

# Povídání k páté sérii

V páté sérii se budeš potýkat s určením pravděpodobnosti různých událostí. Cílem tohoto povídání není přesné vybudování teorie pravděpodobnosti (to by nám kvůli samým definicím brzy došel papír). O formálním zavedení pravděpodobnosti se můžeš poučit například v seriálu z 23. ročníku našeho semináře, který je k dispozici i v knihovně na stránkách semináře (adresa <http://mks.mff.cuni.cz/library/library.php>). Místo toho zkusíme rozvinout intuitivní představu pravděpodobnosti. Za tím účelem si zavedeme také značení, které ve svých řešeních můžeš a nemusíš používat také.

Asi rozumíš, co to znamená, když řekneme třeba: „Pravděpodobnost jevu  $A$  je  $33\frac{1}{3}$  procent.“ Jev je nějaká událost: Třeba na férové hrací kostce padne číslo dělitelné třemi. Pravděpodobnost je číslo  $P(A)$  jevu přiřazené<sup>1</sup>. Z pohledu matematika nezáleží na podstatě náhodnosti (věc, o které se moudří lidé dohadují od počátku dějin), hlavní je, že pro počítání s pravděpodobnostmi máme pravidla.

Například na výše zmiňované kostce je celkem šest možných výsledků hodu  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , které jsou stejně pravděpodobné (učení se jim říká *elementární jevy*). Výsledky, které vyhovují dělitelnosti třemi, jsou dva:  $\{3, 6\}$ . Proto je pravděpodobnost jevu, že padne číslo dělitelné třemi, rovna  $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  (pokud máš rád(a) procenta, použij převodní vztah  $100\% = 1$ ).

Z výše uvedeného by mělo být vidět, proč je užitečné si jevy představovat jako množiny výsledků pokusu. Označme si  $\Omega$  jev který nastane úplně vždycky (jistý jev) a  $\emptyset$  bude jev, který nenastane nikdy. Jev „ $A$  a  $B$ “ pak můžeme psát jako  $A \cap B$ , „nenastane  $A$ “ znamená  $\Omega \setminus A$  a podobně. Zjevně  $P(\Omega) = 1$  a  $P(\emptyset) = 0$ . Poslední užitečná značka je  $P(A|B)$ , která se čte „pravděpodobnost, že nastane  $A$ , pokud nastal  $B$ “.

Asi nikoho nepřekvapí, že pravděpodobnost, že jev  $A$  nenastane, je  $1 - P(A)$ . Mějme dva jevy  $A$  a  $B$ , jejichž pravděpodobnosti jsou známé. Co můžeme říct o vzájemném vztahu jevů  $A$  a  $B$ ? Bez dalších informací jen málo. Platí vztah  $P(A \cap B) + P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ . Vidíme, že k výpočtu všech pravděpodobností potřebujeme znát právě tři z hodnot  $P(A \cap B)$ ,  $P(A \cup B)$ ,  $P(A)$ ,  $P(B)$ . Ty už nám ale umožní například spočítat i pravděpodobnost  $P(A|B)$  jako  $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ . (Vidíme, že aby výraz dával smysl, musí být  $P(B) > 0$ .) Skutečnost, že dva jevy jsou nezávislé, je vyjádřena rovností  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ , ze které například plyne, že pravděpodobnost  $A$  je stejná jako pravděpodobnost  $A$  za předpokladu  $B$ . Výše uvedené vzorečky můžeš přijmout jako axiomy. Na jednoduchých příkladech si můžeš ověřit, že všechno funguje (například pokud  $A, B$  nemohou nastat zároveň, tak  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ).

Určitý oříšek představuje chápání pravděpodobnosti ve chvíli, kdy je možností nekonečně mnoho. Například řekneme, že náhodně zvolíme reálné číslo  $x$  od  $-1$  do  $1$ , přičemž všechna čísla máme stejně rádi. Úplně přesně se taková situace popisuje pomocí míry, což je zobecnění délky, plochy a objemu. Jak souvisí délka s pravděpodobností? Představ si interval  $\langle -1, 1 \rangle$  jako terč, do kterého házíme šipky. Protože nemíříme, je pravděpodobnost zásahu intervalu – části terče – od  $a$  do  $b$  rovna podílu délky  $b - a$  tohoto intervalu ku délce celého terče  $2$ . To je přesně naše situace s náhodnou volbou  $x$ . S pravděpodobností zásahu intervalu už lze pracovat a počítat třeba pravděpodobnost, že  $2x^2 - x > 0$  (Zkus si to!).

