8. série

Téma: Finální myšmaš

Datum odeslání: 11. KVĚTNA

1. ÚLOHA

(a) Maminka koupila čokoládu velikosti $n \times (n+1)$ a rozdělila ji spravedlivě[1] mezi Jeníčka a Mařenku. Zatímco Jeníček čokoládu rovnou snědl, Mařenka chce svou část rozdělit mezi n panenek. První panence by ráda dala kousek velikosti 1×1, druhé panence 2×1, třetí 3×1, atd. až n-té panence kousek velikosti $n \times 1$. Může takto svou čokoládu rozdělit? (2 BODY)

(b) Mějme tabulku 6×6, kterou zcela pokryjeme osmnácti dominovými kostkami 2×1. Dokažte, že existují dva sousedící řádky nebo dva sousední sloupce, které nemají společnou[2] dominovou kostku. (3 BODY)

2. ÚLOHA

(a) Kenny má ostroúhlý trojúhelník ABC s těžištěm G. Na přímce AG si sestrojí bod $D \neq A$ takový, že $|AG| = |GD|$ a na přímce BG bod $E \neq B$ takový, že $|BG| = |GE|$. Dokažte, že $|AB| = |BE|$ právě když čtyřúhelník $BDCM$, kde M je střed strany AB, je tětivový. (2 BODY)

(b) Monika má také ostroúhlý trojúhelník ABC, ale tentokrát s průsečíkem výšek H. Na přímce AC má body M a N takové, že N leží na úsečce AC, $|MN| = |AC|$ a A leží na úsečce MN. Navíc si ještě sestrojí bod D jako patu kolmice z M na BC a bod E jako patu kolmice z N na AB. Dokažte, že body E, B, D a H leží na jedné kružnici. (3 BODY)

3. ÚLOHA

(a) O reálných číslech a, b, c víme, že

$$a+b+c>0, \quad abc>0, \quad ab+bc+ca>0.$$

Dokažte pak, že a, b i c jsou nezáporné. (2 BODY)

(b) Najděte všechny polynomy $p(x)$ tvaru $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ s koeficienty $a_i \in \{1, -1\}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$, které mají pouze reálné kořeny. (3 BODY)

4. ÚLOHA

(a) Mějme v rovině $3n$ bodů tak, že žádné tři neleží na přímce. Dokažte, že tyto body tvoří vrcholy n navzájem disjunktních trojúhelníků. (2 BODY)

(b) Lenka má v rovině $n \geq 4$ přímek, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Dokažte, že mezi všemi omezenými oblastmi[3], na něž je rovina těmito přímkami rozdělena, je alespoň $\frac{2}{3}(n-1)$ trojúhelníkových oblastí. (3 BODY)

---

[1] Tj. rozdělila ji na dva stejné obdélníky, ale nerozlomila ani jeden dílek.

[2] Společná dominová kostka je ta, co zasahuje do obou sloupců.

[3] To jsou omezené části roviny, ohraničené danými přímkami takové, že žádná z daných přímek je neprotíná uvnitř.

5. ÚLOHA

(a) Franta z nudy vyrobil následující hlavolam: Vzal si šest korálků a všechny dvojice korálků propojil nitěmi dvou barev. Chce po vás najít jednobarevný trojúhelník. Dále najděte hlavolam s pěti korálky bez jednobarevného trojúhelníku. (2 BODY)

(b) Pavel má podobný hlavolam. Má $1 + k + k^2 + k^3 + \ldots + k^{(n-1)k+1}$ korálků propojených nitěmi k barev. Chce, abyste mu našli n-tici korálků takovou, že všechny nitě spojující kterékoli dva korálky z této n-tice mají stejnou jednu barvu. (3 BODY)

6. ÚLOHA

(a) Miško má pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Označí si M, N po řadě středy stran BC, CD a S jako průsečík AN a FM. Má větší obsah trojúhelník FAS nebo čtyřúhelník $SMCN$? (2 BODY)

(b) Jarda má konvexní pětiúhelník $MYREG$ takový, že trojúhelníky MYR, YRE, REG, EGM a GMY mají obsah 1. Ukažte, že

$$3 < S_{MYREG} < 4.$$ (3 BODY)

7. ÚLOHA

(a) Uvažme kladná reálná čísla a, b s vlastností $ab = 1$. Dokažte

$$\sqrt{\frac{a^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{b^2+1}{2}} \leq a + b.$$ (2 BODY)

