Povídání o hrách (ke druhé sérii)

Milá řešitelko, milý řešiteli, prosím, nelekni se, že tato série nezačíná hned zadáním úloh, ale je tu napřed tento podivný text. Občas totiž píšeme úvod k sérii, ve kterém Ti vysvětlíme některé pojmy, které se třeba objevují v zadáních, a trochu poradíme, jak úlohy řešit. A toto je první letošní povídání.

Co je to hra, asi každý ví. V této sérii se potkáme jenom s hrami, které hrají dva hráči. Hráči se střídají v tazích, v zadání každé úlohy je napsáno, co může hráč při svém tahu udělat. (Pokud to není v zadání uvedeno, hráč musí vždy táhnout, nesmí vynechat tah.) A je tam také napsané, kdy který z hráčů vyhraje. Každý samozřejmě chce vyhrát nebo přinejhorším aspoň neprohrát, takže ho zajímá, jak hrát co nejlépe. A právě to bude tvým úkolem ve většině případů – zjistit, který z hráčů má takzvanou vyhrávající strategii neboli postup, podle nějž může hrát a mít jistotu, že stejně vždycky vyhraje, ať bude soupeř hrát jakkoli. Občas se také může stát, že si ani jeden z hráčů nemůže zajistit vítězství, pak je dobré najít aspoň neprohrávající strategii – takový postup, s jehož pomocí jistě neprohraje. Vždy by ses samozřejmě měl pokusit dokázat, že tomu je skutečně tak, jak tvrdíš – například, že tebou navržená strategie funguje.

Předchozí odstavec byl asi celkem hutný, vše si tedy osvětlíme na příkladě, který navíc ještě ukazuje celkem užitečný způsob, jak hledat strategie. Na stole jsou dvě hromádky sirek, na každé z nich je přesně 18 sirek. Ten, kdo je na tahu, si vybere jednu z hromádek a sebere z ní jednu sirku. Prohraje ten hráč, který sebere poslední sirku z některé hromádky.

Ukážeme, že druhý hráč (tedy ten, který nezačíná, říkejme mu třeba šnEk) má vyhrávající strategii: „Vždy vezmi sirku z opačné hromádky než soupeř.“ Není těžké si rozmyslet, že když podle ní bude hrát, bude vždy po šnEkově tahu na obou hromádkách stejný počet sirek. To ale také znamená, že před jeho tahem bude na hromádce H, ze které má brát, o jednu sirku víc než na té druhé. Pokud tedy soupeř svým předchozím tahem nevyprázdnil hromádku, ze které bral sirku, určitě ani šnEk nevyprázdní hromádku H. Pokud tedy soupeř neprohrál, může šnEk vždy hrát tak, aby také neprohrál. Sirek je jenom konečně mnoho, takže hra časem skončí. A protože šnEk používající naši strategii nemůže prohrát, musí vyhrát.

Snad jsme Tě tímto povídáním příliš neunavili nebo neznechutili; pokud by Ti cokoli nebylo jasné, neboj se zeptat třeba v chatu na našich stránkách `http://mks.mff.cuni.cz`. Přejeme Ti pěknou zábavu při řešení úloh (:

2. série

Téma:	Hry
Datum odeslání:	12. listopadu 2007

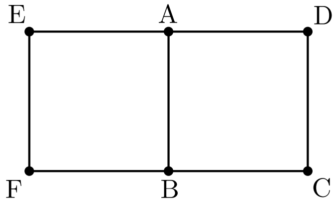
0. ÚLOHA (1 BOD)

Vymysli co nejvypečenější podfuk do libovolné (klidně i vlastní) hry.

1. ÚLOHA (3 BODY)

V bodě A stojí lupič Pavel, v bodě B je detektiv Rasťo, který jej honí. Střídají se v tazích, hráč na tahu se vždy přesune do nějakého sousedního bodu. Začíná Pavel, Rasťo vyhraje, pokud jej někdy chytí. Má Rasťo vyhrávající strategii[1]?

[1]Neboli: může Rasťo hrát tak, aby Pavla chytil, ať už Pavel hraje sebelépe?