Pro více nezávisle volených čísel stačí přidat dimenze: Třeba pokud máme dvě čísla  $x, y$  náhodně nezávisle rovnoměrně vybraná z  $\langle -1, 1 \rangle$ , tak pravděpodobnost, že  $x + y > 1$  je rovna poměru obsahu části čtverce,  $\{(x, y) | x, y \in \langle -1, 1 \rangle\}$  jejíž souřadnice splňují rovnici  $x + y > 1$

---

<sup>1</sup>Můžeme ho odhadnout, když provedeme hodně nezávislých pokusů a vydělíme počet pokusů, kdy  $A$  nastal, celkovým počtem pokusů.

(trojúhelník vpravo nahoře – nakresli si obrázek), ku obsahu celého čtverce a číselně vychází rovna  $\frac{1}{8}$ .

V zadáních se také vyskytuje kouzelná fomule „průměrná hodnota“. Co znamená? Řekněme, že veličina  $X$  nabývá hodnoty  $x_i$  s pravděpodobností  $p_i$ . Potom průměrná hodnota (alias střední hodnota alias očekávání) této veličiny je rovna  $EX = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$ .

Typická úloha na pravděpodobnost vypadá tak, že dostaneš zadané pravděpodobnosti nějakých jevů za nějakých podmínek a chce se po Tobě spočítat pravděpodobnosti jiných jevů. Zkusíme si to předvést na příkladu, který záměrně budeme řešit hodně formálně.

**Příklad.** Saša si z dlouhé chvíle hází čokoládovou mincí. Panna a orel padnou se stejnou pravděpodobností 0,45. S pravděpodobností 0,1 padne mince na hranu. Jaká je pravděpodobnost, že při deseti hodech mince ani jednou nespadla na hranu?

*Řešení.* Označme si  $A_i$  jev „V  $i$ -tém hodě mince nespadla na hranu“. Zjevně je  $A_i = B_i \cup C_i$ , kde  $B_i$  je jev „V  $i$ -tém hodě padla panna,“ a  $C_i$  jev „V  $i$ -tém hodě padl orel“. Protože panna a orel nemohou padnout současně, je  $P(A_i) = P(B_i \cup C_i) = P(B_i) + P(C_i) = 0,9$ .

Chceme zjistit pravděpodobnost jevu  $C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_{10}$ . Výsledek jednoho hodu nezávisí nijak na výsledku hodů ostatních (zde používáme selský rozum). Proto můžeme psát

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{10}) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_{10}) = \dots = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_{10}) = (0,9)^{10} \doteq 0,35.$$

Pravděpodobnost tohoto jevu je tedy zhruba 35 procent.

**Poznámka.** Pokud  $A, B$  a  $B, C$  a  $A, C$  jsou dvojice nezávislých jevů, tak nemusí ještě nutně platit  $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ . My jsme v řešení využili toho, že  $A_i$  nezávisí ani na žádné kombinaci jevů  $A_j, j \neq i$ .

Někdy jsou problémy z pravděpodobnosti jenom přestrojené problémy kombinatorické. Častá je situace, kdy máme  $p$  různých možných výsledků, které jsou všechny stejně pravděpodobné. Pokud pak jev nastává v  $q$  případech, tak je jeho pravděpodobnost rovna  $\frac{q}{p}$ . Obvykle  $p, q$  neznáme a musíme je spočítat. Proto na závěr přidáme ještě rychlokurz kombinačních čísel:

Pro  $n$  přirozené číslo budeme výraz  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  značit  $n!$  a nazývat  $n$  faktoriál. Je to počet způsobů, jak seřadit  $n$  různých předmětů. Obvykle se pokládá  $0! = 1$ . Pro  $m \leq n$  nezáporná celá čísla můžeme definovat výraz  $\binom{n}{m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m!}$ , který čteme  $m$  nad  $n$ . Toto kombinační číslo vyjadřuje počet různých  $m$ -prvkových podmnožin nějaké množiny o  $n$  prvcích (počet výberů  $m$  prvků z hromádky o  $n$  prvcích).

## 5. série

**Téma:** Pravděpodobnost

**Datum odeslání:** 19. ÚNORA 2007

1. ÚLOHA

(3 BODY)

Mějme pravidelnou šestistěnnou hrací kostku vyrobenou tak, že pravděpodobnost padnutí každé stěny je přímo úměrná počtu teček na této stěně. Určete, jaká je pravděpodobnost, že padne sudé číslo.

## 2. ÚLOHA

(3 BODY)

V královské rodině se rodí děti, dokud se buď nenarodí chlapec, nebo dokud nemají tři děti. Předpokládejme, že při narození každého dítěte je pravděpodobnost  $\frac{1}{2}$ , že to bude chlapec, a pravděpodobnost  $\frac{1}{2}$ , že půjde o děvče. Určete průměrný počet chlapců a průměrný počet dívek v královských rodinách.