(b) Pro kladná čísla a, b, c a d splňující $abc + bcd + cda + abd = a + b + c + d$ dokažte nerovnost

$$\sqrt{\frac{a^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{b^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{c^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{d^2+1}{2}} \leq a + b + c + d.$$ (3 BODY)

Řešení 8. série

1. úloha

(a) Maminka koupila čokoládu velikosti $n \times (n + 1)$ a rozdělila ji spravedlivě[4] mezi Jeníčka a Mařenku. Zatímco Jeníček čokoládu rovnou snědl, Mařenka chce svou část rozdělit mezi n panenek. První panence by ráda dala kousek velikosti 1×1, druhé panence 2×1, třetí 3×1, atd. až n-té panence kousek velikosti $n \times 1$. Může takto svou čokoládu rozdělit?

(b) Mějme tabulku 6×6, kterou zcela pokryjeme osmnácti dominovými kostkami 2×1. Dokažte, že existují dva sousedící řádky nebo dva sousední sloupce, které nemají společnou[5] dominovou kostku.

(a) Jeli n sudé, maminka rozpůlí čokoládu na dva shodné kousky o rozměrech $\frac{n}{2} \times (n + 1)$ a dá je Jeníčkovi a Mařence. Mařenka může důvtipně nalámat svůj díl čokolády na $\frac{n}{2}$ pruhů

[4] Tj. rozdělila ji na dva stejné obdélníky, ale nerozlomila ani jeden dílek.

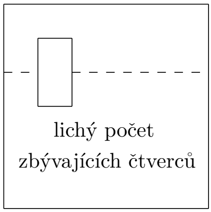
[5] Společná dominová kostka je ta, co zasahuje do obou sloupců.

o rozměrech $(n+1) \times 1$. Následně rozdělí i-tý pruh čokolády na dva dílky o velikostech $i \times 1$ a $(n+1-i) \times 1$ (součet jejich velikostí je vždy $n+1$), čímž udělá radost i-té a $(n+1-i)$-té panence. Provede to tak pro každý pruh čokolády, tedy postupně pro všechna i od 1 do $\frac{n}{2}$. Tak dostane všechny dílky $1 \times 1,\ 2 \times 1,\ \ldots,\ n \times 1$ pro všech svých n panenek (i když ne v tomto pořadí).

Pro n liché dostane Mařenka od maminky čokoládu o rozměrech $\frac{n+1}{2} \times n$ (rozmysli si, že je to jediná možnost). Nejprve odlomí dílek $n \times 1$ pro n-tou panenku a zbyde jí čokoláda o rozměrech $(\frac{n+1}{2} - 1) \times n = \frac{n-1}{2} \times n = \frac{n-1}{2} \times (n-1) + 1$, což lze ale hravě převést na první případ, protože $n-1$ je nyní sudé, a Mařenka bude postupovat, jak je uvedeno výše. Získá dílky 1×1, 2×1, $\ldots$, $(n-1) \times 1$ pro prvních $n-1$ panenek, n-tá panenka byla obdarována jako první.

Pro všechna přirozená n tak lze Mařenčin podíl čokolády rozdělit mezi jejích n panenek.

(b) Důkaz povedeme sporem. Předpokládejme, že každé dva sousední sloupce i řádky mají společnou nějakou dominovou kostku. Pokud by to byla jediná společná kostka, tak se zbylá část tabulky rozdělí na dvě oblasti o lichém počtu čtverečků, které už nezvládneme dominy vyplnit.



Proto mají nutně každé dva sousední sloupce (nebo řádky) alespoň dvě dominové kostky společné.

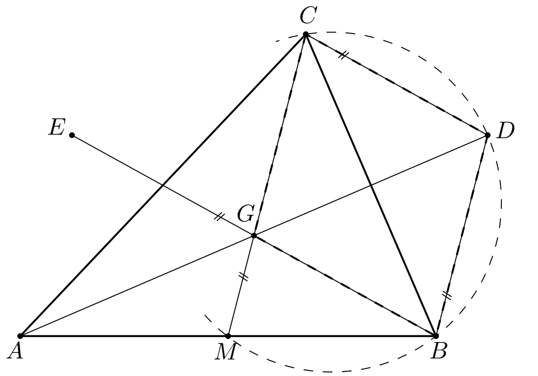
Dvojic sousedních řádků a sousedních sloupců je celkem deset, na propojení všech sousedních řádků a sloupců tak potřebujeme dohromady $10 \cdot 2 = 20$ dominových kostek (dominová kostka může propojovat buďto právě dva řádky, nebo právě dva sloupce). My ale máme jenom 18 kostek, což je kýžený spor.

