Povídání ke čtvrté sérii

Teorie čísel je jednou z nejstarších částí matematiky. Aby se ti úlohy z ní lépe řešily, uvedeme zde několik užitečných faktů a ukážeme si zde, jak řešit rovnici v přirozených číslech (takovým rovnicím se říká diofantické). Všechna uvedená tvrzení můžeš používat v řešeních bez důkazu.

Často je výhodné prozkoumat dělitelnost čísel, o která se v úloze jedná. K vyřešení našeho závěrečného příkladu použijeme skutečnost, že druhá mocnina přirozeného čísla dává při dělení číslem 8 jeden z těchto tří zbytků: 0, 1, 4 (rozmysli si, proč tomu tak je).

Pro práci s celými čísly lze někdy využít kongruencí. Řekneme, že číslo a je *kongruentní* s číslem b při modulu m (a píšeme $a \equiv b \pmod{m}$), pokud čísla a a b dávají stejný zbytek při dělení m.

Pro kongruence platí několik užitečných faktů. Předně, pokud je $a \equiv b \pmod{m}$ a $c \equiv d \pmod{m}$, pak také $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ a $ac \equiv bd \pmod{m}$. Tedy kongruence stejného modulu lze mezi sebou sčítat a násobit podobně jako obyčejné rovnosti. Pro odčítání to platí také, avšak dělení je poněkud zákeřnější a nemusí fungovat.

O kongruencích platí i silnější tvrzení, uveďme zde jen to nejznámější (a hojně užívané).

Věta. (Malá Fermatova) *Nechť p je prvočíslo a a je přirozené číslo nedělitelné p. Potom*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Naše povídání ukončíme řešeným příkladem:

Příklad. Ukažte, že rovnice $x^2 = 3 - 8z + 2y^2$ nemá řešení v celých číslech.

Řešení. Asi nejpřirozenější přístup k řešení této úlohy je sporem. Předpokládáme, že nějaké řešení máme a odvodíme spor. K tomu účelu je dost často dobré počítat obě strany zadané rovnosti modulo nějaké číslo. V našem případě můžeme postupovat například takto: Vidíme, že $x^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$ (tzn. levá strana naší rovnice dává při dělení osmi jeden ze zbytků 0,1, nebo 4). Pokud je y sudé, pak pro pravou stranu platí $3 - 8z + 2y^2 \equiv 3 \pmod{8}$, což nelze. Pokud je y liché, pak $3 - 8z + 2y^2 \equiv 5 \pmod{8}$, což opět není možné, neboť levá strana ani zbytek 3, ani zbytek 5 při dělení číslem 8 nemůže nikdy dát.

4. série

Téma: Teorie čísel

Datum odeslání: 14. ledna 2008

0. úloha (1 bod)

Vymyslete číslo s co nejošklivějšími vlastnostmi.

1. úloha (3 body)

Král lentilkového království se rozhodl vdát svou nejstarší dceru. Přišlo mnoho nápadníků, a tak jim král řekl: „Svoji dceru dám za ženu tomu z vás, kdo mi donese tolik lentilek, že když je rozdělím stejným dílem šesti dcerám, zůstanou mi čtyři, když je rozdělím na sedm dní v týdnu, zbudou mi tři, a když se rozhodnu rozdat je těm deseti dětem, co si hrají pod hradbami, zbudou mi dvě.“ Poraďte hloupému Honzovi, jak získat princeznu.

2. ÚLOHA (3 BODY)

Pro prvočíslo p a přirozené číslo m platí: čísla $m + 2007$ a $m - 2007$ jsou násobky p. Najděte všechna možná p.

3. ÚLOHA (3 BODY)

Najděte všechny dvojice přirozených čísel n a m, pro která platí:

$$7n^2 = m^2.$$

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť x, y jsou libovolná celá čísla. Dokažte, že $2x + 7y$ je dělitelné jedenácti, právě když je $4x + 3y$ dělitelné jedenácti.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Najděte takové čtyřciferné číslo, že jeho první cifra je stejná jako druhá, třetí cifra je stejná jako čtvrtá a současně je toto číslo druhou mocninou (nějakého) přirozeného čísla.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dokažte, že číslo $\dfrac{3^{2007} - 1}{2}$ je liché a složené.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Najděte přirozená čísla a, b a c taková, že číslo a je dělitelné jedenácti a není dělitelné devíti, naopak číslo b je dělitelné devíti, ale není jedenácti. Navíc čísla a, b, c splňují:

$$a^{99} + b^{99} = c^{100}.$$

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Najděte všechna prvočísla p taková, že k nim existují přirozená a, b splňující $p^3 = a^3 - b^2$ a přitom $NSD(b, 3p) = 1$.[1]

Řešení 4. série

0. úloha

Vymyslete číslo s co nejošklivějšími vlastnostmi.