## 3. ÚLOHA

(3 BODY)

Čokoládová princezna má doma 30 truhliček a k nim 30 různých příslušných klíčů. Na počátku dá princezna náhodně do každé truhličky právě jeden klíč a všechny truhličky zavře. Má však u sebe kouzelné kladivo, které umí otevřít právě jednu libovolně vybranou truhličku. Princezna v otevřené truhličce nalezne klíč a pokud to jde, otevře další truhličku, najde klíč a tak dál. Zjistěte, s jakou pravděpodobností otevře princezna všechny truhličky.

## 4. ÚLOHA

(5 BODŮ)

Tygr si háže desetikorunou a výsledky si pečlivě zapisuje na papír. Padle-li panna<sup>2</sup>, запиše si  $A$ , v opačném případě si запиše  $B$ . Skončí v momentě, kdy mu vznikne trojice  $AAB$  nebo  $ABA$ . Spočítejte pravděpodobnost, s jakou bude na papíře poslední zapsaná posloupnost  $AAB$  a pravděpodobnost, s jakou bude poslední posloupnost  $ABA$ .

## 5. ÚLOHA

(5 BODŮ)

Pavel dostal tabulku čokolády s  $m$  řádky a  $n$  sloupci rozlámanou na dílky  $1 \times 1$ . Avšak nenasytný Oto mu postupně dílky bere a ujídá, přičemž všechny způsoby sněžení jsou stejně pravděpodobné. Najděte pravděpodobnost jevu, že v žádném okamžiku nebudou existovat dva řádky, v nichž by se počet nesněžených dílků lišil o 2 a více.

## 6. ÚLOHA

(5 BODŮ)

V intervalu  $(0, 1)$  vybereme náhodně rovnoměrně dvě čísla  $x$  a  $y$ . Určete pravděpodobnost toho, že

$$\frac{x^2 + y^2}{2} < \min\{x, y\}$$

## 7. ÚLOHA

(5 BODŮ)

Je dána tabulka  $1 \times 21$  a v ní vzestupně seřazena čísla  $-10, -9, \dots, 9, 10$ . Každé políčko tabulky je obarveno červeně nebo bíle, přičemž součet čísel na červených políčkách označme  $n$ . Karlova figurka stojí na začátku na políčku 0 (uprostřed tabulky). Potom Karel desetkrát hodí mincí<sup>3</sup>. Pokaždé, když padne panna, posune figurku o jedno políčko doprava, když orel, posune figurku o jedno políčko doleva. Po deseti hodech mincí je pravděpodobnost, že figurka stojí na červeném políčku, rovna zlomku  $\frac{a}{b}$  ( $a$  a  $b$  nesoudělná). Za podmínky, že  $a + b = 2001$ , určete největší možné  $n$ .

## 8. ÚLOHA

(5 BODŮ)

Mějme tabulku velikosti  $a \times b$ , kde  $a, b$  jsou nesoudělná. Levý dolní roh tabulky si označme  $C$ , pravý horní roh  $D$  a pravý dolní roh  $E$ . Po hranicích dílků tabulky se nyní můžete pohybovat, avšak jen nahoru nebo doprava. Pokud si náhodně zvolíte jednu ze všech možných cest<sup>4</sup> z  $C$  do  $D$ , jaká je pravděpodobnost, že vůbec nevstoupíte dovnitř trojúhelníku  $CDE$ ?

<sup>2</sup>Pravděpodobnost, že padne panna je stejná jako pravděpodobnost, že padne orel.

<sup>3</sup>Opět je pravděpodobnost, že padne panna, stejná jako pravděpodobnost, že padne orel.

<sup>4</sup>Všechny cesty jsou stejně pravděpodobné.

# Řešení 5. série

## 1. úloha

Mějme pravidelnou šestistěnnou hrací kostku vyrobenou tak, že pravděpodobnost padnutí každé stěny je přímo úměrná počtu teček na této stěně. Určete, jaká je pravděpodobnost, že padne sudé číslo.

Poměr pravděpodobností padnutí čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 na kostce je podle zadání  $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6$ . Z toho je snadno vidět, že poměr pravděpodobností padnutí sudého a lichého čísla je  $(2 + 4 + 6) : (1 + 3 + 5)$ , tedy  $4 : 3$ . To znamená, že ve čtyřech ze sedmi případů by mělo padnout sudé číslo, což dává výsledek  $\frac{4}{7}$ .

## 2. úloha

V královské rodině se rodí děti, dokud se buď nenarodí chlapec, nebo dokud nemají tři děti. Předpokládejme, že při narození každého dítěte je pravděpodobnost  $\frac{1}{2}$ , že to bude chlapec, a pravděpodobnost  $\frac{1}{2}$ , že půjde o děvče. Určete průměrný počet chlapců a průměrný počet dívek v královských rodinách.