2. úloha

(a) Kenny má ostroúhlý trojúhelník ABC s těžištěm G. Na přímce AG si sestrojí bod $D \neq A$ takový, že $|AG| = |GD|$ a na přímce BG bod $E \neq B$ takový, že $|BG| = |GE|$. Dokažte, že $|AB| = |BE|$ právě když čtyřúhelník $BDCM$, kde M je střed strany AB, je tětivový.

(b) Monika má také ostroúhlý trojúhelník ABC, ale tentokrát s průsečíkem výšek H. Na přímce AC má body M a N takové, že N leží na úsečce AC, $|MN| = |AC|$ a A leží na úsečce MN. Navíc si ještě sestrojí bod D jako patu kolmice z M na BC a bod E jako patu kolmice z N na AB. Dokažte, že body E, B, D a H leží na jedné kružnici.

(a) Nejprve si dokážeme pomocný fakt, že čtyřúhelník $BDCG$ je rovnoběžník. Úsečka GM je střední příčkou v trojúhelníku ABD, proto je rovnoběžná se stranou BD. Protože ale leží GM na jedné přímce s CG, je i $BD \parallel CG$. Obdobně $BG \parallel CD$ a $BDCG$ je rovnoběžník. Mimo jiné z toho plyne, že $BDCM$ je lichoběžník.

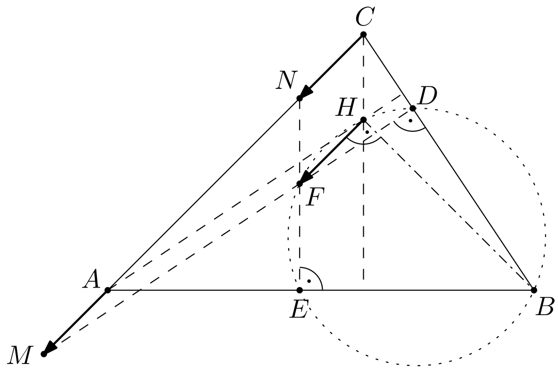


Řešení teď skýtají ekvivalence

$$|AB| = |BE| \quad \Leftrightarrow \quad |MB| = |BG| \quad \Leftrightarrow \quad |MB| = |DC| \quad \Leftrightarrow \quad BDCM \text{ je tětivový}$$

První ekvivalence platí, protože jsou body M a G středy úseček, druhá ze shodnosti protějších stran v rovnoběžníku $BDCG$ a třetí z toho, že lichoběžník $BDCM$ je tětivový, právě když je rovnoramenný.

(b) Uvažujeme posunutí o vektor CN. V něm se H zobrazí na nějaký bod F. F je průsečík výšek trojúhelníku, který vznikl posunutím trojúhelníku ABC. Proto je EF kolmá na EB a FD kolmá na DB, čili E a D leží na Thaletově kružnici s průměrem FB. Zároveň je HF rovnoběžná s CN, a tedy kolmá na HB, takže na této kružnici leží i H.



3. úloha

(a) O reálných číslech a, b, c víme, že

$$a + b + c > 0, \quad abc > 0, \quad ab + bc + ca > 0.$$

Dokažte pak, že a, b i c jsou nezáporné.

(b) Najděte všechny polynomy $p(x)$ tvaru $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ s koeficienty $a_i \in \{1, -1\}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$, které mají pouze reálné kořeny.

(a) Na začiatok si uvedomíme, že z nerovnosti $abc > 0$ plynie, že všetky tri premenné sú nenulové. Ďalším použitím dostaneme, že buď sú a, b, c všetky kladné, alebo práve dve z nich sú záporné. Pre spor bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že b a c sú záporné. Potom vďaka $a + b + c > 0$ platí

$$a > -b - c > 0.$$

Túto nerovnosť využijeme v poslednej nerovnosti, ktorú sme ešte nepoužili, a dôjdeme k sporu

$$bc > -ab - ac > a(-b - c) > (-b - c)^2 = b^2 + 2bc + c^2 > 2bc.$$

Keďže b a c sú záporné, ich súčin je kladný a môžeme ho vykrátiť z nerovnosti, ktorú sme si vyššie odvodili. Takže sme dostali, že $1 > 2$, čo je spor.

(b)

Podľa Mirka Olšáka:
Pre $n = 1$ sú riešením polynómy $x - 1$ a $x + 1$.

