sta jediček a sta dvojek, přičemž první cifra není nula. Může být Bětčino číslo čtverec[16]?

Prvně si uvědomíme, že je-li jakékoliv číslo druhou mocninou přirozeného čísla, pak musí být v jeho prvočíselném rozkladu každé prvočíslo v sudé mocnině (exponenty se musí „rovnoměrně rozdělit“ mezi oba činitele).

Spočítáme si ciferný součet Bětčina čísla. Ten je pro jakékoliv rozmístění nul, jedniček i dvojek roven

$$0 \cdot 100 + 1 \cdot 100 + 2 \cdot 100 = 300.$$

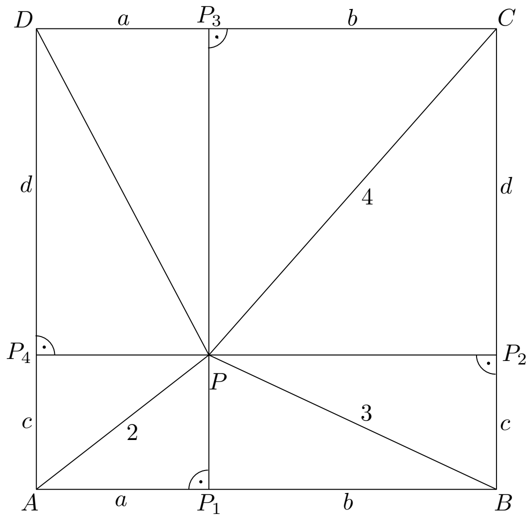
Podle pravidel dělitelnosti[6] je Bětčino číslo dělitelné třemi, ale není dělitelné devíti. Trojka (což je prvočíslo) se tedy vyskytuje v prvočíselném rozkladu Bětčina čísla v první mocnině, a tudíž toto číslo nemůže být čtverec.

5. úloha

Pepa jednou poslal SMSkou Kennymu tuto úlohu: „`Mas ctverec ABCD a uvnitr nej bod P takovy, ze |PA| = 2, |PB| = 3 a |PC| = 4. Urci vzdalenost |PD|.`“ Kenny se zamyslel a v mžiku měl Pepa u sebe správnou odpověď. Kolik to bylo? Nezapomeňte odpověď zdůvodnit.

Spusťme z bodu P kolmice na všechny čtyři strany čtverce $ABCD$ a délky úseků, na které paty těchto kolmic P_1, P_2, P_3, P_4 rozdělí strany čtverce, označme a, b, c a d (viz obrázek).

[6]Pokud je neznáš, pak věz, že číslo je dělitelné třemi právě tehdy, když je jeho ciferný součet dělitelný třemi a to samé platí pro devítku.



Z Pythagorovy věty pro trojúhelníky AP_1P, BP_2P a CP_3P máme rovnice

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= 2^2, \\ b^2 + c^2 &= 3^2, \\ b^2 + d^2 &= 4^2. \end{aligned}$$

Použijeme-li Pythagorovu větu ještě na trojúhelník DP_4P, dostáváme

$$|DP|^2 = a^2 + d^2 = (a^2 + c^2) + (b^2 + d^2) - (b^2 + c^2) = 2^2 + 4^2 - 3^2 = 11,$$

vzdálenost bodu P od bodu D je tedy rovna $\sqrt{11}$.

6. úloha

Dokažte, že existuje nekonečná posloupnost přirozených čísel[7] $a_1, a_2, a_3, \dots$ taková, že pro každé k přirozené je součet $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2$ druhá mocnina celého čísla.

Zkoumejme rozdíly sousedních druhých mocnin. Rozdíl druhé mocniny lichého čísla a čísla o jedna menšího je $(2k+1)^2 - (2k)^2 = 4k + 1$. Tedy ke každému číslu ve tvaru $4k + 1$ $(k \geq 1)$ lze najít sudý čtverec, po jehož přičtení dostaneme druhou mocninu lichého čísla. Každý lichý čtverec je ale ve tvaru $(2l + 1)^2 = 4l^2 + 4l + 1 = 4(l^2 + l) + 1 = 4k + 1$. Takže pro každý lichý čtverec nalezneme takový sudý, že jejich součet je opět čtvercem.

Stačí tedy zvolit za a_1 libovolné liché číslo větší než 1. Pak k němu dokážeme najít vhodný sudý čtverec tak, aby součet byla opět druhá mocnina lichého čísla. K tomu opět nalezneme vhodný sudý čtverec, atd.

[7] Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.