Podle zadání skončí polovina rodin s jedním dítětem – chlapcem, druhé polovině se narodí jako první dívka a tak to budou královští rodiče zkoušet dál. Ze druhé poloviny se na druhý pokus povede chlapec opět jen v polovině případů, a celkově čtvrtina rodin to bude zkoušet se dvěma dětmi dál. Této čtvrtiny bude opět polovina úspěšná a polovina skončí bez následníka po meči.

Teď si z předchozího vytvoříme reprezentativní vzorek osmi královských rodin. Čtyři rodiny mají jednoho syna, dvě rodiny syna a dceru, jedna dvě dcery a syna, a poslední tři dcery. Průměrný počet dcer v královských rodinách je  $d = \frac{0+0+0+0+1+1+2+3}{8} = \frac{7}{8}$  a průměrný počet synů je  $s = \frac{1+1+1+1+1+1+1+0}{8} = \frac{7}{8}$ .

## 3. úloha

Čokoládová princezna má doma 30 truhliček a k nim 30 různých příslušných klíčů. Na počátku dá princezna náhodně do každé truhličky právě jeden klíč a všechny truhličky zavře. Má však u sebe kouzelné kladivo, které umí otevřít právě jednu libovolně vybranou truhličku. Princezna v otevřené truhličce nalezne klíč a pokud to jde, otevře další truhličku, najde klíč a tak dál. Zjistěte, s jakou pravděpodobností otevře princezna všechny truhličky.

Pokud princezna při svém otvírání narazí na truhličku, v níž je klíč od první truhličky, je jasné, že žádnou další se jí už otevřít nepodaří. Takže nás vlastně zajímá pravděpodobnost, kdy je klíč od první truhličky v poslední otvírané truhličce.

Pravděpodobnost, že první klíč není v první truhličce, je  $\frac{29}{30}$ ; pravděpodobnost, že první klíč není v první ani v druhé truhličce je  $\frac{29}{30} \cdot \frac{28}{29}$ , ... (Všechny dosud neotevřené truhličky mají stejnou šanci být otevřeny.)

Pravděpodobnost, že klíč není v prvních 29 otvíraných truhličkách pak je  $\frac{29}{30} \cdot \frac{28}{29} \cdots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ . Tedy pravděpodobnost, že princezna otevře všechny truhličky je  $\frac{1}{30}$ .

## 4. úloha

Tygr si háže desetikorunou a výsledky si pečlivě zapisuje na papír. Padle-li panna<sup>5</sup>, zapíše si A,

<sup>5</sup>Pravděpodobnost, že padne panna je stejná jako pravděpodobnost, že padne orel.

v opačném případě si запиše  $B$ . Skončí v momentě, kdy mu vznikne trojice  $AAB$  nebo  $ABA$ . Spočítejte pravděpodobnost, s jakou bude na papíře poslední zapsaná posloupnost  $AAB$  a pravděpodobnost, s jakou bude poslední posloupnost  $ABA$ .

Na tuto úlohu použijeme trik který nejdříve objasníme na jiné, velmi lehké, úloze.

**Úloha.** (lehká) Spočítejte hodnotu nekonečné odmocniny  $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$ . Předpokládáme přitom, že takové číslo vůbec existuje<sup>6</sup>.

*Řešení.* Označme si výslednou hodnotu odmocniny jako  $x$ . Potom můžeme psát  $x = \sqrt{1 + x}$ . To je nejpodstatnější krok této úlohy. Je důležité si uvědomit, že díky nekonečnosti se stejná odmocnina nachází i uvnitř samotné odmocniny. Vyřešením rovnice  $x = \sqrt{1 + x}$  snadno dostaneme  $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

Vraťme se k naší úloze. Označme  $p_{aab|aa}$  pravděpodobnost, že posloupnost písmen  $A$  a  $B$  skončí trojicí  $AAB$  za předpokladu, že právě (teď) končí písmeny  $AA$ . Podobně  $p_{aab|ab}$ ,  $p_{aab|ba}$  a  $p_{aab|bb}$ .

Nyní si vezměme situaci, že posloupnost končí písmeny  $AA$ . Máme teď dvě možnosti, co padne. Buď padne další  $A$  a my se jakoby octneme v téže situaci (kdy končí posloupnost na  $AA$ ), nebo padne  $B$  a hra skončí. Možnosti padnutí  $A$  nebo  $B$  mají obě pravděpodobnost  $\frac{1}{2}$ . Proto dostáváme, že

$$p_{aab|aa} = \frac{1}{2}p_{aab|aa} + \frac{1}{2} \cdot 1.$$

Na tomto místě se využívá nekonečnost podobně jako v  $x = \sqrt{1 + x}$ . Podobnými úvahami o pokračování řetězce písmen v případech končících na  $AB$ ,  $BA$ ,  $BB$  dospějeme k rovnicím

$$\begin{aligned} p_{aab|ab} &= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2}p_{aaa|bb} \\ p_{aab|ba} &= \frac{1}{2}p_{aab|aa} + \frac{1}{2}p_{aab|ab} \\ p_{aab|bb} &= \frac{1}{2}p_{aab|ba} + \frac{1}{2}p_{aab|bb} \end{aligned}$$