Pre $n = 2$ môžeme vyskúšať všetky možnosti a vybrať len tie polynómy, ktoré majú reálne korene, čiže $x^2 + x - 1$ a $x^2 - x - 1$.

Predpokladajme $n > 2$. Označme $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ korene polynómu. Označme $Z = r_1 r_2 \cdots r_n$ súčin všetkých koreňov a z Viètových vzťahov dostávame $Z = a_0 = \pm 1$. Z toho, že $a_1 \in \{-1; 1\}$, plynie, že súčet všetkých $(n-1)$-tic koreňov (členy v n-ticiach sa násobia) bude $Y = \pm 1$. Ďalej z toho, že $a_2 \in \{-1; 1\}$, plynie, že súčet všetkých $(n-2)$-tic koreňov bude $X = \pm 1$. Platí

$$\begin{aligned}
X &= \pm 1 = r_1 r_2 \cdots r_{n-2} + r_1 r_2 \cdots r_{n-3} r_{n-1} + \cdots + r_3 r_4 \cdots r_n, \\
\frac{X}{Z} &= \pm 1 = \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_1 r_3} + \frac{1}{r_2 r_3} + \cdots + \frac{1}{r_{n-1} r_n}, \\
Y &= \pm 1 = r_1 r_2 \cdots r_{n-1} + r_1 r_2 \cdots r_{n-2} r_n + \cdots + r_2 r_3 \cdots r_n, \\
\frac{Y}{Z} &= \pm 1 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \cdots + \frac{1}{r_n}.
\end{aligned}$$

Podobne $a_{n-1} = \pm 1$, resp. $a_{n-2} = \pm 1$ vyjadrujú (až na znamienko) súčet všetkých koreňov, ktorý označme A, resp. súčet všetkých dvojíc koreňov, ten označme B. Z toho môžeme spočítať

$$A^2 - 2B = 1 \pm 2 = r_1^2 + r_2^2 + \ldots\ r_n^2.$$

Pretože korene majú byť reálne, súčet štvorcov na pravej strane rovnosti je nezáporný, takže sa nemôže rovnať -1, ale naopak sa musí rovnať 3. Analogicky môžeme spočítať

$$\left(\frac{Y}{Z}\right)^2 - 2\left(\frac{X}{Z}\right) = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \cdots + \frac{1}{r_n^2} = 3.$$

Súčet týchto dvoch rovníc je teda 6, a ak od tohto súčtu navyše odčítame $2n$, dostaneme

$$6 - 2n = r_1^2 - 2 + \frac{1}{r_1^2} + r_2^2 - 2 + \frac{1}{r_2^2} + \cdots = \left(r_1 - \frac{1}{r_1}\right)^2 + \left(r_2 - \frac{1}{r_2}\right)^2 + \cdots + \left(r_n - \frac{1}{r_n}\right)^2.$$

Pravá strana rovnice je vždy nezáporná, takže $6 - 2n \geq 0$, čiže $n \leq 3$.

Ostáva nám teda rozobrať poslednú možnosť $n = 3$, pričom pre každý koreň r_i platí[6] $(r_i - \frac{1}{r_i}) = 0$, takže $r_i = \pm 1$. Z týchto polynómov

$$
\begin{aligned}
(x+1)(x+1)(x+1) &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1,\\
(x+1)(x+1)(x-1) &= x^3 + x^2 - x - 1,\\
(x+1)(x-1)(x-1) &= x^3 - x^2 - x + 1,\\
(x-1)(x-1)(x-1) &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1
\end{aligned}
$$

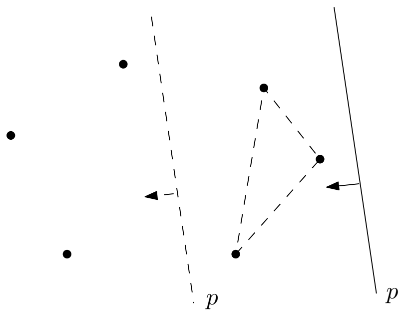
vyhovujú len druhý a tretí.

4. úloha

(a) Mějme v rovině $3n$ bodů tak, že žádné tři neleží na přímce. Dokažte, že tyto body tvoří vrcholy n navzájem disjunktních trojúhelníků.

(b) Lenka má v rovině $n \geq 4$ přímek, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Dokažte, že mezi všemi omezenými oblastmi[7], na něž je rovina těmito přímkami rozdělena, je alespoň $\frac{2}{3}(n-1)$ trojúhelníkových oblastí.