Všichni řešitelé získali za svá řešení bod. Nejzajímavější řešení otiskujeme níže, čokolády putují těm nejlepším: Helči Pučelíkové, Pepovi Tkadlecovi, Kubovi Töpferovi a Hance Šustkové. Výhercům gratulujeme :)

Které číslo je opravdu nejošklivější, to nevím. Každý na to má také jiný názor. Většina řešitelů postupovala dle známého rčení: „Kdo hledá, najde“. Prostě si vybrala nějaké jim nesympatické číslo, ať z objektivních, či osobních důvodů. Například důvod Heleny Pučelíkové lze jen stěží označit za objektivní.

[1] Kouzelná zkratka NSD značí ~~nejmenšího~~ největšího společného dělitele čísel b a $3p$.

Helena Pučelíková
Chtěla bych se s vámi podělit o zjištění, že číslo 107 má jednu z nejošklivějších vlastností, co lze. Chudinka 107 za to skoro vlastně ani nemůže, takže ho nebudu pomlouvat úplně a na začátek bych uvedla dvě pěkné vlastnosti. První z nich je, že přepíšu-li 107 do dvojkové soustavy (pozn. takové číslo se většinou značí $\langle 107 \rangle_2$.), dostanu číslo symetrické, tedy z obou stran jde přečíst stejně. Druhá pěkná vlastnost je, že když ve svém datu narození poodečítám vždy dvojice čísel, dostanu 0,1,7 a 8. A 8 ještě lze rozepsat na $1+0+7$.

Každopádně 107 má jednu jedinou ošklivou vlastnost, která je ale schopna zastínit všechny pěkné. U nás na gymplu existuje kabinet 107, ve kterém sídlí naše chemikářka, naše čestinářka a naše třídní, angličtinářka. A právě s paní chemikářkou (manželkou pana ředitele) je největší problém. Jako důkaz posílám fotečku[2]. Netvrďte mi, že tohle je normální člověk schopný.

To bych se vskutku tvrdit neodvážil. Josef Tkadlec a Miroslav Olšák k řešení přistoupili o trochu více matematicky.

Josef Tkadlec
Nejošklivější číslo je 133. Důvody:
- Je tlusté.
- Je nevyvážené (padá doprava).
- Tváří se jako prvočíslo, ale není.
- Má příliš úzké vztahy s číslem 2007, které už je `OUT`.

$$133 = 2^7 + 7 - 2, \qquad 133 = \frac{\binom{7}{2}^2}{2 \cdot 7} + 7, \qquad 133 = \frac{1}{2}\left(\frac{2007}{2+7} + \left(42 + \binom{42}{42}\right)\right),$$

$$2+0+0+7 = 1 \cdot 3 \cdot 3, \qquad 3^3 = 27.$$

- Je to nejmenší číslo, které neumím zapsat z 1,9,9 a 9 pomocí $+, -, \cdot, :, \hat{}, \sqrt{\ }$, ! a ().

$$19 = 1 + \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} + 9 = 19 - 9 + 9, \qquad 42 = 1 \cdot (\sqrt{9})! \cdot (\sqrt{9})! + (\sqrt{9})!.$$

Miroslav Olšák
Nejošklivější vlastnost má číslo 7, protože má málo krásných matematických vlastností na rozdíl od předchozích čísel:
1 je neutrální prvek v násobení, nejmenší přirozené číslo a navíc jedna z nejlepších známek, které jdou na základce[3] dostat.
2 je nejmenší prvočíslo, které je navíc jediné sudé, a k tomu má krásnou vlastnost $2+2 = 2 \cdot 2 = 2^2$.
3 je součtem těch předchozích přirozených čísel, je nejmenší liché prvočíslo a zbytek libovolného čísla po dělení trojkou je stejný jako zbytek po dělení jeho ciferného součtu.
4 je výsledek té krásné vlastnosti dvojky. 4 je s dvojkou navíc provázána krásnou vlastností $\sqrt[4]{4} = \sqrt[2]{2}$.

[2] součástí řešení byla přilepená fotografie, o kterou se s vámi bohužel nemůžeme podělit, je to fotka třídy při hodině chemie a uvnitř visí pět nástěnných periodických tabulek.

[3] nejenom na základce (pozn. red.)

5 je prvočíslo, které je součtem předchozích prvočísel. Dále platí, že 5^{n+1} je pro každé přirozené n zakončené na dvojčíslí 25.

6 $= 1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Jakub Töpfer se naopak ve svém krásném řešení vůbec neinspiroval matematikou, nýbrž medicínou.

Jakub Töpfer

Petr byl jednou nemocný a musel si každý den několikrát měřit teplotu. Jako většina lidí k tomu používal obyčejný rtuťový teploměr. Petr ale nechtěl být nemocný, a tak se vždy na stupnici díval s obavami. Obzvláště se bál těch čísel, která byla nejvýš. Nejošklivější mu připadalo to úplně nahoře, vždy se děsil, aby jeho teplota nedosáhla tak vysoko. Bylo to číslo 42.