Jiné řešení:
Využijeme poznatku, že čísla

$$\begin{aligned}a &= 2k+1,\\ b &= 2k^2+2k,\\ c &= 2k^2+2k+1\end{aligned}$$

tvoří Pythagorejskou trojici pro každé přirozené k. Tedy splňují vztah $a^2+b^2=c^2$. O tom se snadno přesvědčíme dosazením.

Nyní budeme postupovat matematickou indukcí. Zvolme si třeba $a_1=3$ a $a_2=4$. (To odpovídá volbě $k=1$ ve výše uvedených vztazích.) Snadno ověříme, že $a_1^2+a_2^2=5^2$, což je druhá mocnina celého čísla a liché číslo. Dále předpokládejme, že součet prvních l členů posloupnosti $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_l^2=z^2$ je druhá mocnina nějakého celého lichého čísla, neboli že $z=2k_z+1$. Pro $a_{l+1}=2k_z^2+2k_z$ je poté (podle vztahů nahoře) i číslo $z^2+a_{l+1}^2$ druhou mocninou celého lichého čísla. Indukce tedy funguje a nageneruje nám vyhovující nekonečnou posloupnost.

7. úloha
Franta dostal k svátku dva čtverce.[8] Všiml si, že jeden z nich se dá napsat jako $4x-3y$ a druhý jako $3x+4y$ pro nějaká celá čísla x, y. Dokažte, že potom jsou oba Frantovy čtverce dělitelné pěti.

První řešení (podle Tomáše Zemana):
Učiňme na začátek jedno pozorování: Čtverce přirozených čísel mohou dávat po dělení pětkou jen tři různé zbytky – konkrétně 0, 1 a 4 (rozmysli si, že pro zbytek čtverce je důležitý jen zbytek základu). Všimněme si navíc, že

$$2(4x-3y)=8x-6y\equiv 3x+4y \pmod 5. \qquad (\heartsuit)$$

Předpokládejme teď pro spor, že $5\nmid 4x-3y$. To znamená, že $4x-3y$ dává zbytek 1 nebo 4 modulo 5. Číslo $3x+4y$ má podle kongruence ($\heartsuit$) dvojnásobný zbytek než $4x-3y$, tj. 2 nebo 3 – spor (pro spor jsme použili předpoklad, že i $3x+4y$ je čtverec). Tím pádem $5\mid 4x-3y$ a podle ($\heartsuit$) i $5\mid 3x+4y$.

Druhé řešení (podle Jana Kosteckého):
Označme $4x-3y=a^2$ a $3x+4y=b^2$. Potom

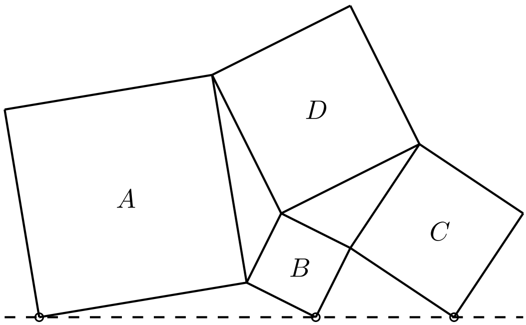
$$a^4+b^4=(4x-3y)^2+(3x+4y)^2=25(x^2+y^2).$$

Je tedy $5\mid a^4+b^4$. Čtvrté mocniny celých čísel po dělení pěti dávají jen zbytky 0 nebo 1, proto aby platilo $5\mid a^4+b^4$, musí být $5\mid a^4$ a $5\mid b^4$. Pět pak dělí čísla a i b, dostáváme tak kýžené $5\mid a^2$ a $5\mid b^2$.

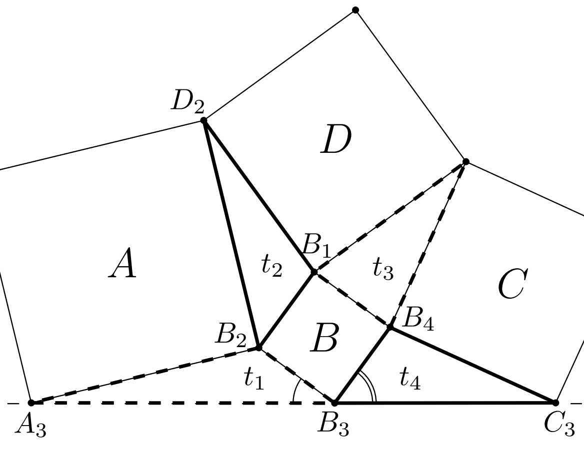
[8] Čtverec je v matematice také druhá mocnina přirozeného čísla.