2. ÚLOHA (3 BODY)

Čert rozložil před ubohého Víťu lícem dospod všech osm žaludových karet a řekl: „Jednu si vyber. Bude-li to eso, ušetřím tě, jinak propadne tvá duše peklu.“ Víťa sáhl po jedné z karet. Už už se chtěl na ni podívat, čert ho však zarazil. Sebral ze stolu šest ze sedmi ostatních karet a řekl: „Eso je jedna ze dvou karet, které na stole zbyly.“ Víťa se poškrábal na hlavě: „Tohle děláš pokaždé? Ať už jsem si prvně vybral eso, nebo ne?“ Čert se zasmál: „Samozřejmě, chytráku. A teď už vybírej!“

Vyplatí se Víťovi změnit původní tip, nebo má raději zůstat u karty, kterou si zvolil na začátku, aby ušel pekelným mukám?

3. ÚLOHA (3 BODY)

Sto jedenáct lidí stojí v kruhu, mezi nimi i Franta a Martin, kteří ale nestojí vedle sebe. Franta s Martinem se střídají v tazích, začíná Franta. Každý se ve svém tahu dotkne jednoho ze svých sousedů, řekne „Uglabugla goblong!“ a dotčený musí opustit kruh[2]. Vyhrává ten hráč, který se takto první dotkne svého protihráče. Který z nich má vyhrávající strategii?

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Ondra a Saša hrají následující hru: Na začátku si Ondra vybere nějaké (reálné) číslo a napíše ho na jednu z volných pozic v této rovnici:

$$x^4 + \dots x^3 + \dots x^2 + \dots x + \dots = 0$$

Pak zase Saša někam napíše číslo, pak zase Ondra a nakonec ještě Saša, až jsou všechna místa zaplněná. Pokud má výsledná rovnice (aspoň jedno) reálné řešení, vyhraje Saša, jinak vyhraje Ondra. Kdo má vyhrávající strategii?

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Proradní loupežníci Kenny a Jarda ukořistili obrovskou truhlu plnou zlatých mincí. Jak už to tak bývá, loupežníci se neradi dělí, tak se rozhodli si o poklad zahrát hru. Odněkud vytáhli čtvercový stůl a postupně na něj pokládají mince. Ten, kdo je zrovna na tahu, na stůl položí jednu minci tak, aby (ani zčásti) neležela na jiné minci a nepřesahovala okraj stolu[3]. Začíná Kenny; prohraje ten, kdo už na stůl nemůže položit další minci. Kdo má vyhrávající strategii?

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dva lovci pokladů, doktor Zelený a profesorka Červená, stojí uprostřed Duhové bažiny, která sestává z mnoha ostrůvků spojených barevnými lávkami. Mají dokonalou mapu bažiny, bohužel

---

[2] Pro šťouraly poznamenejme, že lidé stojí na obvodu kruhu a i poté, co někdo odejde, má každý dva sousedy.

[3] Všechny mince jsou stejně velké a stůl je tak obrovský, že se na něj vejde aspoň jedna mince.

ale jenom jednu, takže musí chodit spolu. Dohodli se, že se budou střídat ve vybírání cesty (Zelený je galantní a nechá Červenou začínat). Ten, na kom je řada, může buď zůstat stát, nebo vést dvojici po lávce své oblíbené barvy (Zelený zelené, Červená červené) na sousední ostrůvek.

Podle mapy leží na některých ostrůvcích diamanty. Dr. Zelený hledá zelený diamant, prof. Červená prahne po diamantu červeném. Ve chvíli, kdy dvojice najde zelený nebo červený diamant, hon za pokladem končí vítězstvím odpovídajícího dobrodruha[4].