Pokud nevěříte, tak se dojděte přesvědčit do své lékárničky. Skutečně standardní teploměr končí na teplotě 42°C. To má svůj důvod. Při této teplotě totiž dojde k devastaci některých bílkovin v lidském těle a následnému kolapsu.

Také se tak bojíte vysoké teploty? Pak je možná i pro vás nejošklivějším číslem 42.

Jiří Hadrava

Nejošklivější číslo je:

$$89264837258427964151048274587132816978462782959925873621089547245961.$$

Toto číslo má velmi ošklivou vlastnost: je nezapamatovatelné. A i kdyby se ho někdo naučil, stejně mu jeho znalost k ničemu nebude.

Dva řešitelé, Alena Bušáková a Pavel Kratochvíl, považovali za nejošklivější nulu a měli pro to i podobné důvody. Osobně se mi také nula nelíbí, ostatně většina lidí s tímto číslem nechce být spojována.

Alena Bušáková

Dle mého názoru má nejošklivější vlastnosti číslo nula. Několikrát se mi při počítání stalo, že mi vyšel krásný výsledek jako $f = \frac{2}{0}$. Ale my přece nulou neumíme dělit! Prostě nula kazí, co jen může. Zkuste třeba zadat na kalkulačku $\sqrt[0]{1}$ – `error`, 0^{-1} – `error`, $\operatorname{cotg} 0$ – `error`, 0^0 – `error`. A tak dále, a tak dále.

Nuly jsou tvrdohlavé a všemožně se snaží, aby s nimi nešlo rozumně počítat.

Pavel Kratochvíl

Nejošklivější číslo je nula. Má hned několik ošklivých vlastností:

- Nejde s ní dělit.
- Při násobení nulou nevyjde žádné hezké číslo – vždy vyjde nula.
- Má ošklivé značení, neforemný ovál 0.
- Při umocňování a^0 vždy vyjde stejné číslo – jednička.
- Při umocňování 0^a vždy vyjde ošklivé číslo – nula.
- Odmocňování $\sqrt[0]{a}$ pro jistotu vůbec nejde.
- A odmocňování $\sqrt[a]{0}$ sice jde, ale zase vyjde něco ošklivého – nula.
- Nula je k ničemu, ať ji k něčemu přičtu nebo odečtu, nikdy nic nezmění.

Josef Ondřej naopak tvrdil, že nejošklivější číslo neexistuje. Správnost jeho argumentace můžete posoudit sami.

Josef Ondřej
Ukážeme, že takovéto číslo neexistuje. Jak všichni víme, nejhezčí číslo je bezesporu jednička. Nejošklivější číslo by logicky mělo být obráceno hodnotou čísla nejhezčího, ale protože obrácená hodnota 1 je zase 1 ($1^{-1} = 1$), nejošklivější číslo nemůže existovat, protože by to byl spor s bezesporným předpokladem, že jednička je nejhezčí číslo.

A na závěr jedna moc pěkná pohádka od Hany Šustkové.

Hana Šustková
Žilo bylo jedno číslo s velmi ošklivou náturou. Byla to oranžová trojka ze sešitu jednoho druháka, která si velmi ráda otvírala ústa na ojedinělé jedničky či raritní dvojky. Vedla partu trojek už od narození a v sešitě češtiny si velmi ráda prohlížela červeně označené mišlenky, pišné princezny, dokonce i samotnou L$y$buši, na nichž demonstrovala svou sílu v ručičkách. Jednoho květnového dne, kdy se malý Luboš drbal za uchem a vymýšlel, co s tou trojkou z češtiny asi udělá, vylezla trojka Bětka z úkrytu mezi řádky a zavelela: „Holky, zase to trochu roztočíme!“ Vůbec nedbala kňučení jedniček, zalézajících dvojek mezi řádky, ba ani podpisů rodičů, které se úplně zapletly a rozpletly.

Jenže jednou, jednou ji někdo trumfnul. Luboš si totiž o hodině matematiky vedle Bětky napsal nové číslo. Jmenovalo se i.

„Co je to za jméno?“ ofrňovala se Bětka a lomila ručičkama nad bříškem.

A malé i se zavrtělo a šeplo: „Já jsem odmocnina z minus jedné.“

Bětka, která zatím ještě neviděla ani minus jedničku, málem upadla, zatočila očkama a křikla na svou partu trojek, co zrovna rabovaly v češtině. Holky přiběhly a všechny čučely na i jako tvrdá y.

„Co je to?“ zachrochtala jako první trojka s velkým prasečím čumáčkem.

„i,“ představilo se i.

„Odmocnina z minus jedné,“ dodala trojka Bětka.