(a) Jistě lze nalézt přímku p, která není rovnoběžná s žádnou spojnicí dvou zadaných bodů (neboť se stačí vyhnout konečně mnoha směrům) a která přitom rozděluje rovinu tak, že všech $3n$ bodů leží v jedné polorovině (dejme tomu v levé). Nyní budeme přímku p posouvat doleva. Ta při svém pohybu bude postupně procházet všemi body, přičemž vždy bude procházet nejvýše jedním bodem, neboť p je různoběžná s každou spojnicí. V okamžiku, kdy přímka p projde třetím bodem, vytvoříme z prvních tří bodů trojúhelník. V tento moment je všech $3(n-1)$ zbývajících bodů vlevo od p, takže právě vytvořený trojúhelník bude jistě s ostatními disjunktní. Tento proces nazveme první krok. Nyní je snadno vidět, že přesně po n krocích budeme mít sestrojeno všech n disjunktních trojúhelníků.

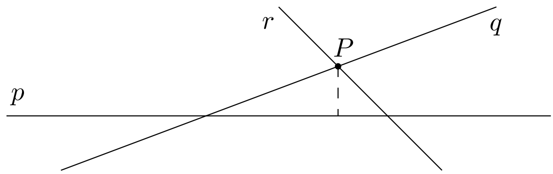


[6] Súčet kvadrátov $\left(r_i - \frac{1}{r_i}\right)^2$ je totiž rovný nule.

[7] To jsou omezené části roviny, ohraničené danými přímkami takové, že žádná z daných přímek je neprotíná uvnitř.

(b) Tato úloha se dala řešit dvěma způsoby. Nejdříve si ukážeme řešení pracující s extremálním[8] principem.

Jednu přímku si pojmenujeme p. Následně najdeme takový průsečík P nějakých jiných dvou přímek, který leží k p co nejblíže (pokud je takových víc, vybereme si jeden z nich). Přímky, které jím procházejí, označíme q a r. Tvrdíme teď, že přímky p, q, r tvoří trojúhelníkovou oblast. Skutečně tato oblast nemůže být protnuta žádnou jinou přímkou, neboť každá taková by vytvořila průsečík bližší k p, což je ve sporu s předpokladem minimální vzdálenosti P od p.



Zopakujeme-li tento postup pro všechny přímky, najdeme tím n trojúhelníků. Každý jsme ale započítali až třikrát (za každou jeho stranu jednou), takže máme na počet trojúhelníkových oblastí odhad jen $n/3$. My bychom potřebovali zhruba dvakrát tolik. Zbývá si uvědomit, že pro většinu přímek můžeme argument z předchozího odstavce provést na obě dvě strany přímky. Pro které přímky to nepůjde? Jsou to ty, od nichž leží všechny průsečíky na jedné straně (nazvěme je „špatné“).

Snadno si rozmyslíme, že pro $n \geq 4$ mohou být špatné přímky nejvýše dvě. Pokud by totiž existovaly špatné přímky tři, pak by tvořily trojúhelník a každá další přímka by musela protnout všechny tři strany tohoto trojúhelníka v jejich vnitřních bodech. To však nelze.

Pro dvě špatné přímky získáváme na počet trojúhelníkových oblastí kýžený odhad

$$\frac{(n-2)\cdot 2 + 2\cdot 1}{3} = \frac{2(n-1)}{3}.$$

Dá se však najít i silnější odhad, který objevil Adam Vyškovský.

Silnější odhad podle Adama Vyškovského:

Dokážeme si nejdříve velmi jednoduché pomocné tvrzení:

Lemma. *Kdykoliv máme v rovině tři přímky vytvářející trojúhelník, který je protnut jinými k přímkami, pak uvnitř existuje trojúhelníková oblast.*

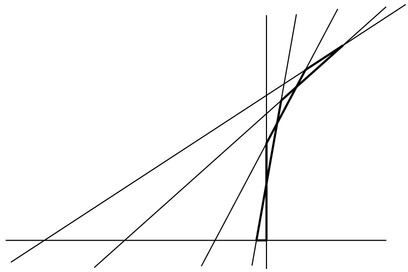
Důkaz. Budeme postupovat indukcí. Pro $k = 0$ tvrzení platí. Nechť tedy tvrzení platí pro k přímek a dokážeme, že potom platí i pro $k+1$ přímek. Nechť pro k přímek existuje trojúhelníková oblast T_k. Přidaná přímka buďto oblast T_k neprotíná, pak zvolme $T_{k+1} = T_k$, nebo ji protíná a rozdělí ji (vzhledem k tomu, že přímky jsou v obecné poloze) na čtyřúhelníkovou oblast a trojúhelníkovou oblast T', pak zvolme $T_{k+1} = T'$ a jsme hotovi.