Z těchto rovnic dostaneme  $p_{aab|aa} = 1$ ,  $p_{aab|ab} = \frac{1}{3}$ ,  $p_{aab|ba} = \frac{2}{3}$  a  $p_{aab|bb} = \frac{2}{3}$ . Celková pravděpodobnost  $p_{aab}$ , že hra skončí trojicí  $AAB$ , je  $p_{aab} = \frac{1}{2}p_{aab|a} + \frac{1}{2}p_{aab|b} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}p_{aab|aa} + \frac{1}{2}p_{aab|ab}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}p_{aab|ba} + \frac{1}{2}p_{aab|bb}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$ .

## 5. úloha

Pavel dostal tabulku čokolády s  $m$  řádky a  $n$  sloupci rozlámanou na dílky  $1 \times 1$ . Avšak nenasytný Oto mu postupně dílky bere a ujídá, přičemž všechny způsoby sněžení jsou stejně pravděpodobné. Najděte pravděpodobnost jevu, že v žádném okamžiku nebudou existovat dva řádky, v nichž by se počet nesněžených dílků lišil o 2 a více.

Jelikož neexistují dva řádky, kde by se počet dílků lišil o dva a více, pak nutně každé dva řádky buď mají stejný počet dílků, nebo se počet dílků liší o jeden. Mají-li všechny řádky stejný počet

<sup>6</sup>Pokud Ti tento předpoklad připadá zvláštní, zkus si představit, jak by se počítala hodnota součtu  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ . V soutěžní úloze jsme po Tobě (hodně technický) důkaz existence nechtěli.

dílků a my vezmeme libovolný dílek z libovolného řádku, poté musíme následujících  $m - 1$  dílků odebrat ze zbylých  $m - 1$  řádků (přesněji řečeno z každého jeden), abychom splnili podmínku odebrání.

První dílek z tabulky můžeme správně vzít s pravděpodobností  $\frac{mn}{mn} = 1$ . Pro odebrání druhého dílku máme na výběr  $m - 1$  plných řádků, tj. pravděpodobnost  $\frac{(m-1)n}{mn-1}$ , třetí dílek bereme ze zbylých  $m - 2$  plných řádků, tudíž máme pravděpodobnost  $\frac{(m-2)n}{mn-2}$  atd. Spočteme-li nyní pravděpodobnost po odebrání prvních  $m$  dílků, dostaneme:

$$\frac{mn}{mn} \frac{(m-1)n}{mn-1} \frac{(m-2)n}{mn-2} \cdots \frac{1n}{mn-(m-1)} = \prod_{i=0}^{m-1} \frac{(m-i)n}{mn-i} = \frac{m!n^m}{(mn)!}$$

a vidíme, že jsme v situaci, kdy v každém řádku je  $(n - 1)$  dílků. Při odebrání  $k$ -té  $m$ -tice,  $k = 0, 1, \dots, n - 1$  postupujeme obdobně a dostáváme pravděpodobnosti:

$$\begin{aligned} \frac{m(n-k)}{m(n-k)} \frac{(m-1)(n-k)}{m(n-k)-1} \frac{(m-2)(n-k)}{m(n-k)-2} \cdots \frac{1(n-k)}{m(n-k)-(m-1)} &= \\ = \prod_{i=0}^{m-1} \frac{(m-i)(n-k)}{m(n-k)-i} &= \frac{m!(n-k)^m}{(m(n-k))!} \end{aligned}$$

Vynásobíme-li všechny tyto pravděpodobnosti pro  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ , dostáváme pravděpodobnost:

$$\frac{m!n^m}{(mn)!} \frac{m!(n-1)^m}{(m(n-1))!} \cdots \frac{m!1^m}{(m0)!} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{m!(n-k)^m}{(m(n-k))!} = \frac{(m!)^n (n!)^m}{(mn)!}$$

Tudíž celková pravděpodobnost jevu ze zadání je  $\frac{(m!)^n (n!)^m}{(mn)!}$ .