Byla tak překvapená, že úplně zapomněla ničit ostatní známky v sešitě. Chodila po špičkách kolem i a ruce se jí klepaly. Byla vedle jak ta jedle. Dosud si myslela, že ona má ty nejhorší vlastnosti, které může číslo mít – drzá, panovačná, sklony k hegemonii. Ale pak si přijde to i a vymýšlí si! To bylo nad kapacity Bětky. V sešitech se uklidnilo. Bětka se stáhla.

„To je ale ošklivé číslo!“ říkal si pak Luboš a číslo schraňoval a schraňoval. A trojka si pak vedle i začala libovat, jak vyzrála na všechny – může být horších vlastností, než že k sobě přivolá ještě silnější kamarády? Vždyť díky i se Bětka dostala i k takovým jménům, jako byl Ludolf nebo sir Sin.

A pak ji jednou něco napadlo, našla jedno $+$ a $-$ a dala je nad sebe, vzniklo $\pm$ (to také dosud neviděla), a jak tak byla v tom tvoření, přiběhla k i a položila ho za něj. Najednou uklouzla a už tam ležela taky. Tak na jednom řádku bylo $i \pm 3$.

Luboš se divil, co to tam má, a tak se pokusil si své nové známkové číslo převést do goniometrického tvaru, ale zakopal se na zrádném π. Ještěže se mu podařilo určit alespoň absolutní velikost.

1. úloha
Král lentilkového království se rozhodl vdát svou nejstarší dceru. Přišlo mnoho nápadníků, a tak jim král řekl: „Svoji dceru dám za ženu tomu z vás, kdo mi donese tolik lentilek, že když je

rozdělím stejným dílem šesti dcerám, zůstanou mi čtyři, když je rozdělím na sedm dní v týdnu, zbudou mi tři, a když se rozhodnu rozdat je těm deseti dětem, co si hrají pod hradbami, zbudou mi dvě.“ Poraďte hloupému Honzovi, jak získat princeznu.

Prvé riešenie:
Zo zadania vieme, že počet lentiliek n sa musí dať zapísať v tvaroch $n = 6a+4 = 7b+3 = 10c+2$, kde $a, b, c \in \mathbb{N}$. Teda $a = \frac{10c-2}{6} \in \mathbb{N}$ a $b = \frac{10c-1}{7} \in \mathbb{N}$. Aby $\frac{10c-2}{6} \in \mathbb{N}$, musí sa c dať vyjadriť v tvare $c = 3k + 2; k \in \mathbb{N}_0$ (platí $\frac{10(3k+2)-2}{6} = \frac{30k+18}{6} \in \mathbb{N}$). Aby $\frac{10c-1}{7} \in \mathbb{N}$, c sa musí dať vyjadriť v tvare $c = 7l + 5; l \in \mathbb{N}_0$ (platí $\frac{10(7l+5)-1}{7} = \frac{70l+49}{7} \in \mathbb{N}$). Takže $c = 3k + 2 = 7l + 5$, teda $3k = 7l + 3$. Z tohto zápisu je zrejmé, že l musí byť násobkom troch, teda $l = 3m; m \in \mathbb{N}_0$. Odtiaľ $3k = 7l + 3 = 21m + 3$, preto $c = 3k + 2 = 21m + 5$ a $n = 10c + 2 = 10(21m + 5) + 2 = = 210m + 52; m \in \mathbb{N}_0$.

Druhé riešenie pomocou kongruencií:
Zo zadania vieme, že pre počet lentiliek n platí:

$$\begin{aligned} n &\equiv 4 \pmod 6 \\ n &\equiv 3 \pmod 7 \\ n &\equiv 2 \pmod{10} \end{aligned}$$

To môžme prepísať ako

$$\begin{aligned} (n-10) &\equiv -6 \equiv 0 \pmod 6 \\ (n-10) &\equiv 0 \pmod 7 \\ (n-10) &\equiv 2 \pmod{10}. \end{aligned}$$

Teda číslo $(n-10)$ je deliteľné číslami 6 a 7 a zároveň končí číslicou 2. Najmenší spoločný násobok čísel 6 a 7 je číslo 42 ($NSN(6,7) = 42$), ktoré zároveň končí číslicou 2, teda najmenšie možné je $n = 42 + 10 = 52$. Každé ďalšie n bude väčšie o $nsn(6, 7, 10) = 210$, pretože týmto krokom sa nezmenia zvyšky po delení čísla n číslami 6, 7 a 10.

2. úloha
Pro prvočíslo p a přirozené číslo m platí: čísla $m + 2007$ a $m - 2007$ jsou násobky p. Najděte všechna možná p.