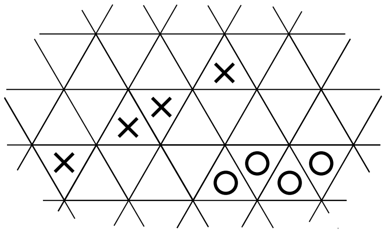
Duhová bažina má ještě jednu zajímavou vlastnost: Když uděláme středovou symetrii se středem v počátečním ostrůvku, dostaneme stejnou bažinu, jen barvy (lávek i diamantů) se prohodí (co bylo zelené, je červené a naopak). Dokaž, že ať už bažina vypadá jakkoli[5], může prof. Červená zabránit tomu, aby se zelený drahokam našel jako první (má neprohrávající strategii). Podotýkáme, že neprohrávající strategii nemusíš do detailu popsat, stačí ukázat, že nějaká existuje.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Zlomyslnému upírovi se do spárů dostaly Háňa a Zuzka. Aby je trochu potrápil, rozhodl se zahrát si s nimi jednu velice zákeřnou hru. Každá z nebohých dívek si musí vymyslet nějaké přirozené číslo a pošeptat je upírovi. Ten jim pak řekne dvě čísla. Jedno z nich je součet čísel obou dívek (a druhé si prostě vymyslel, hráčky ale neví, které je které). Ta, která jako první zjistí číslo, které si myslela druhá nebožačka, vyhraje a za odměnu se stane upírovou manželkou, zatímco poraženou upír nemilosrdně rozsápe na kusy. Háňa po pravdě řekne, že neumí určit Zuzčino číslo. Zuzka zas pravdivě odpoví, že ani ona Hánino číslo ještě nezná. Pak zas Háňa dí, že Zuzčino číslo nezná, a tak se pořád střídají. Předpokládejme, že upír řekl čísla 900 a 777[6]. Dokaž, že časem jedna z nich zjistí číslo té druhé a vyhraje.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dva hráči hrají piškvorky, pro osvěžení na nekonečně velkém trojúhelníkovém papíře. Hráči se střídají v tazích, ten, kdo je na tahu, vždy nakreslí svou značku do některého volného políčka. Vyhraje hráč, který má jako první nepřerušenou rovnou řadu[7] aspoň n svých znaků, kde n je nějaké přirozené číslo. V závislosti na n urči, kdo má vyhrávající nebo neprohrávající strategii.



Pro upřesnění ještě dodejme, že na obrázku posloupnost křížků **není** řadou a posloupnost koleček **je** řadou.

[4]Když najdou na jednom ostrůvku oba drahokamy najednou, je to remíza.

[5]Tedy ať je to jediný ostrůvek, nebo složité uskupení milionů ostrůvků – krom podmínky symetrie vzhled bažiny nic neomezuje.

[6]Pokud by Tě v zadání obtěžovala konkrétnost čísel 900 a 777, klidně úlohu řeš s obecnými čísly m a n. Na řešení se téměř nic nezmění.

[7]Směřující jedním ze tří možných směrů podél čar trojúhelníkové sítě.

Řešení 2. série

0. úloha
Vymysli co nejvypečenější podfuk do libovolné (klidně i vlastní) hry.

Pro ukázku zveřejňujeme některé z nejzajímavějších podfuků:

Karolína Rezková
V neděli osmého se sešli nejznámější ekonomové Evropy.[8] Začali si tak povídat o novinkách, až se dostali k vážnějším otázkám, začali totiž řešit otázku svých platů. Ovšem nikdo nechtěl nahlas říct, jaký má svůj hrubý příjem, … jenže ekonomy čísla zajímají, a proto se dohodli po dlouhé, předlouhé diskuzi (konečně), že si alespoň zahrají a dozví se průměrný hrubý příjem všech přítomných. A to následujícím postupem.

Všichni ekonomové si sedli do řady. Každý z nich dostal papírek. Na tento papírek musel první napsat svůj hrubý příjem a k němu přičíst libovolné náhodné číslo. Tento papírek podal svému sousedovi, ten k číslu na papírku přičetl zase svůj plat a libovolné náhodné číslo. Celý tento součet napsal na svůj papírek a poslal dále, a tak to šlo až nakonec. Poté, co poslední provedl tento úkon, předal zase papírek prvnímu hráči. Nyní si zase všichni rozdali papírek. Každý z ekonomů nyní (když na něj přijde řada) odečte sebou vymyšlené číslo a výsledek pošle dalšímu. Až poslední dostane papírek, odečte svůj hrubý příjem a výsledek vydělí počtem ekonomů. Tak dostanou všichni informaci o jejich průměrném platu, ale přitom nikdo nezjistil ničí hrubý příjem.

Ovšem, co se nestalo. Dva britští ekonomové se dohodli na francouzského a sedli si oba vedle něj … Nyní se tito dva Britové mohou (spoluprací) jednoduše dobrat k hrubému platu Francouze. Stačí, aby si zapamatovali, jaké číslo první Brit podává Francouzovi. Pokud tuto hodnotu odečtou od hodnoty, kterou podá Francouz druhému Britovi, dostanou součet Francouzovy mzdy a jím vymyšleného náhodného čísla.

V druhém kole si zase první Brit zapamatuje číslo, které podává Francouzovi a druhý Brit číslo, které od Francouze dostane. Rozdíl těchto dvou čísel se rovná Francouzově hrubé mzdě.