### 6. úloha

V intervalu  $(0, 1)$  vybereme náhodně rovnoměrně dvě čísla  $x$  a  $y$ . Určete pravděpodobnost toho, že

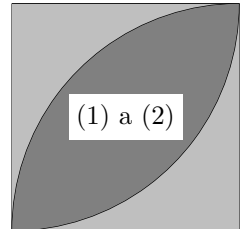
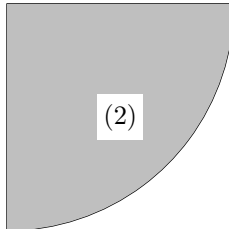
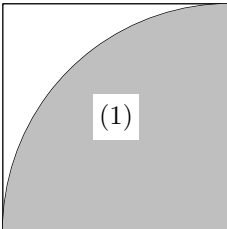
$$\frac{x^2 + y^2}{2} < \min\{x, y\}$$

Po pronásobení dvěma dostaneme podmínku v zadání v podobě  $x^2 + y^2 < \min\{x, y\}$ , což je ekvivalentní s podmínkou, že  $x^2 + y^2 < 2x$  a zároveň  $x^2 + y^2 < 2y$ . Po drobné úpravě dostáváme dvě podmínky:

$$(x-1)^2 + y^2 < 1^2, \tag{1}$$

$$x^2 + (y-1)^2 < 1^2. \tag{2}$$

Obě podmínky jsou rovnicemi kruhu s poloměrem 1. U první podmínky je střed v bodě  $(1, 0)$  u druhé v bodě  $(0, 1)$ .



Na obrázcích jsou postupně vyznačeny oblast určená podmínkou (1), oblast určená podmínkou (2) a oblast určená těmito podmínkami dohromady. Označme  $O$  oblast určenou oběma podmínkami dohromady. Pravděpodobnost, že čísla  $x$  a  $y$  se třetí do oblasti  $O$  je rovna poměru obsahu této oblasti a obsahu celého čtverce. Obsah čtverce je roven 1. Obsah oblasti  $O$  jednoduše spočítáme například tak, že sečteme obsahy oblastí určených podmínkami (1) a (2) (tím jsme body z oblasti  $O$  započítali dvakrát, ostatní body čtverce jednou) a odečteme od nich obsah celého čtverce. Tedy obsah oblasti  $O$  je  $\frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 + \frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$ , což je i výsledná pravděpodobnost.

## 7. úloha

Je dána tabulka  $1 \times 21$  a v ní vzestupně seřazena čísla  $-10, -9, \dots, 9, 10$ . Každé políčko tabulky je obarveno červeně nebo bíle, přičemž součet čísel na červených políčkách označme  $n$ . Karlova figurka stojí na začátku na políčku 0 (uprostřed tabulky). Potom Karel desetkrát hodí mincí<sup>7</sup>. Pokaždé, když padne panna, posune figurku o jedno políčko doprava, když orel, posune figurku o jedno políčko doleva. Po deseti hodech mincí je pravděpodobnost, že figurka stojí na červeném políčku, rovna zlomku  $\frac{a}{b}$  ( $a$  a  $b$  nesoudělná). Za podmínky, že  $a + b = 2001$ , určete největší možné  $n$ .

Po deseti hodech mincí bude figurka stát na políčku s číslem  $2k - 10$ , kde  $k$  vyjadřuje, kolikrát padla panna. Z  $2^{10} = 1024$  možných výsledků deseti hodů mincí je právě  $\binom{10}{k}$  způsobů, jak mohla padnout právě  $k$ -krát panna, takže pravděpodobnost, že figurka skončí na políčku s číslem  $2k - 10$  je rovna  $\binom{10}{k} \cdot \frac{1}{1024}$ . Pravděpodobnost, že figurka skončí na červeném políčku, je rovna  $\frac{c}{1024}$ , kde  $c$  je součet některých čísel z následujícího seznamu (jenž není množinou, protože v něm některá čísla jsou vícekrát):

$$\left( \binom{10}{0}, \binom{10}{1}, \binom{10}{2}, \dots, \binom{10}{10} \right) = (1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1) \quad (1)$$

Máme dána nějaká přirozená čísla  $a, b$  splňující  $a + b = 2001$ ,  $\frac{a}{b} = \frac{c}{1024}$ .

Z podmínky  $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$  a  $a + b = 2001$  dostaneme  $1001 \leq b \leq 2001$ . Dále vidíme, že  $b$  dělí 1024 ( $a$  a  $b$  jsou nesoudělná), takže  $b = 1024$ . Potom tedy  $a = c = 2001 - 1024 = 977$ . Je pouze jediný způsob, jak vybrat výrazy z (1) tak, aby byl jejich součet roven 977:

$$977 = 10 + 10 + 45 + 120 + 120 + 210 + 210 + 252 \quad (2)$$

(To můžeme lehce dokázat: zbývající výrazy z (1) musí dát součet  $1024 - 977 = 47$  a pro  $47 = 45 + 1 + 1$  je jen tahle jediná možnost.)