Hlavným cieľom pri tejto úlohe bolo uvedomiť si, že ak číslo p delí nejaké dve čísla a a b, tak musí deliť aj ich rozdiel. Dôkaz tohto tvrdenia je ľahký, dalo sa to spraviť napríklad tak, že označíme $a = kp, b = lp$ a odčítaním dostávame $a - b = (k - l)p$. Iný spôsob využíval kongruencie z úvodu k štvrtej sérii:

$$a \equiv 0 \wedge b \equiv 0 \pmod p \;\Rightarrow\; a - b \equiv 0 \pmod p$$

Hurá, môžme to použiť na našu úlohu. **Ak** p delí $m + 2007$ aj $m - 2007$, **tak** p delí aj ich rozdiel $m+2007-(m-2007) = 2\cdot2007 = 2\cdot3^2\cdot223$. Keďže p je prvočíslo, musí byť z prvočíselného rozkladu $2 \cdot 2007$, čiže p môže byť len 2, 3 alebo 223.

Mohlo by sa zdať, že tým sme úlohu vyriešili. Ale nie je to pravda, touto úvahou sme len vylúčili všetky čísla okrem 2, 3 a 223. Prečo? Pretože sme ukázali, že **ak** niečo platí, **tak** to má nejaký dôsledok. (V našom prípade je dôsledok „p delí $2 \cdot 2007$“.) To ale neznamená, že ak je dôsledok splnený, platí aj pôvodná podmienka.

Čo zostáva, je overiť, že pre 2, 3 a 223 vieme nájsť nejaké m tak, aby naše prvočísla delili oba výrazy. Najjednoduchšie je priamo ho zvoliť, napr. $m = 2007$. To vyhovuje pre všetky tri, pretože p má deliť 0 a $2 \cdot 2007 = 2 \cdot 3^2 \cdot 223$, čo je splnené. A tým je dôkaz úplne hotový.

3. úloha

Najděte všechny dvojice přirozených čísel n a m, pro která platí:

$$7n^2 = m^2.$$

Úlohu ste mali správne skoro všetci a pre tých pár, ktorým sa to nepodarilo, je tu vzorové riešenie:

Zo zadania vieme, že m^2 a n^2 sú druhé mocnimy prirodzených čísel. V prvočíselnom rozklade čísla, ktoré je druhou mocninou prirodzeného čísla, sa každé prvočíslo nachádza s párnym exponentom (skús si rozmysliet prečo). To ale znamená, že na ľavej strane rovnice máme prvočíslo 7 s nepárnym exponentom a na pravej strane s párnym exponentom, čo je spor. Preto neexistujú nijaké prirodzené m a n vyhovujúce zadaniu.

Iné riešenie:

m a n sú prirodzené čísla, preto rovnicu môžeme odmocniť

$$\sqrt{7}\, n = m$$

a po úprave dostaneme:

$$\sqrt{7} = \frac{m}{n}.$$

$\sqrt{7}$ je ale iracionálne číslo a to sa nikdy nedá zapísať v tvare zlomku, preto úloha nemá riešenie v $\mathbb{N}$.

4. úloha

Nechť x, y jsou libovolná celá čísla. Dokažte, že $2x + 7y$ je dělitelné jedenácti, právě když je $4x + 3y$ dělitelné jedenácti.

Abychom dokázali ekvivalenci, je potřeba dokázat obě dílčí implikace.

(i) Je-li výraz $2x+7y$ dělitelný jedenácti, pak jistě i výraz $2(2x+7y) = 4x+14y$ je dělitelný jedenácti, a tedy i výraz $4x+14y-11y = 4x+3y$ je dělitelný jedenácti, což jsme přesně potřebovali dokázat.

(ii) A naopak, pokud výraz $4x+3y$ je dělitelný jedenácti, tak také výraz $6(4x+3y) = 24x+$ $+\,18y$ je dělitelný jedenácti, tudíž je dělitelný jedenácti i výraz $24+18y-11(2x+y) =$ $= 2x+7y$.

A důkaz je hotov. :)

5. úloha

Najděte takové čtyřciferné číslo, že jeho první cifra je stejná jako druhá, třetí cifra je stejná jako čtvrtá a současně je toto číslo druhou mocninou (nějakého) přirozeného čísla.