Nyní si vybereme zcela libovolně ze zadaných přímek přímku p. Ta je protnuta zbývajícími $n-1$ přímkami v bodech, které zleva doprava označíme $A_1, \ldots, A_{n-1}$ a příslušné přímky $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Pomocné tvrzení budeme aplikovat na trojici přímek p, a_1, a_2, poté na trojici p, a_2, a_3, atd., až nakonec na trojici p, a_{n-2}, a_{n-1}. Uvědomme si ještě, že trojúhelníky tvořené

[8] Extrémální princip je důkazová technika založená na předpokladu, že vezmeme minimum a nemůže proto existovat něco ještě menšího – čímž často dojdeme ke sporu a tím tvrzení dokážeme.

těmito trojicemi mají společnou nejvýše jednu hranu, tudíž uvnitř nich nalezené trojúhelníkové oblasti musí být navzájem různé. Trojic je celkem $n-2$, takže jsme právě dokázali, že existuje alespoň $n-2$ trojúhelníkových oblastí. Nerovnost $n-2 \geq \frac{2}{3}(n-1)$ je však splněna pro každé $n \geq 4$.

Poznamenejme ještě, že opravdu existuje rozmístění n přímek takové, že je vytvořeno přesně $n-2$ trojúhelníkových oblastí. Inspirací budiž následující obrázek.



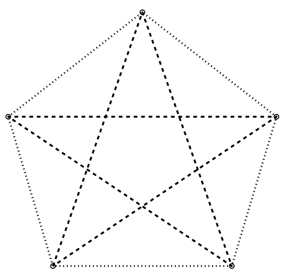
5. úloha

(a) Franta z nudy vyrobil následující hlavolam: Vzal si šest korálků a všechny dvojice korálků propojil nitěmi dvou barev. Chce po vás najít jednobarevný trojúhelník. Dále najděte hlavolam s pěti korálky bez jednobarevného trojúhelníku.

(b) Pavel má podobný hlavolam. Má $1 + k + k^2 + k^3 + \ldots + k^{(n-1)k+1}$ korálků propojených nitěmi k barev. Chce, abyste mu našli n-tici korálků takovou, že všechny nitě spojující kterékoli dva korálky z této n-tice mají stejnou jednu barvu.

(a) Nejprve dokážeme, že v každém hlavolamu ze šesti korálků existuje jednobarevný trojúhelník. Barvy nití, které Franta používá, nechť jsou červená a zelená. Uvažme libovolný korálek, označme jej A. Z něj vede celkem 5 nití, tedy alespoň 3 z nich stejné barvy, třeba červené. Podívejme se nyní na tři korálky, které jsou spojeny s korálkem A těmito třemi červenými nitěmi. Jsou-li kterékoli dva z nich propojeny červenou nití, tvoří spolu s korálkem A červený trojúhelník. Jsou-li ovšem každé dva spojeny zelenou nití, tvoří tyto tři korálky zelený trojúhelník.

Z úvah v právě uvedeném důkazu plyne, že hlavolam bez jednobarevného trojúhelníku nemůže obsahovat korálek, ze kterého vedou tři nitě stejné barvy. Proto v takovém hlavolamu s pěti korálky musí z každého korálku vycházet právě dvě nitě jedné a právě dvě nitě druhé barvy. Příslušný pětikorálkový hlavolam tedy vypadá takto.