Abychom dostali co největší  $n$ , obarvíme políčka následujícím způsobem. Políčka s lichými čísly budou červená, pokud jsou čísla kladná, a bílá, pokud jsou čísla záporná. Jelikož se  $252 = \binom{10}{5}$  nachází ve vybraném součtu, bude políčko s číslem  $2 \cdot 5 - 10 = 0$  obarveno červeně.

Pro  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ :

- (i) objevuje-li se  $\binom{10}{k}$  v součtu (2) dvakrát, potom budou políčka  $(2k - 10)$  i  $(10 - 2k)$  obarvena červeně.
- (ii) neobjevuje-li se  $\binom{10}{k}$  v součtu (2), potom budou políčka  $(2k - 10)$  i  $(10 - 2k)$  obarvena bíle.
- (iii) objevuje-li se  $\binom{10}{k}$  v součtu (2) jednou, potom bude políčko  $(2k - 10)$  červené a  $(10 - 2k)$  bílé.

<sup>7</sup>Opět je pravděpodobnost, že padne panna, stejná jako pravděpodobnost, že padne orel.

Maximální hodnotu  $n$  tedy dostaneme, obarvíme-li červeně políčka 1, 3, 5, 7, 9, -8, 8, -4, 4, -2, 2, 0, 6, což dává součet  $n = 31$ .

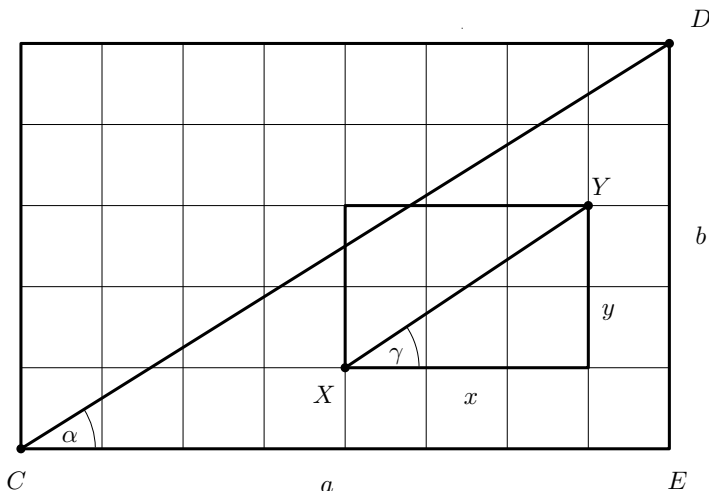
### 8. úloha

Mějme tabulku velikosti  $a \times b$ , kde  $a, b$  jsou nesoudělná. Levý dolní roh tabulky si označme  $C$ , pravý horní roh  $D$  a pravý dolní roh  $E$ . Po hranicích dílků tabulky se nyní můžete pohybovat, avšak jen nahoru nebo doprava. Pokud si náhodně zvolíte jednu ze všech možných cest<sup>8</sup> z  $C$  do  $D$ , jaká je pravděpodobnost, že vůbec nevstoupíte dovnitř trojúhelníku  $CDE$ ?

Naším cílem bude dokázat, že pravděpodobnost výběru cesty nezasahující do trojúhelníku  $CDE$  je rovna  $\frac{1}{a+b}$ . Myšlenka důkazu rozdělit si všechny cesty do disjunktních skupin takových, že každá skupina bude obsahovat právě  $a + b$  cest a vždy jen jedna z těchto  $a + b$  cest nebude zasahovat do  $\triangle CDE$ .

Nejprve si dokážeme pomocné lemma.

**Lemma.** *Nechť je  $CD$  úhlopříčka a  $XY$  libovolná jiná úsečka s krajními body v mřížce obdélníku. Pak  $CD$  a  $XY$  nejsou rovnoběžné.*



*Důkaz.* Pro spor předpokládejme, že umíme najít dva body  $X$  a  $Y$  takové, že jsou úsečky  $CD$  a  $XY$  rovnoběžné. Pak musí být stejné i úhly  $\alpha$  a  $\gamma$ , které úsečky  $CD$  a  $XY$  svírají s vodorovným směrem. Když jsou stejné úhly, musí být stejné i tangenty obou úhlů:  $\frac{b}{a} = \tan \alpha = \tan \gamma = \frac{y}{x}$ . Avšak  $\frac{b}{a} = \frac{y}{x}$  platit nemůže, protože  $\frac{b}{a}$  je díky nesoudělnosti čísel  $a$  a  $b$  zlomek v základním tvaru a to je ve sporu s  $y < b$  nebo  $x < a$ .

Vyberme si jednu z cest z  $C$  do  $D$  a podívejme se na obdélník ze zadání tak, aby byla spojnice bodů  $C$  a  $D$  vodorovná.