Budeme hledat všechna řešení. Má-li mít čtyřciferné číslo první dvě cifry stejné, označíme je a, poslední dvě cifry stejné, označíme je b, a navíc být druhou mocninou, pak lze zapsat ve tvaru

$$1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11(100a + b) = c^2,$$

kde a, b jsou jednociferná čísla a c je nějaké přirozené číslo. Vidíme však, že $11|11(100a + b)$, a tudíž musí $11|c^2$. Jenže jelikož 11 je prvočíslo, potom nutně $11|c$, a tedy $c^2 = (11n)^2$ pro nějaké přirozené číslo n. Dosadíme-li zpět do první rovnosti, dostaneme $11(100a + b) = c^2 = 11^2n^2$. Úpravou dostaneme $100a + b = 11n^2$, a proto $11|100a + b$. Dále ekvivalentně postupujeme:

$$[11|100a + b] \Leftrightarrow [11|99a + a + b] \Leftrightarrow [11|a + b],$$

ale jelikož jsou a, b jednociferná čísla a $a \neq 0$, dostaneme $a + b = 11$. Nyní můžeme prošetřit všechny možnosti pro a a b (celkem 10), ale my předvedeme jiný postup. Dosadíme danou rovnost do předchozí a dostaneme

$$11n^2 = 100a + b = 100a + (11 - a) = 99a + 11,$$

a proto $n^2 = 9a + 1$, což zapsáno jinak dává

$$9a = (n + 1)(n - 1).$$

Jelikož $n+1$ a $n-1$ mají rozdíl roven 2, tak buď $9|n+1$, nebo $9|n-1$. Dále $909 \geq 100a+b = 11n^2$, a tedy $n \leq 9$.

(1) Kdyby $9|n + 1$, pak $n = 8$, $c = 88$ a hledané číslo je 7744.
(2) Pokud by $9|n - 1$, pak $n = 1$, $c = 11$ a hledané číslo je 121.

Z nalezených vhodných čísel vyhovuje zadání pouze číslo 7744, které je také jediným řešením zadané úlohy.

6. úloha

Dokažte, že číslo $\dfrac{3^{2007} - 1}{2}$ je liché a složené.

První řešení:

Důkaz lichosti: Nejrychleji:

$$\frac{3^{2007} - 1}{2} = \frac{3^{2007} - 1}{3 - 1} = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{2006},$$

což je součet prvních 2007 členů geometrické posloupnosti s kvocientem 3.

Alternativně (dle Jana Sosnovce):

Převedeme číslo do trojkové soustavy, upravíme a převedeme zpět do desítkové soustavy:

$$\left(\frac{3^{2007} - 1}{2}\right)_{(10)} = \left(\frac{10^{2007} - 1}{2}\right)_{(3)} = \left(\frac{100\ldots00 - 1}{2}\right)_{(3)} = \left(\frac{22\ldots22}{2}\right)_{(3)} =$$
$$= 11\ldots11_{(3)} = (3^{2006} + \cdots + 3^2 + 3^1 + 3^0)_{(10)}.$$

Číslo je součtem 2007 různých mocnin trojky, tj. 2007 lichých čísel, a proto je liché.

Důkaz složenosti:

$$3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{2006}=(3^0+3^1+3^2)+(3^3+3^4+3^5)+\cdots+(3^{2004}+3^{2005}+3^{2006})=$$
$$=(3^0+3^1+3^2)\cdot(3^0+3^3+3^6+\cdots+3^{2004})$$

Zkoumané číslo je dělitelné třinácti a je jistě větší než třináct, je proto složené.

Druhé řešení:
Důkaz lichosti (dle Lukáše Drápala): Číslo $(3^{2006}-1)=(3^{1003}-1)\cdot(3^{1003}+1)$, je tedy násobkem dvou sudých čísel, je dělitelné čtyřmi a také číslo $3\cdot(3^{2006}-1)$ je dělitelné čtyřmi. Platí $3^{2007}-1=3^{2007}-3+2=3\cdot(3^{2006}-1)+2$, a proto je toto číslo sice dělitelné dvěma, ale už ne čtyřmi. Po vydělení dvěma tak dostáváme liché číslo.
Důkaz složenosti:

$$\frac{3^{2007}-1}{2}=\frac{(3^{669})^3-1}{2}=\frac{3^{669}-1}{2}\cdot(3^{1338}+3^{669}+1),$$

kde zlomek $\frac{3^{669}-1}{2}$ je jistě roven celému číslu, neboť má v čitateli sudé číslo.

Nebo ...

$$\frac{3^{2007}-1}{2}=\frac{(3^3)^{669}-1}{2}=\frac{27^{669}-1}{2}=\frac{27-1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{668}27^k=13\cdot\sum_{k=0}^{668}27^k,$$

a chceme-li jen tak pro radost opravovatelům nalézt ještě další dělitele, upravíme výraz jako *Pepa Tkadlec*:

$$\frac{3^{2007}-1}{2}=\frac{(3^9)^{223}-1}{2}=\frac{19683^{223}-1}{2}=\frac{19683-1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{222}19683^k=2\cdot13\cdot757\cdot\sum_{k=0}^{222}19683^k.$$

Třetí řešení:
Důkaz lichosti: Někteří řešitelé rozhodovali o paritě zkoumaného čísla pomocí znalosti jeho poslední cifry. Ta se v mocninách trojky periodicky opakuje: je 3 pro 3^{4k+1}, 9 pro 3^{4k+2}, 7 pro 3^{4k+3} a 1 pro 3^{4k+4}, kde $k\in\mathbb{N}_0$. Exponent 2007 můžeme zapsat ve tvaru $4\cdot501+3$, poslední cifrou čísla 3^{2007} tedy bude 7. Po odečtení 1 se poslední cifra změní na 6 a po vydělení dvěma na 3. Zkoumané číslo je tedy liché.