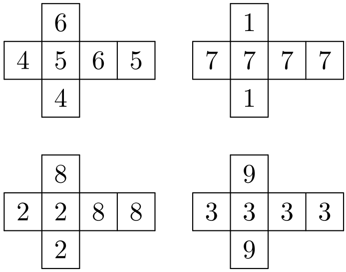
Michal Hagara
Dúfám, že poznáte pravidlá hry „Mamute, nehnevaj sa!“ lebo sa mi vám ich sem nechce vysvetľovať. Ani by sa sem všetky nezmestili. Šak úplne najväčší podfuk je, keď chetit zelený ako lembas sa postaví na políčko D9, pričom hneď vedľa na I13 stojí chetit červený ako lembas prefarbený chameleónom na červeno.

Vidíte ten podfuk?
Že nie?
No jasné, niekdo tu nepozná pravidlá tejto hry …
Ale ja to nie som …

Josef Tkadlec
Hra je jednoduchá. Dva hráči hází kostkou[9], vyhrává ten, kdo hodí vyšší číslo. Aby to nebyla taková nuda, jsou k mání čtyři různé kostky (viz pláště). Oba hráči si před hodem vyberou kostku a hodí. Do každého hodu si můžou vybrat kostku jinou.

[8] Bylo jich více jak 2.
[9] Je to kostka kompletně bez děr!

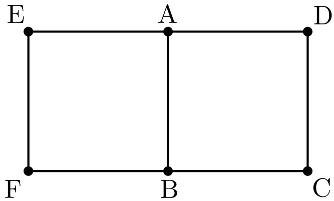
Můj podfuk není ani tak podfuk, jako spíš finta (ale zato jako řemen). Nechám soupeře, aby si vybral kostku, která je podle něj nejlepší, až pak si vyberu já. Fór je v tom, že ať si soupeř vybere jakoukoliv, já si můžu vybrat takovou, že budu vyhrávat dvakrát častěji:-) (laskavá čtenářka si jistě sama dokáže …). S takovými šancemi už se hrát vyplatí.



Poznámka: Tohle vše platí, jen pokud nehrajete s někým jako je Chuck[10], protože ten, jak známo, vyhrává za všech podmínek.

1. úloha

V bodě A stojí lupič Pavel, v bodě B je detektiv Rasťo, který jej honí. Střídají se v tazích, hráč na tahu se vždy přesune do nějakého sousedního bodu. Začíná Pavel, Rasťo vyhraje, pokud jej někdy chytí. Má Rasťo vyhrávající strategii[11]?



Velice elegantní je rešení pomocí obarvení. Nechť políčka A, C a F jsou černá a políčka B, D a E bílá. (Můžeš si představit, že jde o dvě skupiny s různými vlastnostmi, ale s barvičkami je to pěkně názorné.) Nyní se lupič i detektiv z jakéhokoli políčka, při libovolném povoleném tahu, přesunou na políčko barvy druhé. To mimo jiné znamená, že po jednom kole (lupič i detektiv odehraje každý jeden tah) stojí opět jeden z nich na poli černém a druhý na bílém. Potkat se proto mohou jen v případě, že v aktuálním kole táhl pouze jeden z hráčů, což je lupič (vždy začíná) a ten sotva půjde dobrovolně do náruče detektiva, když z každého místa existují alespoň dvě různé cesty. Pavel má neprohrávající strategii, a proto Rasťo nemá vyhrávající strategii.

Jiné řešení

Pokaždé, když jeden z hráčů táhne, změní se vzdálenost hráčů o 1. To znamená, že pokud byla před tím sudá, nyní bude lichá a naopak. Počáteční vzdálenost je lichá. Po tahu lupiče bude tedy vždy vzdálenost mezi hráči sudá a naopak po tahu detektiva bude lichá. Koncová vzdálenost by

[10] Norris, pozn. red.

[11] Neboli: může Rasťo hrát tak, aby Pavla chytil, ať už Pavel hraje sebelépe?

byla nula (když Rasťo Pavla dostihne), tedy sudá. Setkat se tedy mohou pouze po sudém tahu, to jest tahu lupiče, který ale nikdy není nucen padnout detektivovi do náruče.