8. úloha

Na stěně japonského chrámu byl vyrytý obrazec skládající se ze čtyř čtverců A, B, C a D. Čtverce se nepřekrývaly a byly spojené vrcholy[9] tak, že $A_4 = B_2$, $B_4 = C_2$, $D_2 = A_1$, $D_3 = B_1$ a $D_4 = C_1$. Navíc ležely vrcholy A_3, B_3, C_3 na jedné přímce. Dokažte, že pak musel mít čtverec B dvakrát kratší stranu než čtverec D.



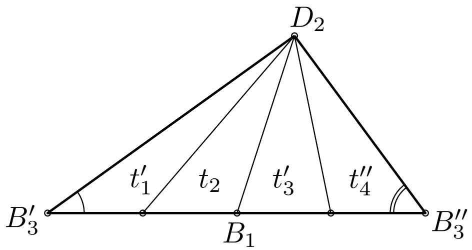
V řešení budeme používat značení ze zadání, navíc si trojúhelníky mezi čtverci a přímkou označme t_1 až t_4 jako na obrázku.



Všimněme si nyní vlastností označených trojúhelníků. Otočíme-li trojúhelník t_1 v bodě B_2 o úhel $-90°$, dostaneme trojúhelník t_1' takový, že bude mít společnou stranu s trojúhelníkem t_2, a navíc budou body B_3', B_2 a B_1 ležet v přímce. Obdobným otáčením trojúhelníků t_3 a t_4

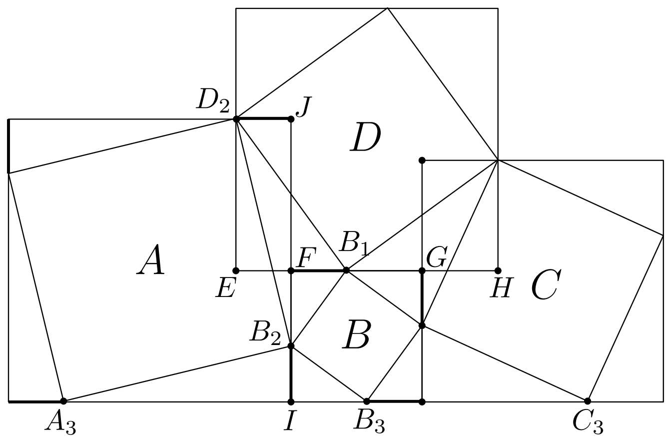
[9] Vrcholy čtverce A označíme proti směru hodinových ručiček A_1, A_2, A_3, A_4, stejně jako u ostatních čtverců.

dostaneme trojúhelník jako na obrázku níže, přičemž nejdřív otáčíme t_4 v bodě B_4 a posléze t_3 a t_4' společně v B_1.



Dále si uvědomme, že součet v obrázku vyznačených úhlů je úhel pravý tehdy a jen tehdy, leží-li body A_3, B_3 a C_3 na přímce, což však zadání předpokládá. Tedy nově vzniklý trojúhelník $B_3'D_2B_3''$ je nutně pravoúhlý. V pravoúhlém trojúhelníku leží střed kružnice opsané ve středu přepony. Proto $|D_2B_1| = |B_1B_3''| = 2|B_1B_2|$, což je námi dokazované tvrzení.

Jiné řešení.
Každému ze čtverců A, B, C a D opíšeme čtverec tak, aby jedna z jeho stran byla rovnoběžná s přímkou A_3C_3. Situaci a značení vidíme na obrázku.



Odvodíme nejprve stěžejní vztah.

$$|FB_1| \overset{(1)}{=} |IB_2| \overset{(2)}{=} |JD_2| \overset{(3)}{=} |EF|,$$

kde rovnost (1) plyne ze shodnosti trojúhelníků $B_1FB_2 \cong B_2IB_3$ (podle věty *usu*), (2) plyne z $A_3IB_2 \cong B_2JD_2$ a (3) z toho, že $EFJD_2$ je obdélník. Neboli $|EB_1| = 2|FB_1|$. Analogicky se ukáže

$$|ED_2| = |HB_1| = \cdots = 2|GB_1| = 2|FB_2|.$$

Podle věty *sus* dostáváme, že $\triangle D_2EB_1$ je podobný s $\triangle B_1FB_2$, a to v poměru $2:1$. Proto i $|D_2B_1| = 2|B_1B_2|$ a jsme hotovi.