Čtvrté řešení využitím kongruencí:
Důkaz lichosti:

$$\begin{aligned}3&\equiv-1 \pmod 4\\3^{2007}&\equiv-1 \pmod 4\\3^{2007}-1&\equiv 2 \pmod 4\\\frac{3^{2007}-1}{2}&\equiv 1 \pmod 2\end{aligned}$$

Zkoumané číslo dává po dělení dvěma zbytek 1, je tedy liché.

Důkaz složenosti:

$$
\begin{aligned}
27 &\equiv 1 \pmod{13} \\
3^{2007} = 27^{669} &\equiv 1 \pmod{13} \\
3^{2007} - 1 &\equiv 0 \pmod{13} \ \ \& \ \ 3^{2007} - 1 \equiv 0 \pmod{2}
\end{aligned}
$$

Číslo $3^{2007} - 1$ je sudé a dělitelné 13, a proto je i číslo $\frac{3^{2007}-1}{2}$ dělitelné 13.

7. úloha

Najděte přirozená čísla a, b a c taková, že číslo a je dělitelné jedenácti a není dělitelné devíti, naopak číslo b je dělitelné devíti, ale není jedenácti. Navíc čísla a, b, c splňují:

$$a^{99} + b^{99} = c^{100}.$$

Jako kompletní řešení stačilo uvést trojici, která byla řešením a splňovala podmínky kladené na dělitelnost (ty sloužily především k tomu, abychom zamezili triviálnímu řešení $2^{99} + 2^{99} = 2^{100}$). O něco přínosnější však bude, uvedeme-li i stručný postup, jak se dalo na řešení přijít.

Na začátku budeme chtít najít vůbec nějaká řešení bez podmínek na dělitelnost a budeme doufat, že jich najdeme dostatek na to, abychom mezi nimi našli nějaká splňující podmínky na dělitelnost. Správnou cestou je pokusit se rovnici nějakým způsobem zjednodušit, ale ne zas příliš (příliš je například položit $a = b = c$, pak dosateneme jen $a = b = c = 2$). Máme tedy

$$a^{99} + b^{99} = c^{100}$$

Levá strana je určitě dělitelná c. Jedním z vhodných zjednodušení je, že c dělí oba sčítance, tedy $c|a^{99}$, $c|b^{99}$. To samozřejmě ještě neznamená, že by nutně c muselo dělit a (samozřejmě ani c nemusí dělit b), ale právě tento krok bude naše druhé zjednodušení, tedy $c|a$ a $c|b$. Potom je $a = cu$, $b = cv$ $(u, v \in \mathbb{N})$ a původní rovnice se zjednoduší na $c^{99}u^{99} + c^{99}v^{99} = c^{100}$, tedy jen

$$u^{99} + v^{99} = c$$

Nyní ale při libovolné volbě u, v dostaneme přirozené c a snadno dopočítáme a, b. Dostali jsme tím tedy velmi velkou množinu řešení ve tvaru $(a, b, c) = (uc, vc, c) = (u(u^{99} + v^{99}), v(u^{99} + v^{99}), u^{99} + v^{99})$ (chápej jako uspořádanou trojici). Ještě nám zbývá zjistit, jestli jsme nedoufali marně, tedy jestli opravdu nějaké z nalezených řešení splňuje podmínky na dělitelnost. Má být $11|a$, $9|b$, takže se nabízí zvolit $u = 11$, $v = 9$ a potřebujeme ověřit, zda opravdu $9 \nmid a$, $11 \nmid b$. Vzhledem k tomu, že čísla $9, 11$ jsou nesoudělná, tak aby a bylo dělitelné 9, musel by výraz $9^{99} + 11^{99}$ být dělitelný 9, tedy číslo 11^{99} by muselo být dělitelné 9, což zjevně není pravda (vždyť $9, 11$ jsou nesoudělná). Analogicky zdůvodníme, že $11 \nmid b$.

Hledaná trojice je

$$
\begin{aligned}
a &= 11 \cdot (9^{99} + 11^{99}) \\
b &= 9 \cdot (9^{99} + 11^{99}) \\
c &= 9^{99} + 11^{99}
\end{aligned}
$$

Vzhledem k tomu, že jsme vždy na a, b, c kladli sice omezující podmínky, ale vždy takové, aby a, b, c bylo řešením, není zkouška nezbytně nutná. Sám si ještě můžeš rozmyslet, že u, v můžeme volit mnoha způsoby (u je libovolný násobek 11 nedělitelný 9, v je libovolný násobek 9 nedělitelný 11).