2. úloha

Čert rozložil před ubohého Víťu lícem dospod všech osm žaludových karet a řekl: „Jednu si vyber. Bude-li to eso, ušetřím tě, jinak propadne tvá duše peklu.“ Víťa sáhl po jedné z karet. Už už se chtěl na ni podívat, čert ho však zarazil. Sebral ze stolu šest ze sedmi ostatních karet a řekl: „Eso je jedna ze dvou karet, které na stole zbyly.“ Víťa se poškrábal na hlavě: „Tohle děláš pokaždé? Ať už jsem si prvně vybral eso, nebo ne?“ Čert se zasmál: „Samozřejmě, chytráku. A teď už vybírej!“

Vyplatí se Víťovi změnit původní tip, nebo má raději zůstat u karty, kterou si zvolil na začátku, aby ušel pekelným mukám?

Pravděpodobnost, že si Víťa vytáhne eso na první pokus, je $\frac{1}{8}$. Naopak, jinou kartu než eso vytáhne s pravděpodobností $\frac{7}{8}$.

Pokud čert mluví pravdu[12], jedna ze dvou karet, které zůstaly na stole, je eso. Pravděpodobnost, že první karta je eso, je rovna $\frac{1}{8}$. Druhá karta je eso, právě když první karta nebyla eso, tedy s pravděpodobností $\frac{7}{8}$. Odtud je vidět, že se Víťovi vyplatí změnit původní tip a volit druhou kartu.

3. úloha

Sto jedenáct lidí stojí v kruhu, mezi nimi i Franta a Martin, kteří ale nestojí vedle sebe. Franta s Martinem se střídají v tazích, začíná Franta. Každý se ve svém tahu dotkne jednoho ze svých sousedů, řekne „Uglabugla goblong!“ a dotčený musí opustit kruh[13]. Vyhrává ten hráč, který se takto první dotkne svého protihráče. Který z nich má vyhrávající strategii?

Vyhrávající strategii má Franta. Po jedné ruce ho od Martina dělí sudý a po druhé lichý počet lidí. Franta bude vždy odebírat z té strany, kde je dělí sudý počet lidí, tím nechá Martinovi dvě liché skupinky. Zároveň se po každém kole (po tazích obou dvou) snižuje celkový počet lidí o dva, tedy před každým Martinovým tahem zbývá sudý počet lidí. Hra tedy nutně, pokud někdo neudělá chybu, dojde do situace, kdy je na tahu Martin a zbývají tam ještě dva nehrající lidé, každý z jedné strany. A v dalším tahu ho Franta už jistě vyřadí.

4. úloha

Ondra a Saša hrají následující hru: Na začátku si Ondra vybere nějaké (reálné) číslo a napíše ho na jednu z volných pozic v této rovnici:

$$x^4 + {\scriptstyle\ldots}x^3 + {\scriptstyle\ldots}x^2 + {\scriptstyle\ldots}x + {\scriptstyle\ldots} = 0$$

Pak zase Saša někam napíše číslo, pak zase Ondra a nakonec ještě Saša, až jsou všechna místa zaplněná. Pokud má výsledná rovnice (aspoň jedno) reálné řešení, vyhraje Saša, jinak vyhraje Ondra. Kdo má vyhrávající strategii?

---

[12]Pokud čert v některém ze svých výroků lhal, je pravděpodobné, že lhal i v tom, že Víťu ušetří, jak správně poznamenal řešitel Karel Kolář.

[13]Pro šťouraly poznamenejme, že lidé stojí na obvodu kruhu a i poté, co někdo odejde, má každý dva sousedy.

Ukážeme, že vyhrávající strategii má Saša. Všimneme si, že když součet koeficientů libovolného polynomu je 0, potom má rovnice kořen 1. Stačí tedy, aby Saša vhodně zvolil svůj poslední tah. Označíme-li poslední Sašou doplňovaný koeficient a a ostatní již doplněné koeficienty postupně zleva doprava písmeny b, c, d, potom Sašovi stačí zvolit $a = -1 - b - c - d$ a výsledná rovnice bude mít kořen 1.

Samozřejmě Saša by uspěl i s obecnější strategií, ve které by si dopředu vymyslel nenulový kořen x_0 (v předchozím jsme volili $x_0 = 1$) a v posledním tahu zahrál tak, aby vzniklá rovnice měla kořen x_0. Pokud například posledním tahem doplňuje koeficient a před x^3, zvolí $a = \frac{-x_0^4-bx_0^2-cx_0-d}{x_0^3}$ $(x_0 \neq 0)$ a výsledná rovnice

$$x^4 + \frac{-x_0^4 - bx_0^2 - cx_0 - d}{x_0^3}x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

bude mít vskutku kořen x_0. Analogicky by Saša postupoval, kdyby poslední koeficient doplňoval jinam. Ještě si dokážeš rozmyslet, že Sašovi dokonce stačí zvolit poslední koeficient tak, aby hodnota polynomu v bodě x_0 byla záporná.