(b) Uvažme libovolný korálek r_1. Z něj vede celkem $k+k^2+\cdots+k^{(n-1)k+1} = k\,(1+k+\cdots+ + k^{(n-1)k})$ nití k barev, tedy aspoň $1+k+\cdots+k^{(n-1)k}$ nití stejné barvy b_1. Množinu korálků, které jsou s korálkem r_1 spojeny nití barvy b_1, označme M_1. Uvažme libovolný korálek r_2 z této množiny. Z něj vede minimálně $k+\cdots+k^{(n-1)k}$ nití k barev do korálků z množiny M_1, tedy aspoň $1+k+\cdots+k^{(n-1)k-1}$ z nich má stejnou barvu b_2. Podmnožinu množiny M_1 korálků, které jsou s korálkem r_2 spojeny nití barvy b_2, označme M_2. Všechny korálky z této množiny jsou spojeny nití barvy b_1 s korálkem r_1 a nití barvy b_2 s korálkem r_2. Postupujeme-li takto dále, vybereme postupně korálky $r_1, r_2, \ldots, r_{(n-1)k+1}$ a ke každému r_m $(m = 2, 3, \ldots, (n-1)k+1)$ najdeme množinu M_m alespoň $1+k+\cdots+k^{(n-1)k+1-m}$ korálků z množiny M_{m-1}, které jsou spojeny s korálkem r_m nitěmi stejné barvy b_m. Všechny korálky z množiny M_m jsou tak spojeny nití barvy b_1 s korálkem r_1, nití barvy b_2 s korálkem r_2, … , nití barvy b_m s korálkem r_m. Nyní máme celkem $(n-1)k+1$ barev $b_1, b_2, \ldots, b_{(n-1)k+1}$ a podle Dirichletova principu (používáme nitě k barev) existuje barva b, která se mezi nimi vyskytuje alespoň n-krát, tzn. existují indexy $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{1, 2, \ldots, (n-1)k+1\}$, $\quad i_1 < i_2 < \cdots < i_n$, takové, že $b_{i_1} = b_{i_2} = \cdots = = b_{i_n} = b$. Potom ovšem $r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots, r_{i_n}$ tvoří hledanou n-tici korálků, neboť každý korálek r_{i_l} $(l = 2, 3, \ldots, n)$ je spojen s korálky $r_{i_1}, \ldots, r_{i_{l-1}}$ nitěmi barev $b_{i_1}, \ldots, b_{i_{l-1}}$, neboli nitěmi barvy b.

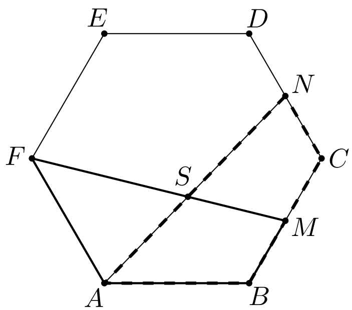
6. úloha

(a) Miško má pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Označí si M, N po řadě středy stran BC, CD a S jako průsečík AN a FM. Má větší obsah trojúhelník FAS nebo čtyřúhelník $SMCN$?

(b) Jarda má konvexní pětiúhelník $MYREG$ takový, že trojúhelníky MYR, YRE, REG, EGM a GMY mají obsah 1. Ukažte, že

$$3 < S_{MYREG} < 4.$$

(a) Podle zadání si načrtneme obrázek.



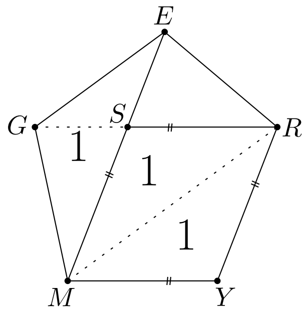
Čtyřúhelníky $ABCN$ a $FABM$ jsou shodné, protože rotace se středem ve středu šestiúhelníka a úhlem 60° převádí $FABM$ na $ABCN$. Proto jsou i jejich obsahy stejné, tedy $S_{FABM} = = S_{ABCN}$. Nyní zkusme od obou zmíněných obsahů odečíst obsah čtyřúhelníka $ABMS$. Dostaneme

$$S_{FAS} = S_{FABM} - S_{ABMS} = S_{ABCN} - S_{ABMS} = S_{MCNS},$$

čehož jsme chtěli dosáhnout.

(b) V zadání části (b) se na poslední chvíli přidával dodatečný předpoklad, že pětiúhelník $MYREG$ musí být konvexní. Proto si zde ukážeme jednak řešení pro konvexní pětiúhelník a jednak zde uvedeme nekonvexní pětiúhelník, který nesplňuje dokazovanou nerovnost.

Je-li $MYREG$ konvexní, pak označme S průnik ME a RG. Vezměme si stranu MY. Pro polohu bodů G a R máme dvě možnosti. Kdyby G a R ležely v opačných polorovinách vyťatých přímkou MY, pak by $MYREG$ nebyl konvexní, což nechceme. Proto G i R leží ve stejných polorovinách (vyťatých přímkou MY) a ze shodnosti obsahů MYR a MYG je $GR \parallel MY$. Obdobnou úvahou o obsazích trojúhelníků RYM a RYE dostaneme $RY \parallel ME$.