Teď už můžeme bez obav vytvořit skupinky „podobných“ cest o  $a+b$  členech. Za podobné cesty budeme od teď brát takové cesty, že jedna cesta vznikne z druhé rozpojením v nějakém mřížovém

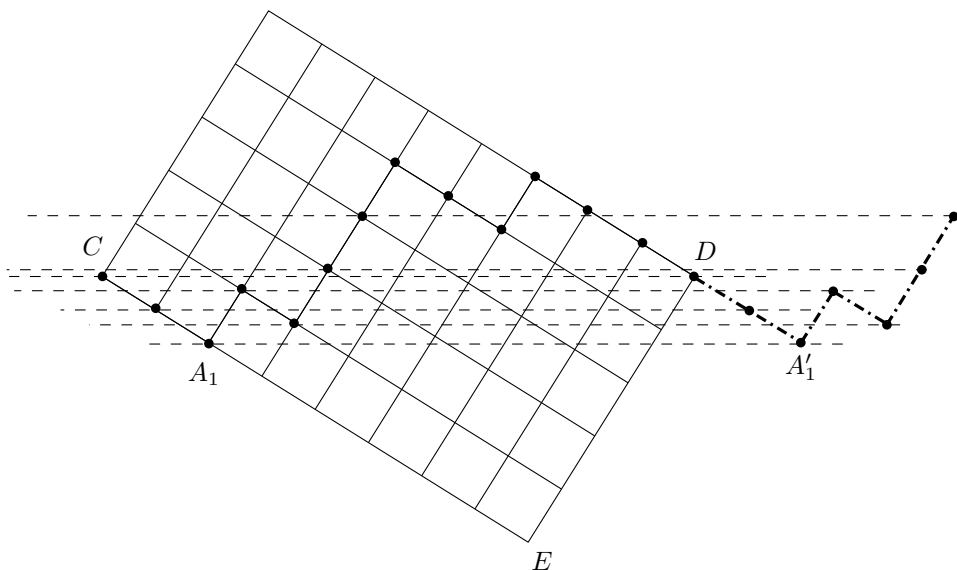
<sup>8</sup>Všechny cesty jsou stejně pravděpodobné.



bodě a navázáním začátku cesty na konec cesty. Ilustrované je to na předchozím obrázku. Cesta z  $A_1$  do  $A'_1$  je podobná cestě z  $C$  do  $D$ , protože vznikla rozpojením cesty z  $C$  do  $D$  v bodě  $A_1$  a první úsek  $CA_1$  se nalepil za bod  $D$  na úsek  $DA'_1$ .

Je potřeba ukázat, že skupinky podobných cest jsou disjunktní, že je v každé skupince přesně  $a + b$  cest a že jen jedna z těchto cest nezasahuje do trojúhelníku  $CDE$ .

Je celkem jasné, že pokud je jedna cesta podobná s druhou, druhá je podobná s třetí, tak je i třetí podobná s první. Z toho plyne, že pokud leží jedna cesta ve dvou skupinkách, tak jsou tyto skupinky stejné (všechny cesty z jedné skupinky jsou si podobné se všemi cestami z druhé) a lze je považovat za jednu skupinku.



Díky pomocnému lemmatu neleží žádné dva mřížové body cesty na stejné „výškové hladině“. Proto lze na každé cestě najít jeden bod, který je nejnižší a podobná cesta jím počínající nevchází do trojúhelníku  $\triangle CDE$ . Díky tomu každá skupinka obsahuje aspoň jednu cestu nezasahující do  $\triangle CDE$ . Kdyby byly tyto cesty ve skupince dvě, pak by jedna z druhé a druhá z první vznikla rozpojením v nejnižším bodě, ale nejnižším bodem cesta nezasahující do  $\triangle CDE$  začíná a končí, což je spor s tím, že jsou tyto dvě cesty různé. Proto má každá skupinka právě jednu cestu nezasahující do  $\triangle CDE$ .

Už zbývá jen nahlédnout, že je ve skupince  $a + b$  cest. Dá se říct, že každou skupinku vytváří její cesta nezasahující do  $\triangle CDE$  (jinak řečeno: všechny cesty ve skupince jsou podobné té, co nezasahuje do  $\triangle CDE$ ). Možností, jak dát z jedné cesty vzniknout novým cestám je  $a + b - 1$ , proto je ve skupině maximálně  $a + b$  cest. Všechny takto vzniklé cesty jsou ale různé, protože každé dvě cesty vzniklé rozpojením v různých bodech mají různý počet bodů výškově nad a pod bodem rozpojení (plyne opět z lemmatu díky tomu, že jde mřížové body výškově uspořádat). Počet  $a + b$  cest ve skupině dokázán.

Všechny cesty jsou stejně pravděpodobné a jen každá  $a + b$ -tá cesta nezasahuje do  $\triangle CDE$ . Proto je pravděpodobnost žádaná v zadání  $\frac{1}{a+b}$ .