5. úloha

Proradní loupežníci Kenny a Jarda ukořistili obrovskou truhlu plnou zlatých mincí. Jak už to tak bývá, loupežníci se neradi dělí, tak se rozhodli si o poklad zahrát hru. Odněkud vytáhli čtvercový stůl a postupně na něj pokládají mince. Ten, kdo je zrovna na tahu, na stůl položí jednu minci tak, aby (ani zčásti) neležela na jiné minci a nepřesahovala okraj stolu[14]. Začíná Kenny; prohraje ten, kdo už na stůl nemůže položit další minci. Kdo má vyhrávající strategii?

Hledejme výherní strategii pro Kennyho.

Mějme stůl, na který se vejde aspoň jedna mince. Začínající hráč, Kenny, ji položí doprostřed stolu. Pokud se na stůl nevejde už žádná další mince, Kenny rovnou vyhrává. Pokud se na stůl vejde ještě aspoň jedna mince, je na tahu Jarda. Ať ten položí svou minci kamkoli, ze středové souměrnosti stolu a prostřední mince (všechny mince jsou kulaté) vyplývá, že existuje aspoň jedno volné místo na stole – obraz Jardovy mince ve středové souměrnosti podle středu stolu. Přesně na toto místo Kenny položí svou minci. Dále opět pokládá Jarda a Kenny reaguje položením mince na místo obrazu Jardovy mince podle středu stolu, a tak dále.

Jelikož je stůl konečný, musí nastat situace, kdy už nepůjde nikam mince pokládat. Nemůže-li nakonec položit Jarda, vyhrál Kenny. Nemůže-li Kenny, znamená to, že Jarda nemohl položit svou předcházející minci, neboť Kenny vždy reaguje na Jardův tah, tedy Kenny ve skutečnosti vyhrál. Máme tedy krásnou výherní strategii pro Kennyho (zjevně nemůže nastat remíza).

6. úloha

Dva lovci pokladů, doktor Zelený a profesorka Červená, stojí uprostřed Duhové bažiny, která sestává z mnoha ostrůvků spojených barevnými lávkami. Mají dokonalou mapu bažiny, bohužel ale jenom jednu, takže musí chodit spolu. Dohodli se, že se budou střídat ve vybírání cesty (Zelený je galantní a nechá Červenou začínat). Ten, na kom je řada, může buď zůstat stát, nebo vést dvojici po lávce své oblíbené barvy (Zelený zelené, Červená červené) na sousední ostrůvek.

Podle mapy leží na některých ostrůvcích diamanty. Dr. Zelený hledá zelený diamant, prof. Červená prahne po diamantu červeném. Ve chvíli, kdy dvojice najde zelený nebo červený diamant, hon za pokladem končí vítězstvím odpovídajícího dobrodruha[15].

---

[14] Všechny mince jsou stejně velké a stůl je tak obrovský, že se na něj vejde aspoň jedna mince.

[15] Když najdou na jednom ostrůvku oba drahokamy najednou, je to remíza.

Duhová bažina má ještě jednu zajímavou vlastnost: Když uděláme středovou symetrii se středem v počátečním ostrůvku, dostaneme stejnou bažinu, jen barvy (lávek i diamantů) se prohodí (co bylo zelené, je červené a naopak). Dokaž, že ať už bažina vypadá jakkoli[16], může prof. Červená zabránit tomu, aby se zelený drahokam našel jako první (má neprohrávající strategii). Podotýkáme, že neprohrávající strategii nemusíš do detailu popsat, stačí ukázat, že nějaká existuje.

S ohledem na dokonalou mapu Duhové bažiny již na začátku dobrodruzi vědí, kdo z nich má vítěznou strategii (má-li ji někdo). Z inverzní středové souměrnosti pak oba mají stejné možnosti dostat se ke svému drahokamu. Ve hře mohou nastat dvě varianty:

(i) První hráč (v našem případě profesorka Červená) má neprohrávající strategii. V tomto případě se jí tedy stačí držet a cíl je splněn.

(ii) První hráč, který se pohne, nemá neprohrávající strategii. To znamená, že druhý (nezačínající) hráč má vítěznou strategii. Ať se první hráč pohne kamkoli, druhý hráč ho dotlačí ke svému vítězství. Profesorka Červená se ale v této situaci může vzdát tahu, přenechat první tah doktoru Zelenému a stát se tak vlastně nezačínajícím hráčem. Ani doktor ale nechce prohrát, a proto budou stále stát na místě, což je také neprohrávající strategie paní Červené.