Z těchto dvou rovnoběžností plyne, že $MYRS$ je rovnoběžník, a tedy

$$S_{MYRS} = 2S_{MYR} = 2.$$

Ještě připomeneme, že ze zadání máme $S_{MEG} = 1$. Tedy

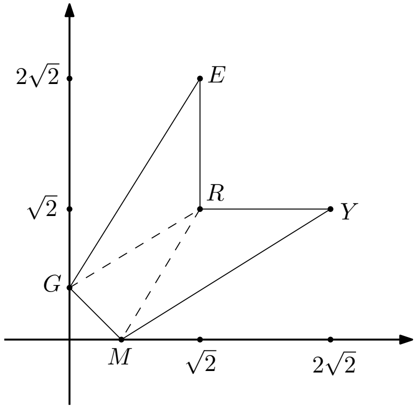
$$S_{MYREG} = S_{MYRS} + S_{MEG} + S_{RES} = 2 + 1 + S_{RES} = 3 + S_{RES}.$$

Pro odhad $3 < S_{MYREG} < 4$ nám stačí dokázat odhad

$$0 < S_{RES} < 1.$$

Odhad $0 < S_{RES}$ je jasný z obrázku, druhý odhad dostaneme ze vztahu $S_{RES} < S_{REG} = 1$. Tím jsme dokázali $3 < S_{MYREG} < 4$.

Uveďme ještě příklad nekonvexního pětiúhelníku $MYREG$, který má obsah menší než 3. Zaveďme souřadnicový systém a definujme body M, Y, R, E a G následovně. Buď $M = (x, 0), Y = (2\sqrt{2}, \sqrt{2}), R = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), E = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ a $G = (0, x)$, kde x je voleno tak, aby $MY \parallel GR$.



V takto zvoleném $MYREG$ovi je (po snadném dopočtu) $S_{MYR} = 1$ a $S_{YRE} = 1$. Jelikož platí $MY \parallel GR$, je $S_{GMY} = S_{MYG}$ a díky symetričnosti celého pětiúhelníku je i $S_{REG} = S_{EGM} = S_{MYG}$. Celkově tak dostáváme požadovanou rovnost

$$S_{GMY} = S_{MYR} = S_{YRE} = S_{REG} = S_{EGM} = 1.$$

7. úloha

(a) Uvažme kladná reálná čísla a, b s vlastností $ab = 1$. Dokažte

$$\sqrt{\frac{a^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{b^2+1}{2}} \le a + b.$$

(b) Pro kladná čísla a, b, c a d splňující $abc + bcd + cda + abd = a + b + c + d$ dokažte nerovnost

$$\sqrt{\frac{a^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{b^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{c^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{d^2+1}{2}} \le a + b + c + d.$$

(a + b) Všimněte si, že pokud v druhé z dokazovaných nerovností položíme $c = d = 1$, získáme první nerovnost. Stačí tedy ukázat platnost nerovnosti (b).

Klíčem k řešení je nápaditě využít zadanou podmínku. Po chvíli hraní zjistíme, že díky ní platí

$$(a + b)(a + c)(a + d) = (a^2 + 1)(a + b + c + d),$$

což se dá snadno ověřit roznásobením. Odtud vyjádříme $(a^2 + 1)$, dosadíme do dokazované nerovnosti a totéž uděláme i pro ostatní proměnné. Dokazovaná nerovnost po další (ekvivalentní) úpravě přejde do tvaru

$$\left(\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)(a+d)}{2}} + \cdots + \sqrt{\frac{(d+a)(d+b)(d+c)}{2}}\right)^2 \le (a + b + c + d)^3.$$

Tato nerovnost se již dá řešit běžnými postupy, konkrétně pomocí Cauchyho nerovnosti. Všimneme si, že platí

$$a+b+c+d=\frac{(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)}{2}.$$

A po nalezení obdobného vztahu pro druhou mocninu

$$(a+b+c+d)^2=(a+c)(a+d)+(b+d)(b+a)+(c+a)(c+b)+(d+b)(d+c)$$

můžeme sestavit Cauchyho nerovnost

$$\Big((a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)\Big)\Big((a+c)(a+d)+\cdots+(d+b)(d+c)\Big)$$
$$\geq$$
$$\left(\sqrt{(a+b)(a+c)(a+d)}+\cdots+\sqrt{(d+a)(d+b)(d+c)}\right)^2,$$

která je již zřejmě ekvivalentní tomu, co jsme chtěli dokázat.