8. úloha

Najděte všechna prvočísla p taková, že k nim existují přirozená a, b splňující $p^3 = a^3 - b^2$ a přitom $NSD(b, 3p) = 1$.[4]

Začneme rozkladom podľa známeho vzorca a ukážeme, že oba výrazy v zátvorkách sú nesúdeliteľné:

$$b^2 = a^3 - p^3 = (a-p)(a^2 + ap + p^2)$$

Dôkaz prevedieme sporom. Nech q je prvočíslo a platí $(q|a-p)$ & $(q|a^2+ap+p^2)$, a ďalej

$$a^2 + ap + p^2 = (a-p)(a+2p) + 3p^2 \quad \Rightarrow \quad q|(a-p)(a+2p) + 3p^2.$$

Podľa predpokladu sú výrazy $(a^2 + ap + p^2)$ a $(a-p)(a+2p)$ deliteľné q. Z toho vyplýva, že $q|3p^2$, a teda keďže q je prvočíslo, musí byť q rovné 3 alebo p. Predpoklad $q|(a-p)$ implikuje $q|b$, pretože q je prvočíslo $b^2 = (a-p)(a^2 + ap + p^2)$. Potom je ale q spoločný násobok b a $3p$, čo je spor.

Keďže $a - p$ a $a^2 + ap + p^2$ sú nesúdeliteľné a ich súčin sa rovná štvorcu (rozumej druhej mocnine prirodzeného čísla), potom sú nutne oba tieto výrazy štvorce. Píšeme:

$$\begin{aligned} \exists\, u, v \in \mathbb{N}: \quad & a - p = u^2 \\ & a^2 + ap + p^2 = v^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Potom po vyjadrení dostaneme $b = uv,\ a = p + u^2$. Toto vyjadrenie dosadíme do (1) a upravíme:

$$\begin{aligned} (p+u^2)^2 + (p+u^2)p + p^2 &= v^2 \\ u^4 + 3pu^2 + 3p^2 &= v^2 \qquad / \cdot 4 \\ 4u^4 + 12pu^2 + 12p^2 &= 4v^2 \\ (2u^2 + 3p)^2 + 3p^2 &= 4v^2 \end{aligned}$$

A teda podľa vzorca $\Delta^2 - \Theta^2 = (\Delta - \Theta)(\Delta + \Theta)$ máme:

$$\begin{aligned} 3p^2 &= (2v - 2u^2 - 3p)(2v + 2u^2 + 3p) \\ 3p^2 &= 1 \cdot 3p^2 = 3 \cdot p^2 = p \cdot 3p \end{aligned}$$

Keďže výraz $3p^2$ sa dá rozložiť práve týmito troma spôsobmi, môžme priradiť jednotlivým zátvorkam hodnoty. Vieme totiž, že pravá zátvorka je väčšia ako ľavá.

Prípad $(2v + 2u^2 + 3p) = 3p$ môžme vylúčiť okamžite, pretože $2v + 2u^2 > 0$.

Nech platí druhá možnosť $(2v + 2u^2 + 3p) = 3p^2$ & $(2v - 2u^2 - 3p) = 1$. Odčítaním týchto dvoch rovností dostaneme:

$$4u^2 = 3p^2 - 6p - 1$$

Na ľavej strane máme štvorec, ktorý nikdy nedáva po delení 3 zvyšok 2, pokým pravá strana dáva po delení 3 práve zvyšok 2. Táto rovnosť teda neplatí a druhá možnosť nevedie k riešeniu.

[4] Kouzelná zkratka NSD značí největšího společného dělitele čísel b a $3p$.

Ostal nám prípad $(2v + 2u^2 + 3p) = 3p$ & $(2v - 2u^2 - 3p) = 3$. Opäť, urobíme rozdiel týchto dvoch rovností a dostaneme:

$$
\begin{aligned}
4u^2 &= p^2 - 6p - 3 \\
2u^2 &= (p-3)^2 - 12 \\
12 &= (p-3)^2 - (2u)^2 \\
12 &= (p - 3 - 2u)(p - 3 + 2u)
\end{aligned}
$$

Teraz si všimneme, že súčet výrazov v zátvorkách je párny, a teda hľadáme taký rozklad čísla 12, aby súčet činiteľov bol párny. Jediným vyhovujúcim je $6 \cdot 2 = 12$. Takže $(p - 3 + 2u = 6)$ a $(p - 3 - 2u = 2)$, z čoho po sčítaní dostaneme $p = 7$ a po odčítaní $u = 1$, čo implikuje $a - p = 1$, a teda $a = 8$. Zo zadania $b^2 = 8^3 - 7^3 = 169$, čiže $b = 13$.

Úloha má iba jediné riešenie $a = 8, b = 13$ a $p = 7$.