7. úloha

Zlomyslnému upírovi se do spárů dostalyHáňa a Zuzka. Aby je trochu potrápil, rozhodl se zahrát si s nimi jednu velice zákeřnou hru. Každá z nebohých dívek si musí vymyslet nějaké přirozené číslo a pošeptat je upírovi. Ten jim pak řekne dvě čísla. Jedno z nich je součet čísel obou dívek (a druhé si prostě vymyslel, hráčky ale neví, které je které). Ta, která jako první zjistí číslo, které si myslela druhá nebožačka, vyhraje a za odměnu se stane upírovou manželkou, zatímco poraženou upír nemilosrdně rozsápe na kusy. Háňa po pravdě řekne, že neumí určit Zuzčino číslo. Zuzka zas pravdivě odpoví, že ani ona Hánino číslo ještě nezná. Pak zas Háňa dí, že Zuzčino číslo nezná, a tak se pořád střídají. Předpokládejme, že upír řekl čísla 900 a 777[17]. Dokaž, že časem jedna z nich zjistí číslo té druhé a vyhraje.

Úloha se dala řešit i obecně, ale nejpřístupnější je asi následující „polopatické" řešení. Označme si h číslo, které si na začátku myslela Háňa, a z číslo, které si na počátku zvolila Zuzka. Obě tato čísla jsou přirozená.

Zlomyslný upír dívkám řekl čísla 777 a 900, jedno z nich je vymyšlené a druhé je součtem obou dívčiných čísel, dívky ale nevědí, které je které. Platí tedy buďto $h + z = 777$, nebo $h + z = 900$. Když Háňa nejdříve řekne, že neumí určit Zuzčino číslo, dává tím Zuzce informaci, že je $h < 777$. Kdyby totiž h bylo alespoň rovno 777, potom by pravým součtem dívčiných čísel nemohlo být číslo 777, neboť by pak Zuzčino číslo z nebylo přirozené. Háňa by pak dopočítala číslo své sokyně jako $900 - h$. Když potom Zuzka zase tvrdí, že nezná číslo Háni, ze stejného důvodu musí být $z < 777$, pak jí ale také dává na vědomost, že $z > 900 - 777 = 123$. Kdyby totiž bylo z nejvýše 123, a jak už víme, je $h < 777$, bylo by i $h + z < 900$, tím pádem by tedy součet čísel dívek byl nutně 777 a Zuzka by dokázala určit Hánino číslo jako $777 - z$. Pak zase Háňa oznamuje, že

[16] Tedy ať je to jediný ostrůvek, nebo složité uskupení milionů ostrůvků – krom podmínky symetrie vzhled bažiny nic neomezuje.

[17] Pokud by Tě v zadání obtěžovala konkrétnost čísel 900 a 777, klidně úlohu řeš s obecnými čísly m a n. Na řešení se téměř nic nezmění.

pořád nedokáže určit číslo Zuzky. Tím Zuzce dává najevo nejen to, že je $h > 123$ (důkaz by byl podobný jako u Zuzky výše), ale i to, že $h < 777 - 123 = 654$. Kdyby totiž bylo h alespoň 654, pak by (protože je $z > 123$) bylo $h + z > 777$, pravým součtem čísel dívek by muselo být číslo 900 a Háňa by mohla Zuzčino číslo dopočítat jako $900 - h$, tím pádem by neřekla, že nezná číslo soupeřky. Pokud Zuzka opět nedokáže určit číslo Háni a sdělí jí to, pro Zuzčino číslo z pak platí $z < 654$ (z již známého důvodu) a dále $z > 123 + 123 = 246$. Proč? Kdyby bylo z nejvýše 246, pak by (kvůli tomu, že je $h < 654$) bylo $h + z < 900$, čímž pádem by byl součet čísel dívek jistě 777 a Zuzka by mohla dopočítat Hánino číslo jako $777 - h$.

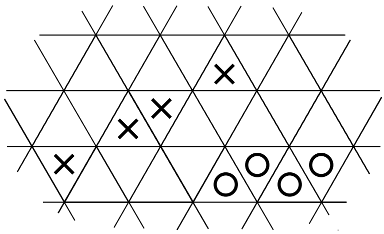
V tomto stylu se odvíjí hra dál. Pokud by mohla některá dívka v závislosti na svém čísle odvodit číslo své protihráčky, učiní tak a vyhraje. Pokud ne, budou se dívky opět střídat v opakování pravdivé fráze „Neumím určit číslo své soupeřky.“ a v duchu si stále více omezovat možné hodnoty čísla své sokyně. Důkazy následujících tvrzení ponechám na laskavé čtenářce, jsou hodně podobné těm již uvedeným.

Z následující výpovědi Háni, že neumí určit Zuzčino číslo, vyplývá $123 + 123 = 246 < h < 654 - 123 = 531$, tedy $246 < h < 531$. Zuzka pak zase Háňu svým výrokem „zpraví“ o tom, že $246 + 123 = 369 < z < 654 - 123 = 531$, neboli $369 < z < 531$. Nato Háňa další negativní větou na své číslo prozradí $246 + 123 = 369 < h < 531 - 123 = 408$, takže $369 < h < 408$. Je vidět, že Hánino číslo teď může nabývat nejvýše 38 hodnot. Teď už Zuzka musí Hánino číslo h nutně poznat, podívá se ještě jednou pořádně na své číslo z a přičte ho bleskurychle postupně ke všem (maximálně) 38 možným hodnotám h. V tomto součtu bude určitě jen jedno z čísel 777 a 900 (rozdíl těchto čísel je mnohem větší než 38), naopak právě jedno tam bude, pokud dívky celou dobu mluvily pravdu (a to mluvily).

Tím Zuzka zjistí Hánino číslo. Vyhrát mohla i Háňa, pokud v některé fázi nereagovala notoricky známou frází „Neznám číslo Zuzky.“, ale číslo mohla dopočítat (jak bylo výše naznačeno). Každopádně jedna z dívek nakonec zjistí číslo té druhé a vyhraje.

8. úloha

Dva hráči hrají piškvorky, pro osvěžení na nekonečně velkém trojúhelníkovém papíře. Hráči se střídají v tazích, ten, kdo je na tahu, vždy nakreslí svou značku do některého volného políčka. Vyhraje hráč, který má jako první nepřerušenou rovnou řadu[18] aspoň n svých znaků, kde n je nějaké přirozené číslo. V závislosti na n urči, kdo má vyhrávající nebo neprohrávající strategii.

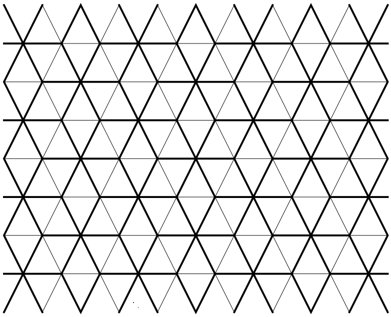


Pro upřesnění ještě dodejme, že na obrázku posloupnost křížků **není** řadou a posloupnost koleček **je** řadou.

Zkušenost z klasických piškvorek nám říká, že pro malé délky vyhrávající sekvence bude vyhrávat první hráč, a když už bude vyhrávající sekvence *dost dlouhá*, zvládnou se oba hráči

[18]Směřující jedním ze tří možných směrů podél čar trojúhelníkové sítě.

navzájem ubránit. A opravdu je tomu tak. Pro $n \leq 3$ triviálně vítězí začínající hráč a už pro $n = 4$ existuje pro oba neprohrávající strategie. K jejímu pochopení potřebujeme nejprve porozumět následujícímu obrázku (za jehož poskytnutí mnohokrát děkuji Mirkovi Olšákovi).



Až nám z tohoto obrázku přestanou přecházet oči, všimneme si, že znázorňuje rozdělení trojúhelníkové sítě na „kosočtverečky“ neboli na dvojice trojúhelníků. Dobrou vlastností takového rozdělení je, že jakákoliv vyhrávající řada délky alespoň 4 prochází jedním celým „kosočtverečkem“. Abychom tedy soupeři zabránili ve výhře, stačí mu zabránit v ovládnutí „kosočtverečku“, no a to je snadné. Kdykoliv náš soupeř zahraje do jednoho z dvojice trojúhelníků tvořícího kosočtverec, my zahrajeme do toho druhého. No a protože v ovládnutí celého kosočtverce si umí oba hráči navzájem zabránit (rozmysli si!), nikdo z nich nemůže vyhrát. Pro $n = 4$ a následně i pro $n > 4$ nemá nikdo z hráčů vítěznou strategii.